АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

2148—3359

№ 3 1959

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), профессор *В. Ю. Ломоносов* (Электротехника), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 5
Преподавание математики 7
Основания математики и математическая логика 12
Теория чисел 20
Алгебра 28
Многочлены и линейная алгебра 28
Группы 31
Поля, кольца и структуры 39
Алгебраическая теория схем связи и управления 47
Топология 49
Теория функций действительного переменного 58
Теория множеств 60
Приближение функций полиномами и их обобщениями 60
Теория функций комплексного переменного . . 69
Дифференциальные уравнения 81
Обыкновенные дифференциальные уравнения 81
Уравнения в частных производных 94
Приложения к физике, технике и естественным наукам 110
Интегральные уравнения 120
Приложения интегральных уравнений . . . —
Вариационное исчисление 123
Анализ (другие вопросы) 124
Числовые ряды 128
Специальные функции 132
Интегральные преобразования и операционное исчисление 132
Приложения общих методов математического анализа 134
Функциональный анализ 135
Теория вероятностей 151
Математическая статистика 157
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 161
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 164
Геометрия 168
Приложения геометрии 170
Элементарная геометрия 171
Аналитическая геометрия 173
Проективная геометрия 175
Начертательная геометрия 177
Алгебраическая геометрия 178
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 182
Геометрия *n*-мерного пространства 184
Теория относительности 191
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 193
Метрические методы в геометрии 197
Выпуклые многообразия 198
Численные и графические методы 200
Таблицы 205
Вычислительные машины и математические приборы 206
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 221
Авторский указатель 223

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL
INSTITUTE OF THE SCIENTIFIC INFORMATION
ACADEMY OF SCIENCE OF THE USSR
Director of the Institute professor *A I. Mikhailov*

Editors of series: corresponding member *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V Alpatov* (Biologiya), professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *V. Y. Lomonosov* (Electrotekhnika), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodeziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya), candidate of technical science *V. Z Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika).

CONTENTS

General	1	Integral transforms, operational calculus	132
History. Personalia	5	Applications of general methods of mathematical analysis	134
Teaching of mathematics	7	Functional analysis	135
Foundations. Mathematical logic	12	Theory of probability	151
Theory of numbers	20	Mathematical statistics	157
Algebra	28	Theory of games, operational research, mathematical economics	161
Polynomials, linear algebra	28	Applications of probabilities and statistical methods	164
Groups	31	Geometry	168
Fields, rings, lattices	39	Applications of geometry	170
Algebraic theory of communication and control circuits	47	Elementary geometry	171
Topology	49	Analitic geometry	173
Theory of functions of real variables	58	Projective geometry	175
Theory of sets	60	Descriptive geometry	177
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations	60	Algebraic geometry	178
Theory of functions of complex variables	69	Differential geometry of 3-dimensional space	182
Differential equations	81	Geometry of n-dimensional space	184
Ordinary differential equations	81	Theory of relativity	191
Partial differential equations	94	Global theory of differentiable manifolds	193
Applications to physics, technology and natural sciences	110	Metric methods in geometry	197
Integral equations	120	Convex manifolds	198
Applications of integral equations	—	Numerical and graphical methods	200
Calculus of variations	123	Tables	205
Analysis (other aspects)	124	Computers and mathematical devices	206
Numerical series	128	Application of computer devices	221
Special functions	132	Author index	223

Editorial office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 2148—3359 № 3 Март 1959 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

2148. **Развитие физико-математических наук в Армении за период Советской власти.** Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери сериа, Изв. АН АрмССР, Сер. физ.-матем. н., 1957, **10**, № 5, 3—18

Кратко отмечается значение Великой Октябрьской социалистической революции для армянского народа; указывается, что в дореволюционной Армении, входящей в состав царской России, не было каких-либо центров научных исследований и даже отдельных исследователей в области физико-математических наук.

Ереванский государственный университет был основан в 1921 г., физико-математический факультет университета открыт в 1925 г. Начиная с 1929—1930 гг. в Москву и Ленинград для прохождения аспирантуры была послана группа студентов, окончивших физико-математический факультет Ереванского университета (это практикуется и сейчас).

Такая форма подготовки кадров в значительной степени содействовала улучшению постановки преподавания в Ереванском университете и положила начало для самостоятельной научно-исследовательской работы.

Если в первый период существования факультета основное внимание было направлено на создание учебной литературы, организацию лабораторий, разработку современной армянской научной терминологии, а научные исследования появлялись изредка, то с 1934 г. все чаще печатаются научные работы.

Далее перечисляются достижения армянских ученых в области математики, механики, астрофизики и физики.

Примечание референта: 1. В статье отсутствует периодизация науки, есть пробелы в датировке; отметим, что Академия наук АрмССР основана в 1943 г. Пропущены имена многих научных работников, имеющих печатные научные труды. 3. Перевод геометрии Киселева назван новым переводом «Начал» Евклида.

Г. Б. Петросян

2149. **Научная деятельность математиков Пекина.** Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 1, 155—158 (кит.)

Приводится список специальных курсов, читанных на механико-математическом факультете Пекинского университета в 1957 г., а также краткие сообщения о работе трех семинаров: по дифференциальным уравнениям в частных производных, по функциональному анализу и по топологии (организованных Пекинским университетом и Математическим институтом Академии наук Китая). Эти семинары имели большую научно-образовательную ценность. Приводятся списки изучавшейся литературы, среди которой много советской.

Ю. М. Смирнов, Гу Чао-хао

2150. **Общая научная сессия Академии РНР от 27 июня — 2 июля 1955 г. Секция I. Достижения в области математики и физики** (Sesiunea generală stiintifică a Academiei R. P. R. din 27 iunie — 2 iulie 1955. Sec. I. Realizări în domeniul matematicii si fizicii), An. Acad. RPR, 1955, **5**, № 1, 253—265 (рум.)

Очерк исторического характера из серии очерков, опубликованных к заседаниям сессии. Начало математических исследований отнесено к 1900 г. Развитие румынской математики в XIX в. почти не отражено. Сейчас Академия имеет математические институты в Бухаресте и Яссах и отделение математики и физики в Клуже. Отмечено многообразие научных работ математиков РНР. Части очерка, относящиеся к астрономии и физике, здесь не реферируются.

А. Н. Гливиц

2151. **29-й Конгресс международного инетитута статистики** (29-e Congrès de l'Institut international de statistique), J. Soc. statist. Paris, 1955, **96**, № 7-9, 145—148 (франц.)

Информационное сообщение, в котором указаны программа заседаний, перечень сообщений и рекомендации конгресса.

Л. Н. Большев

2152. **XIX школьная математическая олимпиада в Москве. Дынкин Е. Б., Гирсанов И. В.**, Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 187—194

Олимпиаду проводили для школьников 7—10 классов в апреле 1956 г. механико-математический факультет МГУ, Московское математическое общество и Мосгороно. В заметке сообщаются сведения: о работе школьного математического кружка при Московском университете, о лекциях для школьников, статистика успешности решения задач. Приведены все задачи, предложенные на олимпиаде.

2153. **Математические олимпиады в Чехословакии. Гайдук Ю. М.**, Матем. в школе, 1958, № 3, 80—83

Математические олимпиады проводятся в Чехословакии ежегодно в масштабах всей страны, начиная с 1951/52 учебного года. Олимпиады проводятся по четырем категориям.

По категории «*А*» состязания проводятся в три, по остальным трем категориям — в два тура. В первом туре предлагается 16 задач; к участию во втором туре допускаются те, кто правильно решит не менее 9 из них. К участию в третьем туре в группе «*А*» допускается не более 80 человек из числа получивших зачет во втором туре.

Приводятся типы задач, предлагавшихся на математических олимпиадах в Чехословакии. Сообщается, что с 1957/58 учебного года в статут олимпиады внесены изменения: снижено число задач, отбор участников про-

изводится в школах, число участников от школ регламентируется. Ю. С. Цапин

2154. **Кибернетика на службе технического прогресса. Лоскутов В. И.**, Приборостроение, 1958, № 8, 1—6

Кратко изложены основные функции, выполняемые современными вычислительными машинами. Указаны принципы, на которых можно автоматизировать производственный процесс с использованием вычислительных машин. Приведены примеры автоматизации производственных процессов на ж.-д. транспорте. Н. П. Жидков

2155. **Кибернетика с точки зрения биолога. Дембовский** (Cybernetyka widziana okiem biologa. Dembowski Jan), Kosmos (Polska), 1958, A7, № 3, 267—283 (польск.)

Популярное изложение сущности кибернетики. Автор обращает основное внимание на аналогии между функциями организма, в том числе и его нервной системы, и действиями кибернетической машины, на их практическое значение как для биологии, так и для автоматики. Разбирая методологическую проблему сходства и различия между машиной и организмом, автор показывает трудность проведения точного разграничения на одном примере, который фигурировал на конференции польских естественников, имевшей место в начале 1951 г. в Кужницах. Статья снабжена библиографией.

Э. Я. Кольман

2156. **Очерк одной теории сообществ. Гонсалес-Асенхо** (Bosquejo de una teoria de sociedades. Gonzáles Asenjo Florencio), Math. notae, 1956, 16, № 1-2, 5—19 (исп.)

Выдержка из первой части труда автора «Кибернетика и теория сообществ», представленного в качестве диссертации на соискание степени доктора математических наук в Ла-Плате. Имеет целью выяснить, почему кибернетика, возникшая из соединения двух-трех технических дисциплин, добилась так быстро успехов не только в физике, но и в физиологии и социологии. Автор объясняет это тем, что создатели кибернетики, не осознав этого, положили в ее основу общий принцип всей конкретной действительности, который можно назвать принципом множественной локализации. Исходя из субъективно-идеалистической диалектики Уайтхеда, рассматривающей действительность как сплетение (ощущений) и вводящей понятия актуальной сущности, а также другие понятия, производные от социальных понятий, автор пытается формализовать их, полагая, что этим он не только кладет начало чисто математической социологии, но и противопоставляет теоретико-множественному обоснованию математики другую возможную альтернативу.

Рассматривая систему математической логики Куайна, автор отмечает, что в ней отсутствует необходимая связь между понятиями целое и часть, поскольку они независимы от понятий класса и элемента класса или класса и его правильной части. Сохраняя в системе Куайна логические связки и кванторы, автор заменяет понятие принадлежности ε понятием присутствия σ. Термины, связанные с помощью σ, являются сообществами или семействами сообществ или организмов. Вводя затем понятие логической формулы, автор устраняет для σ парадокс, аналогичный парадоксу Рассела для ε, пользуясь его же приемом: выражение $x\sigma x$ не будет противоречивым, если $z\sigma z$ обозначает $\exists\, x(x\sigma y) \sim (z\sigma z)$, где $\exists\, x$ — квантор существования, $\sim$ символ отрицания, x — сообщество, z — семейство сообществ. В отличие от $x\varepsilon x$, формула $x\sigma x$ исключена лишь когда x — семейство сообществ, но не когда x — сообщество. Подобно тому как в теории классов абстракцией именуют класс, чьи элементы обладают данным свойством, так и в теории сообществ назовем конкретизацией семейство, образованное из всех сообществ, находящихся в нем. И если, например, класс u всех элементов x, y таких, что $x\varepsilon y$, является пустым классом, то семейство w всех сообществ x, y, таких, что $x\sigma y$, является, напротив, универсальным семейством.

Семейства сообществ или организмов обладают следующими первичными свойствами: 1) Всякое сообщество семейства присутствует во всех других сообществах семейства (аксиома множественной локализации); 2) Семейство сообществ присутствует в каждом сообществе соответственно частично упорядоченному множеству, чьи элементы суть собственные сообщества, рассматриваемые как его элементы, и которое назовем «перспективой» семейства этих сообществ; указанный порядок, и тем самым и перспектива, являются вообще различными в каждом сообществе (аксиома организации). Присутствие каждого сообщества в каждом сообществе семейства назовем аспектом. 3) Каждому аспекту сопоставляется соответствующая перспектива сообщества, т. е. частично упорядоченное множество, в общем случае не тождественное с соответствующей перспективой, и определяющее особую форму, которую принимает присутствие одного сообщества в другом сообществе того же семейства (аксиома информации). Из 2) и 3) аксиом следует, что какое-либо сообщество занимает в каждом сообществе порядковое место в перспективе сообществ и другое порядковое место в каждом из аспектов, который создает каждое сообщество по отношению к другим, в которых оно присутствует. Если перспектива упорядочена, можно аспекты расположить в виде матрицы так, что строка n-го порядка является аспектом сообщества, которое занимает n-е место в рассматриваемой перспективе.

Устанавливая 6 возможных видов упорядочения, автор вводит затем алгебру сообществ, напоминающую булевскую. Однако он не рассматривает условия, при которых сохраняются или нарушаются виды упорядочения сообществ, над которыми произведены те или другие алгебраические действия. Наконец, автор при помощи определения через абстракцию каждый класс эквивалентности рассматривает как тип множественной локализации. Так выражение $x\sigma y$ представляет конъюнкцию выражений типа $x\sigma w$ (где w — сообщество семейства y). Символ связки σ симметричен в отличие от асимметричного символа ε. Понятие порядка существенно и неотделимо от понятия локализации, и без него семейство сообществ свелось бы к множеству, состоящему из одного-единственного элемента. Поэтому семейство сообществ не является «единством множественности», как Кантор определил понятие множества. Семейство, как конкретизация сообществ и чистых множественностей, в отличие от абстрактного множества, не может быть упорядоченным. Как только мы приписываем семейству порядок, мы преобразовываем его в абстрактное понятие перспективы, т. е. в частично упорядоченное множество. Э. Кольман

2157. **Метаматематика и современное понимание математики. Кеннер** (Meta-mathematics and the modern conception of mathematics. Kenner Morton R.), Math. Teacher, 1958, 51, № 5, 350—357 (англ.)

Статья воспроизводит доклад, прочитанный на годовой конференции Национального совета учителей-математиков в Филадельфии (США) в марте 1957 г. с целью дать представление о предмете метаматематики.

Подчеркивается, что математика — абстрактная наука. Абстрактность математики автор понимает в двух формах — возможность объединения в математические системы различных по качеству объектов, которые изучаются с точки зрения определенных свойств или признаков (абстрактные группы, множества разных типов и т. д.), и возможность абстрактных построений в математике, не зависимых от опыта, что приводит к расселовскому определению математики. По мнению автора, второй вид абстрактности наиболее характерен для современной математики,

Автор кратко излагает историю попыток логического обоснования математики со времен Л. Эйлера до современности, говорит особо о значении работ Гильберта. По Гильберту метаматематика — специальная дисциплина, которая занимается собственно обоснованием и методами формализации. Она должна пересчитать все символы, употребляемые в математических системах, перенумеровать все формулы классической математики, показать порядок и способ конструкций, которые приводят к этим формулам, и, наконец, должна установить абсолютное доказательство их совместимости.

Поставленная Гильбертом цель обосновать формализованную математику не была достигнута, что показал Гёдель. Несмотря на это, по мнению автора, метаматематика «является мощным средством для анализа формальных структур, которые мы называем математикой».

Примечание референта. Автор чрезмерно подчеркивает абстрактность математики и делает неверное заключение, что она не зависима от опыта.

Б. В. Пясковский

2158. О математике, технике и векторном исчислении. Родригес-Перейра (Consideracões sôbre matemática, técnica e calculo vetorial. Rodrigues Pereira Gaspar S. M.), Engen. miner. e metalurgia, 1958, **27**, № 157, 21 (порт.)

Статья доцента Бразильского университета, характеризующая возросшую роль математики и новых ее идей (теории структур, тензорного исчисления) для вопросов техники. Упоминается о роли деятельности «многоголового» математика Бурбаки и значение современной алгебры и топологии.

Примечание референта. Референту известно, что в ряде южно-американских университетов математика преподается в духе Бурбаки. И. Я. Депман

2159. Как возможна философия математики. Лоренцен (Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? Lorenzen Paul), Philos. natur., 1957, **4**, № 2-3, 192—208 (нем.)

Автор считает, что: 1) логика не должна называться философией математики; 2) философия не должна обсуждать вопросы конкретной науки. Он видит задачу философии в рассмотрении «предварительных мнений» людей об окружающем мире и о самих себе, которые предшествуют научным предложениям. С этой точки зрения философия математики возможна как рассмотрение предварительных решений, заложенных уже в ходе образования математической теории, с целью установить их место в истории наших донаучных мнений. Лоренцен, однако, уклоняется от развития цельной программы и ограничивается критикой таких «предварительных мнений» на трех конкретных примерах.

I. Применение принципа исключенного третьего в арифметике. Здесь подвергается сомнению правильность убеждения в том, что человеческое мышление способно оперировать с бесконечным так же, как с конечным. В этой связи встает вопрос обоснования неограниченной законности формулы

$$(\exists x) \neg a(x) \vee (\forall x) a(x) \qquad (1)$$

(принцип исключенного третьего) и заключения

$$\neg (\exists x) \neg a(x) \rightarrow (\forall x) a(x). \qquad (2)$$

II. Применение понятия «потенц-множества». Применение этого понятия, по мнению Лоренцена, основывается на том, что за математикой признается возможность заранее указать однозначно ограниченную и независимую от нас совокупность ее языковых средств. Такую позицию автор называет «шаткой» и видит выход в возможности для математики сконструировать язык, не опираясь на заранее данный метаязык (на «оперативной» основе).

III. Применение системы аксиом, непротиворечивость которой не доказывается. Лоренцен считает, что такая аксиоматика не может считаться обоснованной своей «самоочевидностью». Кроме того, аксиомы не являются единственными основаниями для доказательства остальных предложений теории. Другой такой основой может быть конструкция. Автор не дает подробного анализа вопроса о соотношении «физикалистской» необходимости и математической «гарантированности» аксиоматики, но считает ясным, что такой анализ не приведет к принципиально новым положениям. К. Н. Суханов

2160. Формы проявления законов диалектики в математике. Гермэнеску (Forma de manifestare a legilor dialecticii în matematici. Ghermănescu M.), Gaz. mat. si fiz., 1958, **A10**, № 3, 129—141 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор говорит о предмете диалектического материализма, его законах, которым подчинено развитие всех наук, в том числе и математики, и приводит высказывания Энгельса о математике и ее развитии. Затем он подчеркивает, что появление новых разделов математики и новых общественных факторов совпадают. Так, арифметика появилась одновременно с появлением обмена; геометрия — с появлением частной собственности; тригонометрия и геометрия — с развитием мореплавания; теория вероятностей — с появлением азартных игр (Франция), сберегательных касс (Англия) и т. д.

На примерах показывается, что в математических идеях и результатах проявляются законы диалектического материализма. Факты берутся из истории понятия предела, иррационального числа, неравенств, последовательных приближений в теории дифференциальных и интегральных уравнений и т. д. А. Н. Гливич

2161. Несколько размышлений о математике и философии. Леви (Algunas reflexiones sobre matematica y filosofia. Levi Beppo), Math. notae, 1955, **14**, № 3-4, 133—140 (исп.)

Автор ставит целью «воздвигнуть мост между двумя формами мышления» — естественнонаучным (оно же математическое, поскольку в наше время «почти все науки стремятся опереться на математическую символику») и философским. Различие между естествознанием и философией он видит в том, что в первом «мышление рассматривает преимущественно то, что находится вне нас», а во второй «оно направлено на то, что мы чувствуем внутри нас». Но даже это субъективно-идеалистическое различие автор считает «очень грубым». Взаимопроникновение обеих форм мышления, которое фактически имеется налицо, автор объясняет «прогрессирующей свободой, которую условия нашей гражданской жизни предоставляют человеку, чтобы он мог направлять свое мышление на абстракцию, несомненно более удобную, чем исследование природы в ее разнообразных и изменчивых формах». Доказать эти положения автор пытается ссылкой на историю математики, которая якобы с самого ее зарождения в Греции развивалась чисто абстрактно. Формирование математических теорий, начало которому было положено открытием несоизмеримых, представляется автору как «точка отделения между амплитудой человеческого мышления и границами, которые накладывают наши чувства на наше понимание природы», и как отправной пункт различия естественнонаучного (и математического) и философского мышления. Средние века и эпоха Возрождения в этом отношении не внесли ничего существенно нового. В последней четверти прошлого века наука выкристаллизовалась настолько, что ей в будущем не останется ничего, кроме некоторого расширения ее блестящих выводов. Что же касается математики, то она исчерпывается, по мнению автора, математической логикой и теорией множеств. Э. Кольман

2162. Некоторые философские аспекты науки. Бриджман (Some philosophical aspects of science. Bridgman P. W.), Synthese, s. a., **10**, 318—326 (англ.)

Современная наука, в отличие от классической, имеет возможность найти четкий признак, позволяющий отделить действительные проблемы от псевдопроблем. Основное значение в этом отношении приписывается операционалистскому подходу к понятиям, для которого значение вводимых понятий заключается в установлении соответствующей операции измерения. Поскольку измерение имеет приближенный характер, то, согласно автору, в науке не остается места для абсолютной истины. Ограничение точности в физике определяется характером изучаемых величин (заряд электрона, постоянная Планка, скорость света), известных с неопределенной точностью. Математика, с помощью которой описываются результаты физических измерений, не имеет свойства ограниченной точности, но способна к неограниченному уточнению; однако и ее истины имеют приближенный, а не абсолютный характер.

В противоположность платоновскому пониманию числа, приписывающему ему самостоятельную реальность, операционалистская точка зрения определяет число в терминах производящей его операции. Отсюда делается заключение о невозможности признания различных порядков бесконечности. Отбрасыванием трансфинитных чисел, «диагонального метода» и т. п. автоматически снимаются соответствующие парадоксы логики и теории множеств.

Указывается на значение «ступенчатого» подхода для операционализма. На одном уровне данные операции рассматриваются как начальные и неанализируемые, на другом же уровне — как нуждающиеся в анализе. Уровни операционного анализа некоторым образом соответствуют иерархии языка, использованной в логическом анализе Карнапа и других.

Отмечается родство математики и логики и то обстоятельство, что и логика, являющаяся определенной формой человеческой активности, разделяет с математикой возможность достигнуть лишь относительной точности. В силлогизме предполагается тождество среднего термина, однако опыт позволяет судить о тождестве лишь с некоторым приближением; в такой же мере ограничивается точность самого силлогизма.

Развиваемая в трудах автора философия операционализма неоднократно подвергалась критике в нашей философской литературе. Л. П. Гокиели

2163. Несколько замечаний о преходящем (временном) характере всякой аксиоматики. Дюге (Quelques remarques sur le caractère provisoire de toute axiomatique. Dugué Daniel), Dialectica, 1957, **11**, № 1—2, 148—153 (франц.; рез. нем., англ.)

Автор представляет аксиоматику как определение математической системы по отношению ко всем ее возможным расширениям (разветвлениям). Например, ввести постулат Евклида это значит определить евклидову геометрию по отношению ко всем ее расширениям, т. е. представить евклидову геометрию как часть более общей геометрии.

Под аксиомой он понимает произвольное (условное) соглашение в том смысле, что можно отказаться от этого соглашения, не противореча себе. Например, аксиому выбора (Цермело) можно принимать или не принимать. Совсем не очевидно в определенную эпоху, является ли данное выражение аксиомой или не является.

Всегда возможно обобщить систему и найти аксиомы, до сих пор скрытые, которые устанавливают разделение между старой доктриной и новой.

Совокупность расширений математической системы может быть бесконечной; отсюда следует, что не исключена возможность того, что в основе всякой математической системы находится бесконечное количество аксиом. Эта точка зрения иллюстрируется примерами, взятыми из геометрии. Она, как утверждает автор, не ведет к тому, что надо перестать интересоваться аксиоматикой; следует только признать, что ценность всякой аксиоматики относительна. А. Д. Гетманова

2164. Идеологический фон обоснования математики. Маннаури (The ideological background of the foundation of mathematics. Mannoury G.), Synthese, s. a., **10**, 315—317 (англ.)

Обычный язык квалифицируется как смешение двух терминологий: причинности и предмета («оно—язык») и цели и аффекта («я—язык»). Исходя из этой лингвистической двойственности, строится философская система, одним из выводов которой является деление проблем на эпистемологические и формальные. К числу эпистемологических проблем относится большинство контроверз, касающихся общих идей реальности, объективности, существования, психофизического параллелизма, происхождения жизни, свободы воли и т. д., а также касающихся обоснования математики как системы абстрактных и вечных истин. Проблемы, сводящиеся к тавтологиям, но без терминологической трансформации, являются формальными проблемами. Это—проблемы формализированной и аксиоматизированной математики и символической логики.

С современными быстрыми социальными и политическими изменениями связываются серьезные научные и эпистемологические кризисы (ломка точек зрения об общезначимости евклидовой геометрии, ньютоновой механики, аристотелевой логики); указывается, что отсутствие дистанции и перспективы мешает усмотреть соответствующие связи. Автор считает, что быстрое развитие многих современных методов исследования (логический эмпиризм, общая семантика, многозначная логика, кибернетика и т. д.) позволит в будущем лучше ориентироваться в положении.

Примечание референта. Философская позиция, занимаемая автором (в частности, усмотрение дуальности в языке), мешает ему найти правильное объяснение и характеристику связей, существующих между идеологическими и философскими установками и специальным научным исследованием, в частности в математике. Л. П. Гокиели

2165. Превосходство Аристотеля над Евклидом в методологии. Апосл (Methodological superiority of Aristotle over Euclid. Apostle H. G.), Philos. Sci., 1958, 25, № 2, 131—134 (англ.)

Автор указывает на отсутствие плана «от общего к частному» в расположении отдельных книг «Начал» и критикует определения, постулаты и теоремы «Начал». Он считает, что хотя Аристотель и не был математиком, он в этом отношении стоит выше Евклида. И. Н. Веселовский

2166. О «началах математики» как научной дисциплине. Гуссов В. В. Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 1955, вып. 44, 3—20

Выдвигается предложение о создании в системе математических наук новой дисциплины, объединяющей исследования в области оснований математики. Ее главная цель «заключается в том, чтобы служить связующим звеном между дедуктивными математическими теориями, развиваемыми чисто аксиоматически, и их применениями в широком смысле этого слова». Автор отделяет «начала» от истории математики и от математической логики. Их взаимоотношения с философией остаются неясными. В. И. Левин

2167. Некоторые основные вопросы измерения и графического изображения длины. І. Шпет (Einige Grundfragen des Messens und der bildlichen Darstellung von Meßwerten. I. Späth W.), Radex Rundschau, 1958, № 2, 82—91 (нем.; рез. англ., франц.)

Операция измерения сводится к отношению двух чисел, которое, в свою очередь, можно графически изобразить направленным лучом или некоторым углом. Это дает возможность числовую величину измерения заменить более удобной для вычисления угловой величиной.

При помощи опыта с вращающимся диском определено распределение свободно выбранных точек на числовой прямой. Это распределение несколько напоминает нормальный закон распределения Гаусса, но не совпадает с ним. Поэтому, при представлении длины через расстояние между точками на числовой прямой, нельзя избежать отклонений от истинной длины. Этих отклонений, вызванных внутренней структурой числового ряда, можно избежать, если вместо последовательности точек рассматривать перспективный пучок лучей и использовать проективную геометрию. Б. В. Пясковский

2168. Геометрическое построение алфавита. Долник, Куперман, Сандерсон (The geometrical construction of the alphabet. Dolnick Gene, Kuperman David, Sanderson Warren), School Sci. and Math., 1958, **58**, № 2, 119—124 (англ.)

Указаны способы построения заглавных букв латинского алфавита. Построение осуществляется с помощью комбинации простейших геометрических построений на плоскости. Предлагаемые способы, разумеется, не являются единственными, что и отмечено авторами.

А. А. Гусак

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

2169. Математические съезды и конференции в СССР. Лапко А. Ф., Люстерник Л. А., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 47—130

Авторы дают достаточно подробное описание математических съездов, конференций и совещаний, состоявшихся в СССР после Великой Октябрьской революции. На фоне этого описания дается обзор основных этапов развития советской математики за сорок лет. Такое понимание задачи статьи вполне соответствует точке зрения авторов на назначение съездов ученых, которое, по их словам, не исчерпывается заслушиванием докладов, но дает возможность математикам, работающим в разных городах, вести научные беседы и тем самым является источником новых научных исследований. Другой важной задачей конференций и съездов является то, что они дают общую картину состояния математики в целом или же отдельных ее частей на определенный период.

Попутно с характеристикой докладов и общей направленности отдельных съездов и конференций в статье подчеркиваются те принципиальные вопросы, на которые обращалось особое внимание. Большинство из этих вопросов не потеряли своей актуальности и в настоящее время: взаимоотношение между прикладной и теоретической математикой; значение методологических, синтезирующих работ; организация математических журналов и издание математической литературы; организация общесоюзного объединения математиков и др.

Статья не только рисует общую картину развития советской математики, но и вскрывает тесную связь этого роста с успехами социалистического строительства в стране. Библ. 62 назв. Б. В. Гнеденко

2170. Дидактический труд Евклида от его времен до наших дней. Фрайезе (L'opera didattica di Euclide dai suoi tempi ai nostri giorni. Frajese Attilio), Archimede, 1958, **10**, № 2-3, 130—135 (итал.)

Автор рисует судьбу «Начал» Евклида в средние века, в эпоху Возрождения, его критику Клеро и Лежандром, критические работы XIX в. (Лобачевский не упоминается) и восстановление Евклида в правах в итальянской школе (Бетти и Бриоски). Приводятся соображения об использовании «Начал» Евклида в современной школе. И. Н. Веселовский

2171. Бета, Гамма и Эпсилон—сокращенные имена трех древних математиков. Прелль (Beta, Gamma und Epsilon. Die Kurznahmen dreier Mathematiker des Altertums. Prell Heinrich), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1957—1958, **7**, № 1, 133—143 (нем.)

Три математика — Эратосфен, Аполлоний Пергский, Пифагор. Для Эратосфена автор отвергает обычное толкование «во всем второй» и считает, что «бета» представляет схематическое изображение его метода измерения окружности Земли (земной шар и стоящий на нем шар «скафиса» — прибора для измерения тени — рассеченный по вертикали). Равным образом «эпсилон» для Аполлония получается как левая половина диферента с эпициклом, введенных им для представления планетных движений. Под «гаммой» подразумевается Пифагор (изображение вертикального и горизонтального катетов прямоугольного треугольника для доказательства теоремы о квадрате гипотенузы). И. Н. Веселовский

2172. Некоторые замечания об алгебре Абу Камиля Шуя: объединение вавилонской и греческой алгебр. Леви (Some notes on the algebra of Abu Kamil Shuja': a fusion of babylonian and greek algebra. Levey Martin), Enseign. math., 1958, **4**, № 2, 77—92 (англ.)

Автор высоко оценивает организацию теоретических исследований в арабской математике, их связь с практикой и вклад арабов в формирование современной нам научной методологии. В виде примера рассматривается творчество одного из первых алгебраистов Абу Камиля (ок. 900 г.). Он использовал теорию греческих математиков, сохранив при этом конкретную базу алгебры Алхорезми. Затем автор сравнивает решения уравнения $x^2+21=10x$ у Евклида, Герона, Алхорезми и Абу Камиля. Абу Камиль при решении этого уравнения находит два значения для x^2:

$$x^2=\frac{10^2}{2}-21-\sqrt{\left(\frac{10^2}{2}\right)^2-10^2\cdot 21}=9,$$

$$x^2=\frac{10^2}{2}-21+\sqrt{\left(\frac{10^2}{2}\right)^2-10^2\cdot 21}=49.$$

Приводятся геометрические способы доказательства Абу Камиля, решение им уравнения $x^2+25=10x$ и правила сложения и вычитания радикалов, соответствующие формуле

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$$

Отмечается, что введение Абу Камилем иррациональных решений некоторых квадратных уравнений есть результат влияния X книги «Начал» Евклида. На творчество Абу Камиля оказали влияние традиции, восходящие как к вавилонским, так и к греческим источникам. Здесь как бы сливаются на более высоком уровне вавилонская и греческая математика. Абу Камиль в свою очередь оказал сильное влияние на творчество Алкархи и Леонардо Фибоначчи. А. Е. Раик

2173. Историческая заметка о возникновении теории вероятностей (Noticia histórica sobre los origenes del calculo de las probabilidades), Rev. mat., 1958, № 3, 50—63 (исп.)

Из руководства Бертрана и Паскье приведены подробные изложения работ Галилея, Паскаля, Ферма, Бернулли, Монмора, Лагранжа и Лапласа. И. Я. Депман

2174. Николо Тарталья. Монтаньяна (Nicolò Tartaglia. Quattro secoli dopo la sua morte. Montagnana Massimo), Archimede, 1958, **10**, № 2-3, 135—139 (итал.)

Обзор жизни и трудов Тартальи в связи с 400-летием со дня его смерти. В сносках дается библиография источников о Тарталье и его эпохе. И. Я. Депман

2175. «Математические начала» Ньютона (I principia mathematica di Newton), Civiltà macchine, 1956, **4**, № 4, 69—77, 84 (итал.; рез. англ.)

Очерк об открытии Ньютоном всемирного тяготения в 1687 г. и об его подтверждениях: предсказание появления кометы Галлея (Клеро, 1758), открытие Нептуна (Галле, 1846, на основании вычислений Леверье и Адамса), наблюдения взаимного притяжения свинцовых масс (Кавендиш, 1798). Самым важным подтверждением за-

конов Ньютона автор считает ожидаемый в то время запуск искусственных спутников. Система Ньютона была дополнена в XIX в. работами Фарадея и Максвелла, увязавшими с нею явления магнетизма и электричества. К концу XIX в. казалось, что система Ньютона охватывает все явления физического мира. Однако явления, связанные с распространением света и движения частиц со скоростями, близкими к скорости света, в начале XX в. обнаружили недостаточность и ограниченность системы Ньютона и в нее были введены теория относительности и квант, ставшие наследниками «Начал» Ньютона.

Примечание референта. Неверно употребляется (в статье и резюме) имя Галл вместо Галле.

И. Я. Депман

2176. **Новое издание сочинений Бернулли. Труселл** (The new Bernoulli edition. Truesdell C.), Isis, 1958, **49**, № 1, 54—62 (англ.)

Статья посвящена выходу первого тома собрания сочинений математиков Бернулли: Якоба I (1654—1705), Николая I (1687—1758), Иоганна I (1667—1748), его сыновей: Николая II (1695—1726), Даниила (1700—1782), Иоганна II (1710—1790) и сыновей последнего: Иоганна III (1744—1807) и Якоба II (1759—1789).

Тот факт, что реферативные журналы США (несмотря на то, что в библиотеках этой страны нет ни одной статьи или книги ни одного Бернулли) ограничились лишь беглыми замечаниями об этом издании, побудил автора более подробно рассказать о нем и привлечь к нему внимание читателей.

Для этого издания собраны: письма, записные книжки, неопубликованные рукописи математиков Бернулли, печатные работы Николая I и II, Иоганна II и III, Якоба II, а также литературное наследие Якоба Германа, ученика Якоба I.

Планируемое издание будет состоять из 20—25 томов по 700 печатных страниц каждый и разделено на 3 серии: I—корреспонденция Иоганна I в шести томах; письма Даниила, Иоганна II, Николая I в трех томах (по одному тому, соответственно). II—избранные труды Николая I и Николая II, а также два тома писем и работ Германа. III—труды Даниила, Иоганна II и его сыновей в трех томах. Последний том будет содержать биографии, указатель и т. д. Вышел в свет первый том первой серии (РЖМат, 1956, 4278 К).

Автор уделяет много внимания переписке Иоганна I и Лопиталя, снабженной специальным предисловием главного редактора и содержащей 87 писем за период с декабря 1692 г. по 1707 г. (этим годом датировано письмо вдовы Лопиталя). В статье приводятся выдержки из письма Лопиталя от 17 марта 1694 г. (письмо № 20), где Лопиталь предлагает Иоганну Бернулли заключить соответствующий договор, по которому он будет высылать определенную сумму, начиная с января 1694 г., а Бернулли ему—все свои научные открытия, причем последние не должны сообщаться никому другому. Непосредственный ответ Бернулли на это письмо не сохранился, но из последующих писем видно, что условия Лопиталя были приняты. Это финансовое соглашение утратило силу с момента выхода в свет «Анализа бесконечно малых», так как Лопиталь не выполнил своего обещания держать в секрете сообщения Бернулли и никогда их не публиковать.

Примечание референта. Имеются неточности в датах: в статье указано, что сочинения Иоганна I Бернулли изданы в 1743 г., правильно—1742 г.; годом рождения Якоба I назван 1655 г., а нужно 1654 г. А. А. Гусак

2177. **Паскаль, Порт-Руайяль и элементарная геометрия. Итар** (Pascal. Port—Royal et la géométrie élémentaire. Itard Jean), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1958, **37**, № 192, 328—330 (франц.)

В 1667 г. во Франции вышла в свет книга Антуана Арно «Новые начала геометрии», явившаяся прототипом многих работ по элементарной геометрии, появившихся во Франции в XVIII в. В основе этой книги лежат идеи, изложенные Паскалем в беседе с Арно, что доказывает заметка, найденная в бумагах Лейбница и озаглавленная: «Extrait d'un fragment de l'introduction à la géometrie de Mons. Pascal». Ю. С. Цапин

2178. **История вспомогательных средств вычисления. I. От ночи времен до зари вычислительных машин. Мондини** (Storia dei mezzi di calcolo. I. Dalla notte dei tempi all'aurora delle calcolatrici. Mondini Alberto), Idee e sist., 1958, № 24-25, 7—8, 19 (итал.)

Популярный очерк вспомогательных средств вычисления от абака до счетной машины Лейбница. Приводятся рисунки математического циркуля Галилея, китайского суанпана, счетных машин Паскаля и Лейбница.

И. Н. Веселовский

2179. **От Пифагора до Тейлора и настоящего времени** (From Pythagoras to Taylor to today), Math. Student J., 1958, **5**, № 1, 1—4 (англ.)

Очерк начал теории фигурных чисел, конечных разностей и интерполяционных формул. Рекомендуется вниманию авторов книг типа «Математическая смекалка».

И. Н. Веселовский

2180. **Представления о законе больших чисел в русской теоретико-статистической литературе. Дружинин Н. К.**, Научн. тр. Моск. экон. ин-та, 1957, вып. 5, 104—122

Излагается история освещения философского содержания закона больших чисел в русской теоретико-статистической литературе дореволюционного периода. Отмечается, что субъективистское понимание категории вероятности соединялось у русских статистиков второй половины XIX в. с представлением о законе больших чисел как форме проявления объективных закономерностей действительности. Математическая сторона вопроса в очерке не рассматривается. Л. Н. Большев

2181. **К истории признания идей Лобачевского в России.** Природа, 1955, № 9, 127

См. также РЖМат, 1956, 947.

2182. **Математическая школа в Яссах. Крянгэ** (Die mathematische Schule in Jassy. Creanga Jon), Wiss. Z. E. M. Arndt-Univ. Geifswald, 1956—1957, **6**, № 3-4, 141—143 (нем.)

Подготовка кадров математиков в Яссах началась с 1860 г., когда был открыт университет. Математическая научная школа складывается с 1910 г. в основном как геометрическая. Автор распределяет исследования и интересы ясских геометров на 7 групп: 1) различные проблемы классической дифференциальной геометрии; 2) работы, написанные в связи с параллелизмом в смысле Леви-Чивита; 3) геометрии с заданной основной группой; 4) сети на поверхностях и многообразиях; 5) проблемы отображения поверхностей, пространств и многообразий; 6) проективно-дифференциальная геометрия; 7) исследования, связанные с применением метода внешних форм Картана.

Кроме того, отмечены имеющиеся в значительно меньшем числе работы ясских математиков по алгебре, теории дифференциальных уравнений, теории чисел и теории функций. А. Н. Гливич

2183. **К вопросу о возникновении современного знака радикала. Ефимов В. П.**, Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та 1957, **7**, 197—208

Излагается гипотеза, согласно которой знак радикала возник из точки, служившей первоначально для его обозначения. Основанием для такого взгляда послужили четыре рукописи: 1) Латинская рукопись 1481 г. (из Дрезденского собрания математических рукописей); 2) Венская рукопись (Regule-Cose-uel Algebre, около 1500 г.); 3) рукопись Initius Algebra (около 1524 г.); 4) рукопись «Косс» Адама Ризе (1492—1559).

Приводятся фотокопии соответствующих мест некоторых из этих рукописей и других сочинений. Как и отме-

чено автором, эту точку зрения, высказанную в русской учебной литературе еще в начале XX в., принимают не все историки математики.

Примечание референта. Автор неточно цитирует (стр. 200) книгу: Tropfke J., Geschichte der elementar—Mathematik, Bd. 3, Leipzig, 1937, 222. А. А. Гусак

2184. Мина Спигель Рис. Тейлор (Mina Spiegel Rees. Taylor Mildred E.), Pi Mu Epsilon J., 1954, **1**, № 10, 395—399 (англ.)

Краткое описание научной и организационной деятельности одной из руководительниц математического отдела научных исследований морского ведомства США в период 1946—1953 гг. Дата рождения не указана.

Б. В. Гнеденко

2185. Софи Жермен (1776—1831), Симонар (Sophie Germain (1776—1831). Simonart Fernand), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 12, 942—957 (франц.)

Очерк о французской женщине-математике конца XVIII—начала XIX в., работавшей в области теории чисел, геометрии, уравнений в частных производных. Во введении приводятся сведения о других женщинах-математиках: Гипатия (370—415), М. Аньези (1718—1799), С. В. Ковалевская (1850—1891), Э. Нётер (1883—1935).

Софи Жермен—наименее известная из них. Однако ее работы высоко ценились Лежандром, Фурье, Гауссом. Несмотря на то, что женщины не принимались в Политехническую школу, она добыла конспекты лекций и принимала участие в письменных упражнениях под псевдонимом Леблан.

В связи с выходом в свет в 1789 г. «Очерка по теории чисел» Лежандра между последним и С. Жермен установилась постоянная научная переписка. Сам Лежандр во втором издании «Очерка» отмечал, что ее замечания были очень полезны. После изучения книги «Disquisitions arithmeticae», вышедшей в 1801 г., С. Жермен послала Гауссу два доказательства, обобщающих одну из его теорем. В 1816 г. Парижская Академия наук присудила С. Жермен премию за «Мемуар о колебаниях упругих поверхностей». Ю. С. Цапин

2186. Анри Альфен. Хадраке (Henri Halphen. Jadraque V. Martin), Gac. mat., 1958, **10**, № 1-2, 3—5 (исп.)

Анри Альфен охарактеризован как математик, углубляющий и систематизирующий уже полученные знания и доводящий их до совершенства. Родился в Рудне 30 октября 1844 г. В 1862 г. поступил в Политехническую школу, из которой вышел через два года с чином сублейтенанта артиллерии. К 1869 г. относится его первая работа об алгебраических кривых. Война 1870 г., в которой он принимал деятельное участие, помешала продолжению его работ. В 1872 г. начинает работать в Политехнической школе (доказательство общего закона Шаля относительно числа конических сечений, удовлетворяющих заданному условию, задача «теории характеристик»). В 1880 и 1882 гг. получает премии Парижской академии, одновременно возвращается к военной службе (артиллерия). Последняя работа — «Теория эллиптических функций». Умер в апреле 1884 г.

И. Н. Веселовский

2187. Улиссе Дини (Ulisse Dini), Archimede, 1957, **9**, № 6, 263—266 (итал.)

Статья из серии «Знаменитые математики современной Италии», публикуемой на страницах журнала Archimede. После краткой биографии Дини (1845—1918) приводится большая выдержка из речи Луиджи Бьянки, произнесенной в 1922 г. в память Дини. Речь содержит более подробное изложение научной деятельности Дини и характеристику его основных трудов. В. И. Левин

2188. Фредгольм. Лабрадор (Fredholm. Labrador J. F.), Gac. mat., 1957, **9**, № 8, 217—220 (исп.)

Очерк жизни и трудов Фредгольма (1866—1927), одного из творцов теории интегральных уравнений. Ученик Миттаг—Лефлера, профессор Стокгольмского университета, лауреат премии Понселе Парижской академии, член Стокгольмской академии наук, Фредгольм был талантливым конструктором (машина для точного вычерчивания интегральных кривых, построение музыкальных инструментов). Библ. 18 назв. И. Я. Депман

2189. Вито Вольтерра (Vito Volterra), Archimede, 1958, **10**, № 1, 29—32 (итал.)

Биография и краткий перечень научных достижений Вольтерры (1860—1940): функционал, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения в применении к изучению колебаний полюса, гистерезиса и др.

И. Я. Депман

2190. Проф. Тадеуш Банахевич. Воспоминания. Колачек (Prof. dr. Tadeusz Banachiewicz. Wspomnienie pośmiertne. Kolaczek Barbara), Zesz. nauk. Politechn. warsz., 1956, № 20, 99—102 (польск.)

2191 Н. Чорэнеску. Некролог. Думитреску (N. Ciorănescu. Necrolog. Dumitrescu D. — Lista lucrărilor stiintifice publicate.), Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1957, **19**, № 1-2, 389—393 (рум.)

4 апреля 1957 г. умер профессор Бухарестского политехнического института Н. Чорэнеску. Им было опубликовано около 100 работ, которые в настоящем некрологе сгруппированы по темам: дифференциальные уравнения, обыкновенные и в частных производных; интегральные и функциональные уравнения; обобщения понятий производной и интеграла; алгебраические уравнения, многочлены и ряды; теория аналитических функций; механика непрерывных систем. А. Н. Гливич

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

2192. Вопросы преподавания математики на XIX Международной конференции в Женеве. Маркушевич А. И., Матем. просвещение, вып. I, 1957, 9—15

Краткий очерк истории конференций и отчет о ходе XIX конференции (см. также РЖМат, 1957, 6080; 1958, 1742, 1743, 3477). Излагаются тезисы выступления директора БИЕ (Международного бюро по просвещению) психолога Пьяже, имеющие отношение к преподаванию математики. Статья содержит также сведения о подготовке рекомендаций конференции, в частности рекомендации, относящейся к преподаванию математики в средних школах, и краткую характеристику этой рекомендации с анализом ее основных положений. В. И. Левин

2193. О преподавании математики в советской средней школе. Вейс (Über den Mathematikunterricht in der sowjetischen Mittelschule. Weiß Horst), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, № 6, 294—300 (нем.)

Цель статьи — познакомить читателей с работой советских педагогов над учебным планом средней школы, где проводится политехническое обучение, чтобы привлечь их к использованию ценного опыта.

Особо отмечается новая установка школы — подготовка учащихся к практической деятельности и акцентируются:

а) включение в учебный план практических занятий уже в I—IV классах; а в последующих классах — тенденция к производственному обучению;

б) с V класса начинается предметное преподавание. Вообще особенностью русской школы является выделение отдельных предметов — арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии;

в) в арифметике большое внимание уделяется изучению пропорциональности величин, рассматриваются диаграммы и графики прямой. Проценты служат поводом для углубления знаний в области изучения дробных чисел;

г) в курсе алгебры выделяются темы: «положительные, отрицательные числа», неравенства и т. п.;

д) в геометрии отмечаются вопросы подобных преобразований и практика изготовления наглядных пособий;

е) отмечается, что тригонометрия начинается уже в VIII классе, а затем систематический курс вводится в IX классе и продолжается в X; тригонометрическим уравнениям уделяется ограниченное внимание.

В заключение приводится таблица сетки распределения часов по предметам и классам. П. Я. Дорф

2194. Некоторые мысли о социалистическом воспитании в обучении счету и математике. Ридель (Einige Gedanken über die sozialistische Erziehung im Rechen- und Mathematikunterricht. Riedel Johannes), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, № 4, 185—189 (нем.)

Речь идет об идейно-воспитательной роли, какую может и должно играть преподавание математических дисциплин в школе. Автор снабдил статью примерами из жизни, из практики преподавания арифметики, алгебры, геометрии, а также литературными ссылками.

Е. Я. Р.

2195. О практической подготовке учителей математики. Благовещенский Н., Народное образование, 1958, № 4, 50—53

Цель статьи — привлечь внимание общественности к недостаткам в практической подготовке студентов педагогических вузов. Автор перечисляет ряд серьезных недостатков и считает, что выпускники пединститутов не владеют навыками самостоятельного творческого решения методических вопросов. Причинами такого положения он называет: отсутствие пособий по практическим занятиям студентов, недостаточное внимание к улучшению учебников и задачников школы.

Примечание референта. Аргументация автора крайне недостаточна. П. Я. Дорф

2196. Критический обзор программ по геометрии советского периода с точки зрения идеи геометрического преобразования. Зельцман В. Б., Уч. зап. Кишиневск. гос. пед. ин-та, 1957, **9**, 47—62

Автор приходит к выводу, что в программы средней школы по геометрии как в настоящее время, так и в прошлом, недостаточно внедряются передовые идеи этой науки. Он считает неправильным, что в части геометрических преобразований в настоящее время в программу входят только симметрия, гомотетия и подобие и не входят параллельное перенесение и вращение. В статье содержится призыв к широкому внедрению идеи геометрического преобразования в практику преподавания.

К. А. Рыбников

2197. Историзм в преподавании математики. Глейзер (Историзмул ла лекциile де математикэ. Глейзер Г.), Ынвэцэторул советик, 1958, № 5, 51—56 (молд.)

Автор предлагает на уроках математики в средних школах вводить элементы истории математики. Останавливается подробно на введении этих элементов в 5-м классе. А. Н. Гливич

2198. Математические журналы для учащихся средней школы. Гайдук Ю. М., Матем. в школе, 1958, № 2, 71—76

Сведения о физико-математических журналах, издающихся в Чехословакии, Румынии и Венгрии для учеников средней школы и самообразования. Обзор содержания этих журналов за первую половину 1957 г.

Примечание референта. В статье указано, что румынский физико-математический журнал для молодежи существует 8 лет. Но следует иметь в виду, что еще с 1934 г. редакция журнала «Gazeta matematică» начала издавать для молодежи приложение в виде отдельных номеров. В 1949 г. это приложение только получило новое название: «Gazeta matematica si fizica, seria B». А. Н. Гливич

2199. Изучение этимологии математических терминов. Малкрон (Teaching the etymology of mathematical terms. Mulcrone T. F.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 3, 184—190 (англ.)

Систематическое ознакомление учащихся с этимологией математических терминов может способствовать лучшему усвоению и запоминанию математических понятий, а также сближению в сознании учащихся математики с другими областями. Особенно полезно обращать внимание на те случаи, когда части математических терминов (корни или флексии) уже знакомы из обыденной речи (кардиоида—кардиограмма, эллипсоид—целлюлоид, уникурсальный—универсальный). Приведена этимология ряда математических терминов греческого или латинского происхождения.

Автор рекомендует также информировать учащихся о происхождении, несовершенствах терминов и об исторически неоправданных наименованиях («формула Кардано», «прямая Симпсона»). Библ. 6 назв.

Ю. М. Гайдук

2200. Разрыв между высшим и средним образованием в Германии. Бенке (La tension entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Allemagne. Behnke Henri), Enseign. math., 1957, **3**, № 4, 237—250 (франц.)

Критика существующего порядка подготовки преподавателей математики в Германии. В то время как в средней школе преподавание ведется, из-за перегруженности программы, нестрого, на основе интуиции, в высшей школе математика излагается аксиоматически, со строгим доказательством всех положений. Поэтому студентам очень трудно привыкнуть к университетскому преподаванию, а выпускники университетов не способны работать преподавателями в средней школе.

Кроме того, при такой постановке образования большая часть знаний, полученных в университете, остается бесполезной. Автор ставит вопрос о сближении методов преподавания математики в средней и высшей школе.

Ю. С. Цапин

2201. О некоторых математических терминах. Холингер (Despre unii termeni matematici. Hollinger A.), Gaz. mat. si fiz., 1958, **A10**, № 3, 174—177 (рум.; рез. русск., франц.)

Существуют математические термины, смысл которых определяется некоторыми преподавателями в средней школе неточно. К таким терминам автор относит: арифметические числа, относительные числа, абсолютное значение числа, значение дроби, понятие поверхности или площади. Для этих терминов приводятся необходимые разъяснения. А. Н. Гливич

2202. Понятие эквивалентности и его значение в математике. Николеску (Noţiunea de echivalenţă şi importanţa ei în matematică. Nicolescu M.), Gaz. mat. si fiz., 1956, **A8**, № 7, 337—345 (рум.)

Доклад, прочитанный школьникам, принимавшим участие в олимпиаде по математике и физике в 1956 г. Приведены примеры различных разделов арифметики, геометрии, алгебры, теории чисел, анализа, в которых используется понятие эквивалентности. Н. М. Остиану

2203. Некоторые сведения о французской школе и о преподавании в ней математики. Маркушевич А. И., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 247—252

Статья содержит данные о структуре французской средней школы по годам обучения; программу по математике во французских средних школах; примерные задачи, предлагавшиеся на экзаменах в старших классах, а также на конкурсных экзаменах при поступлении в высшие учебные заведения Франции. А. Н. Гливич

2204. Преподавание математики в Италии молодым людям от 16 до 21 года. Вилла (L'enseignement des mathématiques en Italie pour les jeunes gens de 16 à

21 ans. Villa Mario), Enseign. math., 1956, 2, № 1-2, 172—184 (франц.)

Доклад, прочитанный 4 сентября 1954 г. в Амстердаме на Международном конгрессе математиков.

Состоит из двух параграфов: § 1 посвящен организации образования в Италии вообще; в § 2 рассказывается о преподавании математики в средней школе, лицеях и институтах.

Преподавание математики в средней школе разбивается на два цикла. Первый цикл — три года в средней школе (от 10 до 13 лет). В этот период преподавание основано на интуиции и опыте, хотя не исключаются доказательства некоторых неочевидных правил. Второй цикл средней школы — гимназия, где алгебра и геометрия излагаются с указанием основных постулатов и строгим доказательством всех утверждений. Приводятся программы по математике для лицеев и средних специальных учебных заведений. Ю. С. Цапин

2205. Дидактика математики. Библиографическое исследование. Чивес (La didattica della matematica. Studio bibliografico. Cives Giacomo), Period. mat., 1958, **36**, № 2, 65—75 (итал.)

Отмечается, что во всех странах растет сознание недостаточности математической подготовки оканчивающих общеобязательную школу. Автор присоединяется к взглядам Эйнштейна, что школа, в том числе и специальная техническая, должна прежде всего в учащемся развивать способность мышления. По его мнению, английская школа более других приближается к этому идеалу. Возражая против привилегий классического образования в Италии, автор приводит различные проекты реорганизации общеобразовательной школы. И. Я. Депман

2206. Значение [слов] и обучение математике. Гёрсен (Significs and mathematical teaching. Geursen S. J.), Synthese, s. a., **10**, 146—147 (англ.)

В Голландии дети в возрасте около 12 лет начинают изучение геометрии в евклидовом аксиоматическом изложении. При этом употребляются слова, часто совпадающие со словами обыденной речи, но имеющие специфический смысл. Это создает лишние трудности. По примеру Англии и Бельгии в последние годы появились учебники, включающие подготовительные разделы, вводящие постепенно учащегося в понятия и язык евклидовой геометрии. И. Я. Депман

2207. Экзаменационные требования в скандинавской средней школе (High school examinations in Scandinavia), Math. Teacher, 1957, **50**, № 8, 586—588 (англ.)

Приводятся 3 вопроса на выпускных экзаменах, охватывающих свойства корней кубического уравнения, нахождение максимума в сложной стереометрической задаче и свойства поляр эллипса. Задачи подтверждают мнение о высоком уровне преподавания математики в скандинавских школах. И. Я. Депман

2208. Замечания о преподавании математики в Соединенных Штатах. Гаттеньо (Observations on the teaching of mathematics in the United States. Gattegno Caleb), Math. Teacher, 1958, **51**, № 3, 194—196 (англ.)

Критические замечания бывшего секретаря Международной комиссии по изучению и улучшению преподавания математики.

Автор подчеркивает следующие отрицательные явления: 1) Методическая активность учителей сковывается укоренившимся в США недоверием к профессиональному умению преподавателей математики (отсюда вредная практика использования учителями на уроках «ключей к учебникам» и подобных пособий). 2) Американские методисты-математики страдают «некоторым самодовольством» и руководствуются скорее мнениями модных педагогических авторитетов, чем данными серьезного исследования. Исследования статистического характера оказались мало плодотворными. 3) Для США характерно узкое понимание задачи реформы преподавания математики в школе. Американцы ограничиваются двумя основными требованиями: включить элементы современной математики в программы старших классов полной средней школы и ослабить в младших классах засилие так называемой «социальной арифметики», усилив там изучение математики как таковой. Эта ограниченность объясняется, по мнению автора, недооценкой американцами способностей детского возраста к восприятию (изложенных «неформально») фундаментальных идей (структур) современной математики и их стремлением ввести в преподавание эти идеи в строго логической форме. 4) Преподавание математики ведется скорее в стиле «обучения», чем «изучения»— недостаточно используется и стимулируется творческая активность учащихся. Ю. М. Гайдук

2209. Факты, фантазии, выдумки и расчеты. Арендт (Facts, fancy, fabrications, and figures. Ahrendt M. H.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 236—239 (англ.)

В связи с критикой состояния преподавания математики в США исполнительный секретарь Национального совета учителей математики сообщает статистические данные, собранные официальными и общественными органами.

Особо отмечается недостаточность контингентов учащихся старших классов средней школы, изучающих математику. (В США в X—XII классах математика изучается «по свободному выбору» учащихся. — *Реф.*).

Приведены также сведения об острой нехватке в США преподавателей математики необходимой квалификации; выпуск таких преподавателей колледжами за последние годы едва покрывал одну треть потребности. В качестве задачи национального значения указывается необходимость дальнейшего увеличения контингентов учащихся в высшей школе и расширения подготовки научных работников. Ю. М. Гайдук

2210. Математический барьер в Америке (The mathematical barrier in America) Brit. Communs and Electronics, 1958, **5**, № 6, 446 (англ.)

Барьером, препятствующим подготовке инженеров в Америке, является недостаточное знание математики поступающими в вузы. Правительственной комиссией разработаны новые программы средней школы, характерными чертами которых являются: 1) раннее ознакомление с основными математическими идеями, притом конкретно, а не на словах; 2) исключение ряда вопросов прежней программы и добавление новых. Исключается решение тригонометрических задач при помощи логарифмических таблиц, вместо 100 с лишним евклидовых теорем оставляется только 12, в качестве образцов для показа способов вывода теорем из аксиом. В основу обучения алгебре кладется понятие множества чисел, дающее естественный переход к геометрии. Дедуктивному рассуждению ученик учится в алгебре, и поэтому евклидовы доказательства в большинстве случаев заменяются более прямыми, предоставляя учащемуся применять или евклидовский, или иной подход.

В последнем классе признается желательным проходить теорию вероятностей с элементами статистики и введение в анализ.

Наряду с этим проектом предлагаются более коренные изменения. В Иллинойсе осуществляется план проф. Бибермана, строящий школьный курс на обобщениях абстрактных основных понятий (реф. 2225). Этот план отвергается работниками Иллинойского университета, требующими введения новых понятий на конкретном и наглядном материале. По словам автора абстрактный подход находит больше приверженцев. Общий вывод: преподавание математики в средней школе в течение последних лет является основной проблемой подготовки ученых и инженеров, и общественное мнение настаивает на его улучшении. И. Я. Депман

2211. Математики на рынке. Рис (Mathematicians in the market place. Rees Mina), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 332—343 (англ.)

Предмет статьи: характеристика возросшей потребности США в математиках для работы в промышленности, различных научно-исследовательских и государственных учреждениях, а также неудовлетворительного состояния подготовки математических кадров.

Чтобы улучшить положение, автор предлагает: 1) изменить программу обучения в университетах и колледжах с учетом возросших требований к специальной математической подготовке, учесть положительный опыт подготовки кадров в Англии и Советском Союзе, где вопросам прикладной математики уделяется большое внимание; 2) организовать при научно-исследовательских, вычислительных, статистических и учебных центрах специальные курсы — интернаты для студентов, аспирантов и других специалистов; 3) расширить работу семинаров и научно-исследовательских кружков; 4) организовать посещение профессорами и студентами промышленных лабораторий и научно-исследовательских центров и посещение учебных заведений математиками-практиками; 5) организовать переподготовку кадров на местах фирмами и предпринимателями; 6) активизировать работу Математической ассоциации и Общества прикладной математики, а также увеличить печатание работ по прикладной математике; 7) улучшить сотрудничество «академических» математиков с математиками-практиками, устранить имеющуюся недооценку математиков-практиков, повысить заработную плату математикам, работающим в высшей школе, до уровня заработной платы, получаемой математиками на производстве. Б. В. Пясковский

2212. Математика в системе общего образования. Брайан (Mathematics in general education. Bryan John C.), School Sci. and Math., 1958, **58**, № 4, 249—255 (англ.)

Доклад, представленный Ассоциации учителей математики и естествознания. Автор ссылается на требование президента США изучить вопрос об улучшении работы школы и на многочисленные статьи, требующие перестройки школы на «русский образец». Под этим понимается требование, чтобы существовала общая программа для основных предметов школы взамен нынешнего положения, когда в высшей школе проходится материал, не изученный частью студентов вследствие свободного выбора предметов в средней школе. Педагогические требования автора учитывают особенности нашей педагогики: жизненность материала по математике, исключение из программы некоторых вопросов, держащихся в ней по инерции, введение исторического элемента, некоторых идей проективной и неевклидовой геометрии. Автор признает, что американская школа в состоянии давать требуемое жизнью число техников, но не способна сейчас дать миру Эйнштейнов, Стейнметцов, Гауссов. Она не приучает своих питомцев думать, накапливать широкие знания и не воспитывает стремления знать как можно больше. И. Я. Депман

2213. Пример «практических приложений» при изучении математики на первом курсе университета. Дейвис («Applications» in freshman courses: an example. Davis Robert L.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 276—279 (англ.)

Рассматривается вопрос о применении основных понятий теории множеств и теории игр к решению некоторых задач на нахождение показателя силы влияния на принятие решения (в другом примере это же число является показателем возможности выигрыша).

2214. Улучшение обучения естественным наукам и математике в школах. Андерсон (Improving secondary-school teaching in science and mathematics. Extract from a paper. Anderson Donald B.), Civil Engng, 1958, **28**, № 4, 58—59 (англ.)

Указав на серьезные проблемы в области образования (обучение молодых людей естественным наукам и технике, недостаток квалифицированных преподавателей, улучшение качества преподавания), автор предлагает (по его словам, разностороннюю) программу улучшения преподавания естественных наук в школе. Программа предусматривает:

1) непродолжительные командировки ученых по линии профессиональных научных обществ (математического, физического, химического, биологического) в колледжи и школы для организации на местах семинаров, конференций, публичных лекций;

2) подготовку лекторов по определенным циклам при видных научных учреждениях (к примеру, при институте ядерных исследований) из числа преподавателей школ;

3) организацию летних курсов на период в 6—8 недель для повышения квалификации преподавателей;

4) организацию годичных курсов с той же целью.

Предусматривается также пересмотр школьных программ и создание соответствующих учебников. Считается необходимым изучение специалистами одного из видных университетов учебников математики средних школ СССР и Польши и последующего ознакомления преподавателей со всем новым, ценным и оригинальным. А. А. Гусак

2215. Как рождаются математические тесты. Эпстейн, Майерс (How a mathematics test is born. Epstein Marion, Myers Sheldon), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 299—302 (англ.)

Описывается процесс создания тестов по математике для американской средней школы. Тесты составляются специальным комитетом по проведению испытаний. Составлению тестов предшествует большая подготовительная работа: определяется цель каждого испытания, выделяются главные темы, составляются отдельные вопросы. Когда бывает составлено более тысячи вопросов, проводится экспериментальная проверка. Только после анализа результатов этой проверки тесты отрабатываются окончательно и рассылаются по школам.

После проведения испытаний в школах делается анализ результатов этих испытаний, которые учитываются при составлении дальнейших тестов. Е. В. Вандышева

2216. Научные исследования студентов-выпускников по математике. Мей (Undergraduate research in mathematics. May Kenneth), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 241—246 (англ.)

Освещен опыт кафедры математики Карлтонского колледжа (США) в организации научных занятий студентов по математике. Работа эта ведется второй год по специальной программе, субсидируемой Национальным фондом науки и рассчитанной на 4 года.

В колледже математика не является обязательным учебным предметом; однако более 50% студентов I курса слушают элементарный курс математики и около половины из них изучают дополнительные математические дисциплины. Многие из студентов-отличников затем специализируются по точным наукам.

Около 10% студентов первого курса были, на добровольных началах, отобраны для занятий в специальном математическом отделении. Учебный план этого отделения предусматривает более быстрое (в течение трех семестров вместо четырех) прохождение математической программы (состоящей из введения в логику, теорию множеств и другие фундаментальные идеи современной математики). Второй семестр II курса посвящается «проектам» (курсовым работам).

На отделении практикуются: самостоятельный выбор студентами задач для решения, отчеты учащихся перед классом о своих лучших решениях, совместная работа нескольких студентов над трудным вопросом, частые консультации. Экзаменационные работы включают также трудные и нетипичные задачи на выбор.

2217. Какие имеются недостатки в школьном курсе математики. Рид (What's wrong with mathematics. Read Cecil B.), School. Sci. and Math., 1958, 58, № 3, 181—186 (англ.)

Систематизированная подборка критических замечаний различных авторов относительно содержания и методики преподавания математики в американской средней школе. Например: 1) в школьном курсе математики все еще содержится материал, который устарел и не имеет применения; он должен быть заменен новым; 2) учащиеся бывают перегружены множеством деталей, не приводящих ни к большим идеям, ни к оригинальным мыслям; 3) занимаясь математикой, учащиеся не чувствуют, что они изучают нечто нужное, а не просто занимаются гимнастикой ума; 4) имеется большое отставание школьного курса математики от развития математической науки.

В заключение указывается, что все замечания, приведенные в данной статье, взяты из специальных математических и естественно-научных журналов, вышедших в 1917—1932 гг., и что аналогичные замечания можно встретить и в настоящее время, во всяком случае не позднее двух лет тому назад. А это позволяет сделать неутешительный вывод о «прогрессе» в проведении реформы средней школы. Е. В. Вандышева

2218. Об организации отдела математики в младшей средней школе Монтебелло. Вулф (Organizing the mathematics department in the Montebello Junior High School. Wolfe Raphael W.), Math. Teacher, 1958, 51, № 4, 287—291 (англ.)

Автор ставит целью наметить пути улучшения преподавания математики на примере неполной средней школы г. Монтебелло (Калифорния), насчитывающей более 1500 учеников. Автор отмечает следующие существенные недостатки: 1) работа преподавателей не согласована; 2) административные работники перегружены, не контролируют работу преподавателей математики; 3) многие преподаватели не имеют необходимых знаний; 4) в 8-х и 9-х параллельных классах преподаватели рекомендуют различные учебники; 5) опытные преподаватели не имеют возможности передавать свой опыт малоопытным и др.

Для устранения этих недостатков автор считает необходимым организовать отдел математики (вроде наших предметных комиссий), во главе поставить опытного преподавателя, уменьшить его учебную нагрузку и назначить дополнительную зарплату. Далее автор излагает предложения о формах и методах работы отдела математики и его руководителя. В их числе: посещение занятий, организация показательных лекций, обсуждение вопросов, связанных с учебным планом, обеспечение занятий наглядными и учебными пособиями, связь с другими школами, распространение передового опыта и т. д. Г. Б. Петросян

2219. Главные цели изучения математики. Брендан (Ranking objectives in mathematics. Brendan Brother T.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 5, 333—337 (англ.)

Рассматриваются основные цели изучения математики в средней школе. Выделяется пять таких целей: 1) дать учащимся определенную сумму знаний; 2) научить основным методам элементарной математики, в том числе технике вычислений, навыкам решения задач и т. п.; 3) служить материалом для умственной гимнастики; 4) помочь учащимся в усвоении других учебных предметов, например физики; 5) способствовать повышению общей культуры учащихся. Дается краткая характеристика каждой из указанных целей.

Далее отмечается, что, кроме перечисленных общих целей, преподавание каждой математической дисциплины — арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии — имеет свои особые цели и дается характеристика их с этой точки зрения.

В заключение упоминается также о значении таких предметов, как математическая статистика, теория чисел, теория рядов, теория вероятности, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление и др. Е. В. Вандышева

2220. Некоторые замечания об ускоренном курсе математики. Эйкен (Some comment on accelerated mathematics. Aiken Daymond J.), Math. Teacher, 1958, 51, № 4, 292—293 (англ.)

Рассматривается вопрос о возможности ускоренного прохождения курса математики средней школы одаренными учащимися и изучения ими дополнительного материала. Указывается, что такая возможность проверялась автором статьи на опыте в течение ряда лет. Автор приходит к выводу, что такое изучение математики весьма полезно, но это должно осуществляться в индивидуальном порядке. Создавать же особые группы из одаренных учащихся, по мнению автора, было бы неправильным, так как в этом случае у средних учащихся, которые, возможно, в дальнейшем могли бы успешно заниматься математикой в колледже, не будет стимула для продвижения. Е. В. Вандышева

2221. Измененный учебный план для способных учащихся. Уэлс (A modified curriculum for capable students. Wells David W.), Math. Teacher, 1958, 51, № 3, 181—183 (англ.)

Описание опыта преподавания математики в старших классах американской средней школы таким методом, когда учащиеся каждого класса разделены соответственно своим способностям и желанию на три группы. Пока учитель занимается с одной группой, две другие занимаются самостоятельно. В каждой группе выделены ответственные учащиеся (помощники), которые контролируют эту работу и в случае необходимости оказывают помощь. Е. В. Вандышева

2222. Унифицирующие идеи в курсе арифметики. Крамли (Unifying ideas in the arithmetic curriculum. Crumley Richard D.), School Sci. and Math., 1958, 58, № 5, 341—346 (англ.)

Примыкая к взглядам американского педагога Р. Тайлера в области теории учебных программ, автор рассматривает три «унифицирующие идеи» в курсе арифметики: идею группировки по десяткам, идею зависимости результата какого-нибудь измерения от выбора единицы меры и идею отношения двух величин. Прослежены специализации этих общих понятий в различных разделах курса арифметики и высказано убеждение, что систематическая акцентировка указанных понятий позволит основательно улучшить преподавание арифметики в школе. Ю. М. Гайдук

2223. Об опасности формализма и вербализма в преподавании алгебры. Крыговская (Le danger du formalisme et du verbalisme dans l'enseignement de l'algèbre. Krygowska Zofia), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, 37, № 191, 221—230 (франц.)

Примеры типичных ученических ошибок и способы борьбы с ними. И. Я. Депман

2224. Об опасности формализма и вербализма в преподавании алгебры. Крыговская (Despre pericolul formalismului şi verbalismului în predarea algebrei. Krygowska Ana Sofia), Gaz. mat. şi fiz., 1958, A10, № 5, 278—289 (рум.; рез. русск., франц.)

См. реф. 2223.

2225. Сообразительность $+x$=образование. Гарднер (Imagination $+x$=learning. Gardner John W.), W. Afric. J. Educ., 1958, 2, № 2, 72, 74, 76 (англ.)

См. реф. 2210.

2226. Опыт классификации упражнений на опровержение ложных математических рассуждений. Минковский В. Л., Уч. зап. Орловск. гос. пед. ин-та, 1957, 11, 122—148

Краткая характеристика существующих классификаций. Для устранения содержащихся в них недостатков (классификация по внешним признакам, неполнота, нерасчлененность и т. п.) автор предлагает классификацию по следующим разделам ошибок в речи и мышлении: I. Неправильность речи. II. Распространение на случай исключения. III. Приписывание свойств определенного вида всему роду. IV. Неправильное применение принципа непосредственных умозаключений путем обращения. V. Подмена точных определений геометрической интуицией. VI. Ошибки построения. VII. Ошибки, являющиеся следствием буквального толкования утверждений. VIII. Нарушение смысла условных записей. IX. Уклонение от тезиса.

К каждому разделу даны примеры и пояснения.

А. Е. Раик

2227. **Предложения по методике изучения обратной функции. Рихтер** (Ein Vorschlag zur methodischen Behandlung der Umkehrfunktion. Richter Dietrich), Math. und Phys. Schule, 1958, **5**, № 2, 101—103 (нем.)

2228. **За высокий уровень математической подготовки учащихся. Ларичев П. А.**, Народное образование, 1958, № 8, 44—47

2229. **Предельное значение и отношение $\frac{0}{0}$. Дитерт** (Grenzwert und Quotient $\frac{0}{0}$. Dietert H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956—1957, **9**, № 10, 448—452 (нем.)

Опираясь на свой опыт, автор излагает собственную точку зрения на методику разъяснения понятий, указанных в названии статьи, и на связанные с этим трудности.

В частности, он отмечает, что рассуждения, приводимые в учебных пособиях по вопросу нахождения, например $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, нельзя считать удовлетворительными. Эти рассуждения сводятся к следующему. Полагая $x\neq 1$, делят числитель и знаменатель данного выражения на $x-1$, получают $x+1$, а в последнее выражение подставляют $x=1$ (не заботясь о том, что оно получено как раз при условии $x\neq 1$!). Сам автор рассуждает следующим образом. Значение $x=1$ рассматриваем как предел ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Если обозначить значения частных сумм этого ряда через x_n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Далее, $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ при любом $x\neq 1$, в том числе и при $x=x_n$. Отношение $\frac{0}{0}$ в данном случае является „предельным значением“ величины $x+1$ при $x\to 1$.

А. А. Гусак

2230 K. **Конкурсные задачи по математике. Ч. 1—2. Хайош, Нёйкомм, Шуранъи** (Matematikai versenytételek. I—II. Hajós György, Neukomm Gyula, Surányi János. Közepiskolai szakköri füzetek. Tankönyvkiado, Budapest, I/1955, 139 l., 10Ft.; II/1957, 126 l., 9Ft) (венг.)

Физико-математическое общество, а затем математическое общество им. Я. Бойаи с 1894 г. ежегодно проводили математические конкурсы для выпускников средних школ. Для решения 3 задач представлялось 4 часа. Разрешалось использование вспомогательных средств.

Первый том содержит задачи и решения, а также фамилии призеров за 1894—1928 гг.; второй том — тот же материал за 1929—1955 гг. Первый том является переизданием книги, составленной И. Куршаком и вышедший в свет в 1929 г. Среди решений приведены не только те, которые получены участниками конкурсов, но и другие, идейно близкие решения.

Приведено много примечаний, служащих для ориентировки и расширения кругозора читателей. В их числе много таких, которые указывают на связь отдельных задач с другими проблемами. Такие замечания, например, относятся к векторам, группам, бесконечным рядам, проблеме Варинга, неевклидовой геометрии и т. д.

Удобство пользования книгой повышается ввиду наличия предметного указателя и ввиду того, что задачи (предварительно расположенные хронологически) тематически сгруппированы.

А. Heppes

См. также: 2231, 2270, 2272—2274, 2713K, 2714K, 2725, 2791, 2811K—2814K, 2842, 2905, 2916, 2941, 2970, 3006, 3011, 3037, 3054, 3058, 3066, 3068, 3069, 3071K, 3096—3100, 3107K, 3109K, 3126, 3128K.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

2231. **О современном состоянии математической логики и исследований оснований математики. Гермес** (Über die gegenwärtige Lage der mathematischen Logik und Grundlagenforschung. Hermes Hans), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1956, **59**, № 2, 49—69 (нем.)

Доклад, прочитанный на заседании Немецкого математического объединения, охватывает широкий круг вопросов, в том числе: семантическое обоснование логики предикатов, полнота исчисления предикатов, проблема разрешимости, семантическое построение логики высших ступеней, неклассическое обоснование логики и математики. Автор считает оправданным существование как классических, так и неклассических (конструктивистских) установок.

Б. А. Трахтенброт

2232. **О производных операциях и предикатах. Мальцев А. И.**, Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 1, 24—27

Каждая операция $f_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ алгебры A может рассматриваться как предикат $P_i(x_1, \ldots, x_{m_i}, y)$ на A (означающий, что $f_i(x_1, \ldots, x_{m_i}) = y$), а каждая формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ узкого исчисления предикатов (у. и. п.), составленная из предикатных символов P_i и содержащая $x_1, \ldots, x_n$ свободно, — как производный предикат на A. Такой предикат может определять на A новую алгебраическую операцию, быть может отличную от термов (многочленов). Формулы вида $(y_1)\ldots(y_p)\mathfrak{B}(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_p)$, где $\mathfrak{B}$ кванторов не содержит, называются универсальными, а формулы, не содержащие свободных переменных — аксиомами.

В n° 1 устанавливается общий вид операций, получаемых с помощью формул у. и. п. в классе алгебр, характеризуемых универсальными аксиомами.

В n° 2 естественным образом вводятся понятия: инвариантности предиката относительно перехода к K-подмоделям и к K-надмоделям, формульного и частичного предикатов, P-вложения, P-гомоморфизма.

Абстрактную характеристику предикатов, представимых конъюнкциями универсальных формул у.и.п., дает

Теорема 2. Для того чтобы на классе K^* моделей с основными предикатами $P_1, \ldots, P_s$, P имела место формула

$$P(x_1, \ldots, x_n) \sim \sim \& (x_{n+1}) \ldots (x_{p_\alpha}) \mathfrak{B}_\alpha (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{p_\alpha}), \quad (6)$$

в которой конъюнкция может быть бесконечной, а $\mathfrak{B}_\alpha$ — открытые формулы у.и.п., не содержащие знака P, необходимо и достаточно, чтобы класс K^* обладал следующими свойствами: если σ есть $(P_1, \ldots, P_s)$-изоморфизм некоторой $(P_1, \ldots, P_s)$-модели M, снабженной дополнительным частичным предикатом P, на подходящую K^*-модель M^* и в то же время каждая конечная $(P_1, \ldots, P_s, P)$-подмодель частичной модели M вложима в некоторую K^*-модель, то σ есть P-гомоморфизм M на M^*.

Следствиями теоремы 2 являются теоремы Тарского — при P 0-местном, А. Робинсона — при P формульном.

В n° 3 для универсально аксиоматизируемого класса алгебр K показано, что формульный предикат $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$, инвариантный относительно перехода к над- и подалгебрам, представляется в K открытой формулой, составленной из формул вида $g = h$, где g и h — некоторые термы (теорема 3). Наконец, определяется мультипликативная инвариантность предиката и для квазипримитивного (РЖМат, 1959, 174) класса алгебр K доказывается: формульный предикат $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y)$ является мультипликативно инвариантной операцией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ представляется термом (теорема 4); производная операция, представляемая формулой $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y)$, тогда и только тогда есть терм, когда она гомоморфно инвариантна, т. е. для любого гомоморфизма σ K-алгебры A на произвольную K-алгебру B из истинности $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_m, a)$ в A следует истинность $\mathfrak{A}(a_1^\sigma, \ldots, a_m^\sigma, a^\sigma)$ в B (теорема 5). Д. А. Захаров

2233. Конечно-определенные группы и алгоритмы. Адян С. И., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 1, 9—12

Обобщаются результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1958, 8524).

Группа F называется конечно-определенной, если она может быть задана конечным числом образующих элементов и определяющих соотношений. Групповое свойство α называется инвариантным, если оно, будучи выполнено в некоторой группе, выполнено и во всякой другой группе, ей изоморфной. Доказана следующая теорема, аналогичная теореме А. А. Маркова для ассоциативных исчислений.

Теорема 1. Пусть α — некоторое инвариантное групповое свойство. Если существует конечно-определенная группа F_1, обладающая свойством α, и конечно-определенная группа F_2, не вложимая ни в какую конечно-определенную группу с этим свойством, то невозможен алгоритм, определяющий для всякой конечно-определенной группы F, обладает она свойством α или нет.

Показано, что условие теоремы 1 нельзя ослабить, заменив требование существования конечно-определенной группы, не вложимой ни в какую конечно-определенную группу со свойством α, требованием существования конечно-определенной группы, не обладающей свойством α.

Класс групп, обладающих инвариантным свойством α, автор называет классом α-групп. Класс конечно-определенных α-групп автор называет полным, если всякая конечно-определенная группа изоморфна некоторой подгруппе группы этого класса. Теорема 1 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1′. Если α — непустой и неполный класс конечно-определенных групп, то невозможен алгоритм, определяющий для произвольной конечно-определенной группы, принадлежит она классу α или нет.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_r$ — конечная система слов, составленных из букв $x_1, \ldots, x_s, x_1^{-1}, \ldots, x_s^{-1}$ (переменных). Конечно-определенную группу F автор называет условно-единичной относительно системы тождественных соотношений $L_i \equiv 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, если добавление к системе определяющих соотношений группы F любого из тождественных соотношений $L_i \equiv 1$ превращает группу F в единичную. Тождественное соотношение называется нетривиальным, если оно не выполнено в свободной группе. Имеют место теоремы:

Теорема 2. Какова бы ни была конечная система нетривиальных тождественных соотношений, класс групп, условно-единичных относительно этой системы, является полным.

Теорема 3. Класс конечно-определенных групп, задаваемых конечными системами взаимно сопряженных образующих, является полным.

Автор сообщил референту следующие опечатки: На стр. 10 в формулах (7), (8) вместо E должно быть $pApAp^{-2}$. На стр. 10 в 6-й строке снизу вместо F должно быть F_1. На стр. 12 в формуле (11) вместо $[\ldots[[E_{s+1}L'_1, L'_2], L'_3], \ldots L'_r]$ должно быть $[\ldots[[[E_{s+1}, L_1'], L_2'], L_3'], \ldots, L_r']$. Н. М. Нагорный

2234. Роль закона сокращения при задании полугрупп с сокращением посредством определяющих соотношений. Адян С. И., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 6, 1191—1194

Ассоциативную систему с конечным числом образующих и с конечным числом определяющих соотношений будем называть полугруппой П. В ней равны между собой те и только те слова, равенство которых выводимо из определяющих соотношений при помощи известных правил. Если к числу этих правил добавить новые, то получатся новые выводимые равенства и другая полугруппа. Рассмотрим правило правостороннего сокращения: из $AX = BX$ следует $A = B$, и правило левостороннего сокращения: из $XA = XB$ следует $A = B$. Полугруппы, получаемые из полугрупп П добавлением первого из этих правил, называем полугруппами $\Pi_{пр}$, получаемые добавлением второго правила — полугруппами $\Pi_л$, а получаемые добавлением обоих этих правил — полугруппами Π_2. Ставится вопрос о возможности замены этих правил конечным числом определяющих соотношений.

Теорема 1. Существует полугруппа Π_2, не изоморфная никакой полугруппе П.

Теорема 2. Существует полугруппа $\Pi_{пр}$ ($\Pi_л$), не изоморфная никакой полугруппе П.

Теорема 3. Существует полугруппа Π_2, не изоморфная никакой полугруппе $\Pi_л$ ($\Pi_{пр}$). Смешанным соотношением в данной системе слов называется равенство слов, составленных из образующих этой системы и символов переменных. Полугруппой с конечным числом смешанных соотношений называется полугруппа, в которой к уже имеющимся правилам вывода добавлено еще следующее правило: справедливо равенство, полученное из любого из данных смешанных соотношений подстановкой вместо символов переменных любых слов данной системы.

Теорема 4. Существует полугруппа Π_2, не изоморфная никакой полугруппе П, $\Pi_л$ или $\Pi_{пр}$ с конечным числом смешанных соотношений.

Теорема 5. Существует полугруппа $\Pi_{пр}$ ($\Pi_л$), не изоморфная никакой полугруппе П с конечным числом смешанных соотношений. Таким образом, правила правостороннего и левостороннего сокращения не могут быть ни вместе, ни по отдельности заменены ни конечным числом определяющих соотношений, ни даже конечным числом смешанных соотношений. Намечен путь доказательства всех этих теорем, в частности приведены конструкции полугрупп с указанными свойствами. Г. С. Цейтин

2235. Алгоритмы как операции в алгебраических системах. Кузнецов А. В., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 240—241

Резюме доклада автора на Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре в феврале 1958 г. Вопрос о существовании того или иного алгоритма (в большинстве случаев) можно свести к вопросу о разрешимости проблемы тождества в алгебре, построенной соответствующим образом.

Алгебра $\mathfrak{A}$ (с конечным числом операций) называется конечно-определенной, если она может быть задана конечной системой образующих и определяющих соотношений, содержащих, вообще, и переменные; конечно-определенная алгебра $\mathfrak{A}$ называется вполне конечно-определенной, если существует для нее такая конечная система неравенств, из которых (при использовании также определяющих соотношений алгебры $\mathfrak{A}$) вытекают все верные в $\mathfrak{A}$ неравенства, не содержащие переменных. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется простой, если на ней нельзя определить нетривиальных отношений конгруэнтности. Автор говорит, что алгебра $\mathfrak{A}_1$ накрывает алгебру $\mathfrak{A}_2$, если множество элементов у них одно и то же, а множество операций алгебры $\mathfrak{A}_1$ включает в себя множество операций $\mathfrak{A}_2$.

Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы проблема тождества для конечно-порожденной алгебры $\mathfrak{A}$ была разрешима:

1) Существует такая циклическая группа $\mathfrak{B}$ и такая конечно-определенная алгебра $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A}$ накрывает $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и

2) Существует вполне конечно-определенная алгебра, накрывающая алгебру $\mathfrak{A}$.

3) Существует простая конечно-определенная алгебра, накрывающая алгебру $\mathfrak{A}$.

Эти критерии позволяют трактовать понятие алгоритма как понятие алгебраической операции в соответствующей алгебре, накрываемой некоторой другой алгеброй с определенными свойствами.

Формулируется также следующий результат: Невозможен такой частичный (т. е. не всегда дающий ответ) алгоритм для общей проблемы тождества для конечно-порожденных алгебр, который бы для всякой такой алгебры, для которой разрешима проблема тождества, был бы полным (т. е. всегда давал бы ответ).

В основе доказательств лежит следующее предложение. Операция Φ, определенная в натуральном ряду, является общерекурсивной тогда и только тогда, когда алгебра $< N;\ \Phi,\ \Psi >$, где N — натуральный ряд, а $\Psi(x) = x + 1$, может быть накрыта некоторой конечно-определенной алгеброй. С. И. Адян

2236. Некоторые доказательства неразрешимости арифметики. Гжегорчик (Some proofs of undecidability of arithmetic. Grzegorczyk A.), Fundam. math., 1956, **43**, № 2, 166—177 (англ.)

Теория T называется разрешимой, если множество гёделевских номеров теорем теории T является рекурсивным. Если теория непротиворечива и любое ее непротиворечивое расширение неразрешимо, то она называется существенно неразрешимой.

Автор рассматривает теории, содержащие знак равенства, кванторы, μ-оператор или ι-оператор и термы (индивидуальные константы низшего типа). Выражение „$\ulcorner \Phi(a_n) \urcorner \in T$“ означает суждение „$\Phi(a_n)$ является теоремой T“. Автор говорит, что множество X положительных целых чисел представимо в T формулой $\Phi(x)$ относительно последовательности термов $\{a_n\}$, если $n \in X \equiv \ulcorner \Phi(a_n) \urcorner \in T$ при каждом n. Множество X строго представимо в T формулой $\Phi(x)$ относительно последовательности $\{a_n\}$, если X представимо в T формулой $\Phi(x)$, а дополнение X — формулой $\sim \Phi(x)$ относительно $\{a_n\}$. Аналогично определяется понятие представимости и строгой представимости для многоместных отношений. Доказаны:

Лемма 2. Если теория T непротиворечива и рекурсивно-перечислима (т. е. рекурсивно-перечислимо множество гёделевских номеров ее теорем) и нерекурсивное множество X представимо в T, то T неполна.

Лемма 3. Если нерекурсивное множество X представимо в каждом непротиворечивом и рекурсивно-перечислимом расширении теории T, то T существенно неразрешима.

Лемма 4. Если формула $\Psi(x, y)$ строго представляет в непротиворечивой и рекурсивно-перечислимой теории T рекурсивное отношение $R(n, k)$ и если формула $\exists y\, \Psi(x, y)$ представляет в T нерекурсивное множество X, то существует такое число n, что $\ulcorner (x) \sim \Psi(a_n, x) \urcorner \notin T$, $\ulcorner \sim (x) \sim \Psi(a_n, x) \urcorner \notin T$ и для любого k $\ulcorner \sim \Psi(a_n, a_k) \urcorner \in T$.

С помощью этих лемм устанавливается существенная неразрешимость формализованной арифметики Ar, рассмотренной Мостовским (Mostowski A., Sentences undecidable in formalized arithmetic, Amsterdam, 1952). В частности, доказана следующая.

Теорема 3. Если теория Ar непротиворечива, то она существенно неразрешима и существует такая формула $\Psi(x, y)$, строго представляющая рекурсивное отношение в Ar, что для каждого рекурсивно-перечислимого и непротиворечивого расширения T теории Ar существует бесконечно много таких чисел n_i, что $\ulcorner (x) \Psi(a_{n_i}, x) \urcorner \notin T$, $\ulcorner \sim (x) \Psi(a_{n_i}, x) \urcorner \notin T$ и для любого k $\ulcorner \Psi(a_{n_i}, a_k) \urcorner \in T$. Н. М. Нагорный

2237. Заметка об арифметических моделях для формул непротиворечивости исчисления предикатов. II. Крейсел (Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. II. Kreisel G. Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 39—49. Amsterdam, North-Holland Publishing Co. Editions E. Nauwelaerts' Louvain, 1953) (англ.)

Ранее было показано (Fundam. math., 1950, **37**, 265—285), что всякая формула непротиворечивости расширенного исчисления предикатов (которая содержит и символы предикатов и символы функций) имеет модель, в которой вместо символов функций стоят примитивно-рекурсивные функции, а вместо символов предикатов стоят предикаты из $Z_{\hat{\mu}}$ (Hilbert, Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. II, Berlin, Springer, 1939, 293) только с двумя кванторами. Автор указывает формулу S расширенного исчисления предикатов, не имеющую модели, в которой символы функций заменялись бы вычислимыми функциями, предикаты заменялись бы предикатами из $Z_{\hat{\mu}}$ только с одним квантором, так что упомянутый выше результат является наилучшим из всех возможных.

I. Novak Cal

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 668.

2238. О логико-математическом параллелизме. Бет (Sur le parallélisme logico-mathématique. Les méthodes formelles en axiomatique. Beth E. W. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 1950, № 26, Paris, pp. 27—32; discussion, pp. 32, 33. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953) (франц.)

Статья содержит обзор последних достижений и тенденций в области использования метаматематических методов при доказательстве математических теорем, в особенности теорем алгебры, аналогично тому, как это сделано в работах Тарского, Хенкина и Робинсона.

I. Novak Gal

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, №4, 277.

2239. Вычислимые операции, вычислимые операторы и конструктивно непрерывные функции. Успен-

ский В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**. М., АН СССР, 1956, 185

Исследуется связь между понятием вычислимой операции (РЖМат, 1956, 5682), вычислимого (иначе — частично-рекурсивного) оператора и непрерывной функции на бэровском и обобщенном бэровском (РЖМат, 1958, 5445) пространстве. Для случая одноместной операции V, переводящей каждое множество натуральных чисел S в некоторое множество натуральных чисел $V(S)$, вычислимость V равносильна существованию такой вычислимой функции φ, аргументы и значения которой суть кортежи натуральных чисел, что

$$V(S) = \cup\,[\varphi(m)],\ [m] \subseteq S,$$

где через $[k]$ обозначено множество элементов кортежа k.
А. С. Есенин-Вольпин

2240. Изоморфизм систем рекурсивно-перечислимых множеств с эффективными свойствами. Мучник А. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**, 407—412

Две системы множеств $E_1, E_2, \ldots, E_l$ и $F_1, F_2, \ldots, F_l$ называются изоморфными, если существует общерекурсивная функция $\varphi(n)$, отображающая взаимно однозначно натуральный ряд на себя и такая, что при любом $k = 1, 2, \ldots, l$ $n \in E_k$ тогда и только тогда, когда $\varphi(n) \in F_k$. Доказывается, что: 1) все пары эффективно неотделимых множеств изоморфны (определение эффективно неотделимых множеств см. в работе В. А. Успенского (РЖМат, 1954, 2487)); 2) все системы из любого заданного числа попарно непересекающихся эффективно кратно неотделимых рекурсивно-перечислимых множеств изоморфны.

Эти утверждения приводятся как следствия из более общих результатов, в формулировке которых вместо изоморфизма участвует гомоморфизм систем множеств. Далее определяются и изучаются квазиэффективно неотделимые рекурсивно-перечислимые множества, а также универсальные пары рекурсивно-перечислимых множеств.

В статье используются результаты статьи Майхилла (РЖМат, 1957, 2844). Ю. Т. Медведев

2241. Решение проблемы Шрётера, относящейся к определению понятия общерекурсивной функции. Калмар (K. Schröter egy, az általános, rekurzív függvény fogalmának definiciójára vonatkozó, problémájának megoldása. Kalmár László), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 2, 103—127 (венг.)

Новое изложение реферируемой работы появилось на немецком языке (РЖМат, 1958, 68). В венгерской работе добавлено очень ясное введение в теорию рекурсивных функций, поэтому работа понятна без дополнительных сведений из этой области. Кроме того, в приводимых примерах уже намечаются основные идеи доказательства. Автор делает следующее замечание по поводу тезиса Чёрча: если считать, что все вычислимые теоретико-числовые функции общерекурсивны, то существует такая определенная рекурсивная функция $f(n, y)$ и такое n, что утверждение: „функция $f(n, y)$ ни для какого y не равна $0''$ истинно и, несмотря на это, абсолютно недоказуемо. R. Peter

2242. К рекурсивной теории функций. Мешковский (Zur rekursiven Funktionentheorie. Meschkowski Herbert), Acta math, 1956, **95**, № 1-2, 9—23 (нем.)

Автор ставит задачу построения анализа на основе теории рекурсивных функций с введением понятия функции от вещественного аргумента. За основу берутся понятия вычислимого вещественного числа по Шпеккеру (Specker E., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, № 3) и непрерывной функции по Гудстейну (Goodstein R. L., Proc. London Math, Soc., Ser. 2, 1950, **52**). В работе содержатся ошибочные утверждения. Г. С. Цейтин

2243. Нормальная форма общерекурсивных функций. Ху Ши-хуа, Лу Чжун-вань (Normal forms of general recursive functions. Hu Shih-hua, Loh Chung-wan), Sci. Rec., 1958, **2**, № 4, 134—139 (англ.)

Изучается вопрос о представлении общерекурсивных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\{(\exists! z)\,[h(y, x_1, \ldots, x_n z) = 0]\}.$$

В частности показывается, что для того, чтобы можно было представить в таком виде любую общерекурсивную функцию, достаточно брать функции h из определяемого авторами класса A. Этот класс является собственной частью известного ранее подкласса D класса примитивно-рекурсивных функций (см. Мо Шао—куй, РЖМат, 1958, 948), обладающего тем свойством, что всякая общерекурсивная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть представлена в форме Клини:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Q(\mu y\,[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]),$$

где Q и g принадлежат D. Ю. Т. Медведев

2244. Заметка о полноте m-значного исчисления высказываний. Ионэмицу (Note on completeness of m-valued propositional calculi. Yonemitsu Naoto), Math. japon., 1954, **3**, № 2, 57—61 (англ.)

Роз показал (Rose A., J. London Math. Soc., 1951, **26** 47—49), что для формализации m-значного исчисления высказываний Лукасевича — Тарского, предложенной Россером и Туркеттом, степень полноты (в смысле Тарского) равна 3, когда число $m - 1$ простое. Автор исследует некоторые случаи непростых $m-1$. Полученные им результаты содержатся в более поздней работе Роза (Rose A., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 92—102), в которой доказано, что в общем случае степень полноты равна $d(m-1)+1$, где $d(n)$ обозначает число делителей числа n. Ю. Т. Медведев

2245. О девятизначном исчислении высказываний. Такэкума (On a nine-valued propositional calculus. Takekuma Ryoichi), J. Comput. Systems, 1954, **1**, 225—228 (англ.)

Автор сначала дает структурно-теоретические определения логики Курода (Kuroda's) и слабой логики Брауэра. Далее автор показывает, что логика, значения истинности которой образуют некоторую структуру из девяти элементов, не является логикой Курода, но является слабой логикой Брауэра. A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 555.

2246. Универсальность логических правил. Лоренцен (Die allgemeingültigkeit der logischen regeln. Lorenzen Paul), Studium Gen., 1953, **6**, 605—609 (нем.)

Настоящая статья автора, так же как и предыдущая (РЖМат, 1955, 587), посвящена рассмотрению оперативной интерпретации логики. Логика занимается нахождением и установлением логических правил, т. е. метаправил, которые позволяют по заданным правилам для операций некоторого типа находить новые (вторичные) правила для этих операций. Таким образом, логические правила предназначены для упрощения операций. Этот факт подтверждает универсальную справедливость логических правил. E. W. Beth

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, №1, 3.

2247. Теорема редукции в исчислениях высказываний Льюиса. Мацумото (Reduction theorem in Lewis' sentential calculi. Matsumoto Kazuo), Math. japon., 1955, **3**, № 3, 133—135 (англ.)

Автор определяет логический оператор ∇ следующим образом: $\nabla\alpha \equiv \sim\Diamond\sim\Diamond\sim\Diamond\sim\alpha$ (здесь $\sim$ знак отрицания, а $\Diamond$ знак возможности) и показывает, что формула γ доказуема в исчислении Льюиса S5 тогда и только тогда, когда $\nabla\gamma$ доказуема в S4. Отсюда следует, что если γ доказуема в S5, то $\Diamond\gamma$ доказуема в S4 (аналог теоремы Гливенко). Используя теорему Холлдена о том, что если γ доказуема в S4, то $\Diamond\Diamond\gamma$ доказуема в S3, автор строит диаграмму, иллюстрирующую связь между доказуемостью в S3, S4 и S5. Н. М. Нагорный

2248. Модальность и введение кванторов в S5. Прайор (Modality and quantification in S5. Prior A. N.), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 1, 60—62 (англ.)

В своей статье Баркэн (Barcan R. C., J. Symbolic Logic, 1946, **11**, 2) в качестве отправной точки для построения функционального исчисления, основанного на строгой импликации, берет исчисления Льюиса S2 и S4, дополняя их аксиомами, среди которых фигурирует формула Ф, утверждающая, что если возможно существование x, обладающего свойством φ, то существует x, возможно обладающий этим свойством. Автор показывает, что если при построении упомянутого функционального исчисления исходить не из S2 и S4, а из S5, то добавление формулы Ф становится излишним; автор выводит ее из остальных аксиом исчисления. Попутно устанавливается одно вспомогательное правило вывода в исчислении S5.

H. M. Нагорный

2249. Альтернативные системы постулатов для исчисления Льюиса S5. Леммон (Alternative postulate sets for Lewis's S5. Lemmon E. J.), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 4, 347—349 (англ.)

Прайором (РЖМат, 1958, 6424, см. стр. 305—307 оригинала) была предложена без доказательства новая система постулатов для исчисления Льюиса S5. Автор показывает, что она действительно эквивалентна системе постулатов Льюиса.

H. M. Нагорный

2250. Множество аксиом модального исчисления высказываний, эквивалентного S3. Исимото (A set of axioms of the modal propositional calculus equivalent to S3. Ishimoto Arata), Sci. Thought, 1954, **1**, 1—11 (англ.)

Автор рассматривает модальное исчисление высказываний с двумя исходными функциями, которые он обозначил через /и//. Первое из них есть отношение несовместности Шеффера, а второе обозначает некоторого рода логическую несовместность. Он определяет материальную импликацию, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию через обычным путем и определяет строгую импликацию и возможность через „$p \supset q$ для $p//(q/q)$“, „$\Diamond p$ для $(p//p)/(p//p)$“ соответственно. Малые латинские буквы употребляются для синтаксических переменных.

Затем он формализует эту систему, используя правило подстановки (adjunction), правило заключения и следующие аксиомы:

$$p//(q/r) \supset (s/q \supset p/s),\quad p \supset p,\quad p//(q/r) \supset (s//q \supset p//s),$$

$$p//q \supset p/q,\quad p//p \supset p//q,$$

$$((p/q)/(p/q))//((p/q)/(p/q)) \supset p//q.$$

Он приводит аксиомы и правила вывода системы Льюиса S3 и показывает, что определения дизъюнкции, материальной импликации и строгой импликации, данные Льюисом, доказуемы как соответствующие эквиваленты в его системе. Таким образом показывается, что любое элементарное предложение, которое доказуемо в S3, доказуемо также в данной системе. Показано обратно, что если $p//q$, p/q определяются как $\sim\Diamond(p \wedge q)$, $\sim(p \wedge q)$ соответственно, то все доказуемые элементарные утверждения рассматриваемой системы доказуемы в S3, если понимать определения автора как строгие эквивалентности.

A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 435.

2251. Три степени модального затруднения. Куайн (Three grades of modal involvement. Actes du XIème Gongrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 65—81. Amsterdam. North-Holland Publishing Co., Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953) (англ.)

Автор дает детальное философское исследование модального оператора необходимости. Другие модальные операторы большей частью не рассматриваются, так как их можно определить при помощи оператора необходимости. Необходимость рассматривается как семантический предикат, относящийся к утверждению как изображающая его форма, как оператор утверждения, который относится к самому утверждению, а также как оператор предложения, который может относиться к открытому предложению, такому как „$x > 5$“, перед тем как окончательно связать его квантором.

A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, 386.

2252. Метод разрешимости и топологическая интерпретация для систем логических импликаций. Йонэмицу (A decision method and a topological interpretation for systems of logical implication. Yonemitsu Naoto), Mem. Osaka Univ. Lib. Arts Ed. Ser. B., 1954, № 3, 6—20 (англ.)

Автор дает подробное изложение нескольких вариантов модальной логики Льюиса с точки зрения Мак-Кинси (McKinsey, J. Symbolic Logic, 1941, **6**, 117—134).

G. Kreisel

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 119.

2253. Замечание о системах линейной импликации. (A note on systems of logical implication. Yonemitsu Naoto. Mem. Osaka Univ. Lib. Arts Ed. Ser. B. 1954, № 3, 21—24) (англ.)

Используя подходящим образом выбранные матрицы, автор устанавливает независимость примитивных символов в системе модальной логики, рассмотренной в статье автора (реф. 2252).

G. Kreisel

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 119.

2254. Об альтернативном формулировании модальной системы Фэйса-Райта. Андерсон (On alternative formulations of a modal system of Feys-von Wright. Anderson Alan Ross), J. Comput. Systems, 1954, **1**, 211—212 (англ.)

Автор дает краткий набросок доказательства того факта, что система M Райта (von Wright) может быть формализована, используя только подстановку и modus ponens в качестве первичных правил действия. Автор использует бесконечное число аксиом. Семь из них устанавливаются явно, а остальные аксиомы включены в правило „если α есть аксиома, то $L\alpha$ есть аксиома“. Заметка заканчивается исследованием применения систем S4 и S5 Льюиса, а также рассмотрением предположения автора о том, что аксиомы его формализации не могут быть заменены конечной системой аксиом.

A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 554.

2255. Замечание о полных интерпретациях моделями. Крейсел (Remark on complete interpretations by models. Kreisel G.), Arch. Math. Logik Grundlagenforsch., 1954, **2**, 4—9 (англ.)

Каждой формуле $\mathfrak{A}$ исчисления второй ступени предикатов Π ставится в соответствие формула $\mathfrak{A}_1$ исчисления первой ступени предикатов Π_1; по определению $\mathfrak{A}$ доказуемо в Π, если $\mathfrak{A}_1$ доказуемо в $\Pi_1 \cdot \mathfrak{A}_1$ строится таким образом, что интуитивно Π эквивалентно обычному исчислению второй ступени. В порядке восстановления результатов Гильберта и Бернайса (Hilbert, Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. II, Berlin, Springer, 1939, 234—253) о формулах в Π, автор строит последовательность $D^{(n)}$ предметных областей и последовательность $D_p^{(n)}$ множеств предикатов; если A_n есть формула, полученная ограничением индивидуальных переменных в $\mathfrak{A}$ посредством $D^{(n)}$ и предикатных переменных посредством $D_p^{(n)}$, то A_n можно записать как формулу из Z_p (Гильберт и Бернайс, там же, стр. 293). Если A недоказуемо в Π, то существует A_n, которое опровержимо в $\mathfrak{Z}$ (см. также, стр. 352).

A. Heyting

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 119.

2256. Об одной системе Майхилла. Шепердсон (Note on a system of Myhill. Shepherdson J. C.), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 3, 261—264 (англ.)

Майхилл построил систему K, не содержащую отрицания и квантора общности и обладающую свойством полноты с точки зрения некоторой содержательной интерпретации (Myhill J. R., J. Symbolic Logic, 1950, 15, 185—196). В этой системе рассматриваются последовательности (определенные комбинации элементарных символов) и классы последовательностей, причем может быть определен любой рекурсивно-перечислимый класс последовательностей. Это дает возможность построить в системе K теорию вещественных чисел, определяя их посредством классов рациональных чисел (полусечения) или классов пар рациональных чисел (полные сечения).

В реферируемой статье рассматривается вопрос о том, какие классы классов представимы в системе K_1, полученной из K введением переменных для классов.

Теорема 1. Если $A(\alpha)$ есть формула (statement matrix), не содержащая свободных переменных, кроме, быть может, свободной классовой переменной α, то класс классов α_0, для которых $A(\alpha_0)$ истинно, состоит из всех классов, содержащих какой-нибудь член некоторой рекурсивной последовательности A конечных классов.

Намечен путь доказательства этой теоремы: 1) если $\alpha_0 \subset \beta_0$ и $A(\alpha_0)$ истинно, то $A(\beta_0)$ истинно, 2) если $A(\alpha_0)$ истинно, то α_0 содержит конечный подкласс ξ_0, такой что $A(\xi_0)$ истинно, 3) множество конечных классов, удовлетворяющих A, рекурсивно-перечислимо. Используется индукция по числу вхождений логических знаков в A. Формулируется также утверждение, обратное теореме 1, именно, что для всякой рекурсивной последовательности A конечных классов существует такая формула $A(\alpha)$, что $A(\alpha_0)$ истинно для тех и только тех классов α_0, которые содержат один из классов из A.

Из 1) следует, что всякий класс классов, определимый в системе K_1, содержит класс V, состоящий из всех последовательностей, а потому не может содержать только классы рациональных чисел. Ввиду этого в системе K_1 не могут быть определены никакие классы вещественных чисел ни как полусечений, ни как полных сечений, хотя отдельные вещественные числа определить можно.

Г. С. Цейтин

2257. Об универсальных решающих элементах. Роз (Sur les éléments universels de décision. Rose Alan), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 19, 2343—2345 (франц.)

Собоцинский (РЖМат, 1954, 3114) доказал, что функция алгебры логики $\Phi(p, q, r, s) = {}_{df} p \equiv (p \equiv q)\ \&\ (r \equiv s)$ является универсальной в следующем смысле: всякая функция двух переменных может быть получена из Φ путем подстановки переменных (не исключается подстановка одного и того же символа вместо различных исходных переменных) и констант 0,1. В статье показано, что этим свойством обладает и ряд других функций, среди которых, например, и функция Φ вида $\Phi(p, q, r, s) = {}_{df}[p, \Psi, (q, r), \sim s]$, где $\Psi(q, r)$ — любая из функций: $\equiv$, $\not\equiv$, $\supset$, $\not\supset$, а $[x, y, z]$ обозначает функцию (именуемую условной дизъюнкцией), принимающую значение 1 на наборах: (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1) (1,1,1). Б. А. Трахтенброт

2258. О существовании конечных моделей и разрешающих алгоритмов для исчисления высказываний. Харроп (On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi. Harrop R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 1, 1—13 (англ.)

Рассматриваются исчисления высказываний P, определяемые следующим образом. Формулы P образуются из бесконечного числа переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и конечного числа бинарных и монарных операций обычным путем. Задается конечное число схем аксиом, которые выражаются в терминах операций и переменных для производных формул $U, V, \ldots, Z, \ldots$ и конечное число схем правил вывода вида $\dfrac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\psi}$ $(n \geqslant 1)$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ и ψ составлены также с помощью операций и переменных для формул. Множество доказуемых формул (теорем) исчисления P определяется естественным образом по указанным аксиомам и схемам правил вывода.

Исследуется связь между существованием конечных моделей и разрешимостью исчислений высказываний (т. е. существованием алгоритма для решения вопроса о доказуемости формул).

Доказывается существование неразрешимых исчислений высказываний. Дается два определения конечной модели исчисления высказываний, заданной таблично. В одном из них требуется, чтобы правила вывода исчисления перерабатывали тождественные (valid) формулы (т. е. формулы, всегда принимающие выделенные значения; в модели может быть несколько выделенных значений) в тождественные формулы; в другом — чтобы правила вывода перерабатывали формулы, имеющие (при каком-нибудь замещении переменных элементами модели) выделенные значения, в формулы, имеющие (при этом же замещении) также выделенные значения. Модели, удовлетворяющие второму требованию, называются сильными.

Показывается, что не всякая модель является сильной. Например, множество $S = \{1, 2, 3\}$ с единственным выделенным значением 1 и функциями $\rightarrow$ и $\&$, где

$$\begin{cases} \rightarrow (1,2) = 3; \\ \rightarrow (1,3) = 3; \\ \rightarrow (\alpha, \beta) = 1 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \qquad \begin{cases} \& (3,3) = 3; \\ \& (\alpha, \beta) = 1 \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

не является сильной моделью исчисления с аксиомой $X \rightarrow X \,\&\, X$ и правилами вывода $\dfrac{X;\ Y}{X \,\&\, Y}$ и $\dfrac{X \,\&\, X;\ X \rightarrow Y}{Y}$ (но является моделью этого исчисления). Однако по каждой конечной модели исчисления высказываний можно эффективно построить конечную сильную модель с тем же множеством тождественных формул (лемма 3.2).

Доказывается существование алгоритма, проверяющего, является данная система таблиц конечной моделью исчисления высказываний или нет (лемма 3.1).

Исчисление P называется конечно-моделируемым, если для каждой невыводимой формулы существует конечная модель исчисления P, в которой эта формула не тождественна.

Всякое конечно моделируемое исчисление разрешимо (лемма 4.1), но существуют разрешимые исчисления высказываний, не моделируемые конечно (теоремы 4.6 и 4.7; в теореме 4.6 приводится пример исчисления с зависимой системой аксиом и правил, в теореме 4.7 — с независимой). Б. Ю. Пильчак

2259. О структуре бинарных связей исчисления высказываний. Бланше (Sur la structuration du tableau des connectifs interpropositionnels binaires. Blanché Robert), J. Symbolic Logic, 1957, **22**, № 1, 17—18 (франц.)

Уточняются и дополняются исследования Пьяже (Piaget J., Traité de logique, 1949) и Готшока (реф. 2262).

Автор предлагает преобразовать традиционный логический квадрат в логический шестиугольник путем введения двух новых символов: Y, играющего роль конъюнкции I и O, и U, играющего роль дизъюнкции A и E (I означает тип частноутвердительных суждений, O — частноотрицательных, A — общеутвердительных и E — общеотрицательных суждений). За подробностями автор отсылает к своей статье „Sur l'opposition des concepst" (Theoria, 1953, **19**, 89 — 130). Ф. Я. Ветухновский

2260. О возможности использования исчисления вычитаний для формализации конструктивных теорий.

Иоханссон (On the possibility to use the subtractive calculus for the formalization of constructive theories. Johansson Ingebrigt. Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. XIV, pp. 60—64. Amsterdam; North-Holland Publishing Co., Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953) (англ.)

Автор утверждает, что исчисление вычитаний, формально двойственное с исчислением сложений, также может быть использовано для конструктивных теорий. Обоснованием этого является то, что каждое метатеоретическое высказывание вида

«'$(\forall x)(f(x) \supset g(x))$' истинно»

можно в этом исчислении заменить через

«'$(\exists x)(f(x) — g(x))$' ложно».

Тем самым выясняется невозможность некоторых конструкций. I. Novak Gal

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 493.

2261. **Системы синтаксического анализа. Хомский** (Systems of syntactic analysis. Chomsky Noam), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 3, 242—256 (англ.)

В связи со структуралистскими лингвистическими исследованиями возникла проблема формализации понятия синтаксической категории. Автор делает попытку решить эту проблему, для чего строит несколько формальных систем, в которых (с помощью большого числа довольно сложных предварительных определений) вводится отношение „X и Y принадлежат к одной синтаксической категории". При построении систем используется исчисление индивидуумов Леонарда и Гудмана (Leonard H. S., Goodman N., J. Symbolic Logic, 1940, 5, 45—55).

Все построенные в статье системы, как подчеркивает автор, описывают лишь некоторые упрощенные языки, далекие от естественных. А. В. Гладкий

2262. **Теория кватернальности. Готшок** (The theory of quaternality. Gottschalk W. H.), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 3, 193—196 (англ.)

Указывается, что для логических и математических систем, к которым применима теория двойственности, может быть построена также „теория кватернальности". Так, следующие четыре формулы узкого исчисления предикатов называются кватернальными каждая другой: φ — произвольная формула; φ^D — двойственная φ; φ^C — полученная из φ заменой неотрицаемых переменных предикатов и высказываний на отрицаемые и обратно; φ^N — полученная из φ^D, как φ^C из φ. Отмечается ряд простых свойств кватернальных формул (в частности, операции $^E, ^D, ^C, ^N$, где ^{E} — тождественное преобразование формулы, образуют группу 4-го порядка). Для наглядного изображения этих свойств строится по образцу обычного логического квадрата „квадрат кватернальности". Аналогичные теории строятся для табличной интерпретации исчисления высказываний, для узкого исчисления предикатов с равенством, для модальной логики. В заключение дано более общее изложение „теории кватернальности" в виде некоторой алгебраической системы и показано, как эта система может быть интерпретирована в узком исчислении предикатов, в исчислении классов и в исчислении отношений. А. В. Гладкий

2263. **Проблемы, возникающие из приложений математической логики к биологии. Вуджер** (Problems arising from the application of mathematical logic to biology. Woodger J.-H.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A 5, 133—140 (англ.)

Изучается некоторый тип порядкового отношения, который часто встречается в биологии и носит название иерархии. Иерархией называется отношение R, удовлетворяющее следующим условиям: 1) из yRx и zRx следует $y = z$; 2) существует единственный элемент B_R, для которого существует y такое, что $B_R R y$, и не существует z такого, что zRB_R; 3) если для элемента $x \neq B_R$ существует y такое, что xRy или yRx, то $B_R R^k x$ для некоторого натурального k.

Автор приводит различные свойства иерархий и некоторые типы иерархий. В формулировках определений и теорем используется символика, введенная в книге Уайтхеда и Рассела „Principia mathemathica". Накаких приложений к биологии не указывается. В. Л. Мурский

2264. **Доказательство одного предположения Гудмана. Файн** (Proof of a conjecture of Goodman. Fine N. J.), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 1, 41—44 (англ.)

Гудманом (Goodman N., The structure of appearance, Harvard University Press, 1951) рассмотрено понятие линейного порядка (linear array). Линейный порядок есть конечное упорядоченное множество, в котором определен предикат $M(x, y)$, удовлетворяющий условиям: $B(x, y) \to M(x, y)$; $M(x, y)\ \&\ x \leqslant u \leqslant v \leqslant y \to M(u, v)$; ($B(x, y)$ означает „x и y — соседние элементы").

Определяется функция $S(x, y)$, где x, y — элементы порядка, следующим образом: $S(x, x) = 0$; при $x \neq y$ $S(x, y)$ на единицу больше числа элементов, находящихся между x и y. Автор доказывает эквивалентность следующих двух свойств линейных порядков:

(1) $$M(x, y)\ \&\ \overline{M(u, v)} \to S(x, y) < S(u, v)$$

(2) $$(Ex)(Ey)(Ea)(Eb)[B(x, y)\ \&\ a \neq b\ \&\ M(x, a)\ \&\ M(x, b)\ \&\ \overline{M(y, a)}\ \&\ \overline{M(y, b)}].$$

Именно, эти условия выполняются тогда и только тогда, когда существует натуральное число K такое, что $M(x, y) \equiv S(x, y) \leqslant K$. А. В. Гладкий

2265. **Об интерпретации аристотелевой силлогистики. Шепердсон** (On the interpretation of Aristotelian syllogistic. Shepherdson J. C.), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 2, 137—147 (англ.)

Рассматривается введенная Лукасевичем (Lukasiewicz J., Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic, Oxford, London and New York, 1951) система B_3, формализующая аристотелеву силлогистику. B_3 получается из исчисления высказываний изъятием переменных высказываний и присоединением предметных переменных, постоянных предикатов Aab („все a суть b"), Iab („некоторые a суть b") и схем аксиом: 1) Aaa; 2) $Aab\ \&\ Abc \to Aac$; 3) $Aab\ \&\ Iac \to Icb$; 4) Iaa. Модель системы B_3 называется B_3-алгеброй. B_3-алгебра называется специальной, если ее элементы суть подмножества некоторого множества V и если Aab, Iab означают соответственно $a \subseteq b$, $a \cap b \neq 0$. B_3-алгебра $\mathfrak{B}$ называется квази-изоморфной B_3-алгебре $\mathfrak{B}_1$, если существует отображение $a \to \varphi(a)$ $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_1$, такое, что $Aab \equiv A\varphi(a)\varphi(b)$ и $Iab \equiv I\varphi(a)\varphi(b)$. В работе доказано, что: а) каждая B_3-алгебра квазиизоморфна некоторой специальной B_3-алгебре; б) формула B_3 есть теорема тогда и только тогда, когда она верна в каждой специальной B_3-алгебре, в) B_3 есть разрешимая теория. Аналогичные результаты получены для другой формализации аристотелевой силлогистики, в которой в качестве основных отношений выбраны Aab и операция взятия дополнения к a. А. В. Гладкий

2266. **Жергоновы отношения. Фэрис** (The Gergonne relations. Fariș J. A.), J. Symbolic Logic, 1955, 20, № 3, 207—231 (англ.)

Автор рассматривает формальную систему, тесно связанную с традиционной силлогистикой. Формулами системы являются выражения, получающиеся из формул исчисления высказываний путем замены логических пере-

менных простыми аффирмативными выражениями, т. е. выражениями вида „1*ab*“, „2*ab*“, „3*ab*“, „5*ab*“, где *a* и *b* суть переменные, а „1“, „2“, „3“, „5“ — двуместные функции, которые при истолковании означают соответственно „всякое *a* есть *b* и всякое *b* есть *a*“, „всякое *a* есть *b* и не всякое *b* есть *a*“, „не всякое *a* есть *b* и не всякое *b* есть *a* и некоторое *a* есть *b*“, „ни одно *a* не есть *b*“. Отмечается, что впервые явно рассмотрел эти отношения и понял их важность для теории силлогизмов французский математик Жергон. Автор строит на основе предложенной им системы аксиом таблицу жергоновых силлогизмов. Во второй части работы устанавливается разрешимость рассматриваемой формальной системы. Н. М. Нагорный

2267. Эйлеровская силлогистика. Томас (Eulerian syllogistic. Thomas Ivo), J. Symbolic Logic, 1957, **22**, № 1, 15—16 (англ.)

Автор проводит уменьшение числа исходных функций и аксиом в системе Фэриса (реф. 2266) и показывает, что эта система разрешима при помощи ранее предложенного им метода (Thomas I., Mind, 1952, **41**, 564—566). Н. М. Нагорный

2268. О структуре классической силлогистики. Хертиг (Über die Struktur der klassichen Syllogistik. Härtig Klaus. Wissensch. Z. Martin—Luther—Univ. Halle—Wittenberg. Math. Nat. Reihe, 1953, **2**, 165—189) (нем.)

Изучается традиционная теория категорического силлогизма, рассматриваемая как абстрактная система. Автор отправляется от постулатов и определений, навеянных традиционной теорией, а затем изучает полученную систему математическими методами. Поэтому исследования автора сходны по своему характеру с исследованиями Лукасевича (Lukasiewicz J., Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic, Oxford, 1951), Бохенского (Bochenski I. M., Dominican Studies 1948, **1**, 35—57) и Слупецкого (цитируемого Лукасевичем). Однако утверждается, что работа выполнена автором независимо от этих работ польских математиков. Имеются также некоторые отличия в деталях, которые делают эту работу интересной для лиц, специально занимающихся этим вопросом. H. B. Curry

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 386.

2269. Элементарные исследования антиномий Рассела, Греллинг—Нелсона и Эвбулида. Вальпола (Elementare Untersuchungen der Antinomien von Russell, Grelling—Nelson und Eubulides. Valpola Veli. Theoria, 1953, **19**, 183—188) (нем.)

В случае каждого из упомянутых антиномий автор выводит из „вполне очевидных основных предположений“ (ganz evidenten Grundannahmen) несуществование некоторого понятия, связанного с парадоксом, используя при этом символы исчисления предикатов. Эти выводы, хотя и не являются новыми, но, видимо, получены необычным путем. Имеются „выводы“, в которых референт не находит никакого смысла. H. B. Curry

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 555.

2270. Система суждений «сьядвада». Холдейн (The Syadvada system of predication. Haldane J. B. S.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, **18**, № 1—2, 195—200 (англ.)

Сьядвада — теория джайнской философии, согласно которой всякое суждение считается верным только по отношению к отдельной частной стороне предмета и выражает лишь частные взгляды, с точки зрения которых высказывается данное суждение (Чаттерджи С., Датта Д., Введение в индийскую философию, М., 1955, 77—84). Сьядвада основывается на семи типах суждений (саптабханги-ная), которые позволяют высказывать суждения относительного характера. Автор высказывает соображения о возможности применять подобную систему в научных исследованиях. Н. М. Нагорный

2271. Основы статистики. Махаланобис (The foundations of statistics. Mahalanobis P. C.), Dialectica, 1954, **8**, 95—111 (англ.)

Автор утверждает, что хотя всегда трудно с уверенностью судить о точных значениях логических и философских фраз, которые были в обиходе 1500 или 2500 лет тому назад, тем не менее логика индийской секты „джайна“, называемая сьядвада (syādvada), имеет некоторое отношение к понятиям теории вероятностей и статистики.

Пусть для любой сущности F, G, H соответственно обозначают, что сущность есть, сущности нет, она неописуема или неопределенна. Тогда, согласно сьядваде, следующие $2^3 - 1 = 7$ высказываний взаимно исключают и взаимно исчерпывают друг друга, каждое из этих высказываний имеет ненулевую вероятность: F, G, F, $\& G$, H, $F \& H$, $F, \& G \& H$. Очевидное самопротиворечивое высказывание $F \& G$ вероятно, обозначает, что в некотором смысле сущность существует, в то время как в некотором другом смысле она не существует. Понятие вероятности является только неявным и качественным и выражается словом „может быть“ (syāt).

Согласно логике джайна, ни одно утверждение не является абсолютно истинным; эта точка зрения по крайней мере аналогична тому, что ни одно эмпирическое высказывание не имеет вероятности 1. I. J. Good,

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 437.

2272. Планиметрия и логика. Корт (Plane geometry and plain logic. Court N. A.), Scient. Monthly, 1956, **83**, № 1, 28—34 (англ.)

Статья является конспективным изложением прочитанных автором в 1954 г. двух популярных лекций, которые содержат философские размышления автора об основаниях геометрии и связи планиметрии и логики.

А. А. Фридман

2273. О непротиворечивости в математике. Кёте (On the noncontradictoriness of mathematics. Köthe Gottfried. Gaz. Mat., Lisboa, 1954, **15**, № 58, 1—5) (португ.)

Приводится содержание популярной лекции.

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 438.

2274. Об использовании некоторых символов математической логики в преподавании. Песин И. Н., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 195—200

2275 K. Два очерка по логике. Россер (Deux esquisses de logique. Rosser J. Barkley. Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts, 1955, 69 pp., 900 fr.) (франц.)

Эти „очерки“ основаны на двух коротких сериях лекций, прочитанных автором в Париже в начале 1954 г. Очерки имеют в основном популярный характер и содержат изложение классических результатов, а также много новых недавних результатов, включая некоторые из исследований самого автора.

Первый очерк посвящен комбинаторной логике и ее связи с общими рекурсивными функциями, а также теории λ-конверсий. Рассматривая типы задач, которыми занимается комбинаторная логика, автор доказывает один результат Шёнфинкеля (Schönfinkel) о том, что все комбинации можно получить при помощи сгруппирования S и K. Отсюда следуют две аксиоматические теории комбинаторной логики, принадлежащие соответственно Карри (Curry) и автору. Далее приводится краткое введение в теорию λ-конверсии Чёрча; здесь доказывается, что эта теория эквивалентна слабой аксиоматической теории комбинаторной логики. Детально исследуется связь между λ-конверсией и общими рекурсивными функциями. Материал изложен весьма доходчиво и занимает сравнительно мало места.

Второй очерк посвящен теории моделей. Излагается теорема полноты исчисления предикатов низшей ступени,

однако дедуктивные аспекты доказательства подробно не рассматриваются. Единственное элементарное соотношение, которое допускается, является отношение ε теории множеств, однако хорошо известно, что это ограничение является только кажущимся.

Теорему о полноте автор приписывает Лёвенхейму (Löwenheim) и Сколему (Skolem). Однако, хотя некоторые существенные идеи из статьи Гёделя, посвященной рассматриваемому вопросу, частично предвосхитил Лёвенхейм, тем не менее, по мнению референта, заслуга установления полноты дедуктивной теории исчисления предикатов низшей ступени нужно признать за Гёделем.

Добавляя классы к первоначальным совокупностям языка, автор далее рассматривает более тонкие проблемы, связанные с формализацией теории моделей, особенно с упомянутой теоремой о полноте.

Рассматривается существование ненормальных моделей (включающее, как обычно, индуктивное понимание понятия нормальности). Последняя глава посвящена некоторым вопросам независимости в аксиоматической теории множеств. A. Robinson

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 661.

2276 К. **Язык таксономии. Применение символической логики к изучению систем классификаций. Грегг** (The language of taxonomy. An application of symbolic logic to the study of classificatory systems. Gregg John R. New York, Columbia Univ. Press., 1954, IX. 70 pp., 2.50 doll.) (англ.)

Излагается применение некоторых идей и обозначений математической логики к методологии биологической классификации. В основном используются элементарные понятия из теории множеств и теории отношений. Эти понятия вводятся интуитивно, т. е. без аксиом или без точной формализации. Работа до некоторой степени аналогична работе Вуджера (РЖМат, 1956, 6339). С математической точки зрения работа интересна тем, что в ней приводятся примеры сложных отношений. H. B. Curry

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 209.

2277 К. **Номологические утверждения и допустимые операции. Рейхенбах** (Nomological statements and admissible operations. Reichenbach Hans. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1954, 140 pp., 13.50 florins) (англ.)

Книга содержит изложение теории, известной читателю из книги автора „Элементы символической логики" (Elements of symbolic logic, Macmillan, New York, 1947). Цель автора заключается в "объяснении„ некоторых логических терминов, употребляемых в физических науках в других смыслах, чем в литературе по математической логике. Объяснение касается „операций связи ",т. е. $a \supset b$, в том случае, когда a и b являются утверждениями в физических терминах. Такие методологические термины, как „истинно", „верифицируемость", „синтетический", считаются известными читателю. Имеется следующая градация для истинных утверждений: 1) тавтологии, 2) синтетические номологические утверждения — допустимые и не допустимые; 3) не номологично истинные, но верифицировано истинные; 4) не верифицированно истинные, но фактически истинные (factually true) — допустимые и не допустимые.

Первоначальные номологические утверждения определяются при помощи девяти условий. Эти условия, по определению, должны быть верифицированно истинными и исчерпывающими (exhaustive). Последнее условие кратко выражает, что каждое вычеркивание логического слагаемого в нормальной форме дает утверждение, которое не является верифицированно истинным. Другие номологические утверждения определяются как дедуктивные следствия первоначальных утверждений.

Номологические утверждения, удовлетворяющие некоторому ослабленному условию исчерпаемости (квазиисчерпаемость), называются допустимыми. В гл. 7 „Противофактичность неинтерференции" (Counterfactuals of noninterference) используются вероятность $P(b)$ и относительная вероятность $P(a, b)$.

Если a ложно и b истинно, то противофактичная импликация $a \supset b$ называется допустимой тогда и только тогда, когда a не интерферируется с b, т. е. когда

$$P(a, b) \geqslant P(b).$$

Делается несколько замечаний о границах применимости известных логических теорем, т. е. закона контрапозиции при применении к операциям связи.

Автор не рассматривает никаких методов, позволяющих выяснить вопрос о том, остается ли логический закон справедливым для операций связи или нет. Его результаты важны скорей для логики эмпирических наук, хотя они и ставят перед математической логикой некоторые новые проблемы. S. Jaskowski

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 845.

2278 К. **Введение в дедуктивную логику. Лебланк** (An introduction to deductive logic. Leblanc Hugués. New York, John Wiley and Sons, Inc., London, Chapman and Hall, Ltd., 1955. XII, 244 pp., 4.75 doll.) (англ.)

Эта книга содержит весь материал по начальному курсу логики, предназначенному для подготовленного читателя. Имеются весьма содержательные упражнения и хорошо составленная библиография. E. W. Beth

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 661.

2279 К. **Введение в символическую логику. Бассон, О'Коннор** (Introduction to symbolic logic. Basson A. H., O'Connor D. J. University Tutorial Press, Ltd., London, 1953, VIII, 169 pp., 7 sh, 6 d) (англ.)

2280 К. **Проблемы конструктивного направления в математике. I. Сб. работ. Ред. Шанин Н. А.,** (Тр. Матем. ин-та, АН СССР, 52). М.-Л., 1958, 349 стр., 18 р. 55 к.

2281 Д. **Степени вычислимости. Шапиро** (Degrees of computability. Shapiro Norman. — Doct. diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2231 (англ.)

Автореферат диссертации на соискание степени доктора философии. Диссертация посвящена распространению иерархии Клини на частичные отношения и установлению мест в этой иерархии проблем разрешения некоторых классов действительных чисел и рекурсивных функций (рассматриваемых в определенной системе обозначений) в зависимости от свойств этих классов.

В. А. Успенский

См. также: 2156, 2159, 2417

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

2282. **Об оценке рациональных тригонометрических сумм. Коробов Н. М.,** Докл. АН СССР, 1958, 118, № 2, 231—232

Сообщается о доказательстве теоремы: Если $S = \sum_{x=1}^{P} \exp(2\pi i f(x)/q)$ и $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами, то для $P = q^{1/r}$ на интервале $1 < r < n + 1$ выполняется оценка

$$|S| < CP^{1-\frac{\alpha r(n+1-r)}{n^4 l^3}}$$

где $l = \ln 2n(n+1-r)^{-1}$. А. И. Виноградов

2283. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$. Виноградов И. М., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 2. 161—164

Автор улучшает свой метод тригонометрических сумм и применяет к оценке $\zeta(1+it)$. Получена новая теорема:

Пусть a — целое, $a < a_1 \leqslant 2a$, $t = a^{n-\Theta}$, $0 < \Theta < 1$, $n_0 = 8n$, $a > \exp\{5000\, n_0^2\}$, $n \geqslant 7$.

$$S = \sum_{a<x<a_1} \exp\{2\pi i f(x)\}, \quad f(x) = -(2\pi)^{-1} t \ln x.$$

Тогда имеем

$$|S| < 1{,}04\, a^{1-\rho}, \quad \rho = 1/65300\, n_0^2.$$

Как следствие этой теоремы получается оценка

$$\zeta(1+it) = O\left((\ln t)^{2/3}\right)$$

и отсутствие нулей $\zeta(\sigma+it)$ в полуплоскости $\sigma > 1 - A/(\ln t)^{2/3}$. Улучшения достигнуты за счет использования особенностей коэффициентов разложения логарифмического ряда и увеличения числа переменных в системе уравнений И. М. Виноградова до величины порядка n^4. А. И. Виноградов

2284. Новые теоретико-числовые оценки. Коробов Н. М., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 433—434

Сообщается о доказательстве новой теоремы: Если для какого-нибудь фиксированного δ из интервала $0 < \delta < 0{,}5$ выполняется условие $n+\delta \leqslant r \leqslant n+1-\delta$, где r определено равенством $P^r = |a_{n+1}^{-1}|$, то существует абсолютная константа C и константа $\alpha = \alpha(\delta)$ такие, что

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} \exp(2\pi i f(x))\right| < C P^{1-\alpha/(n\ln n)^{2,5}}$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}$ и α_ν $(\nu = 1, \ldots, n+1)$ — произвольные действительные числа.

Дается ряд приложений этой теоремы к задачам аналитической теории чисел и распределению нулей $\zeta(s)$ Римана. А. И. Виноградов

2285. О проблеме Варинга. Дун Гуан-чан (Tong Kwang-chang), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 4, 602—607 (кит.; рез. англ.)

Получен следующий результат:

$$G(n) < n(3\ln n + 9), \text{ если } n = 2^m,$$

$$G(n) < n(3\ln n + 7), \text{ если } n \neq 2^m.$$

Результат И. М. Виноградова: $G(n) < n(3\ln n + 11)$. А. И. Виноградов

2286. Проблемы Эскотта—Тарри и Пруе—Тарри. Палама (I problemi di Escott—Tarry e di Prouhet—Tarry. Palamà Giuseppe), Giorn. mat. Battaglini, 1957, 85, № 2, 271—295 (итал.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 7615). Даются модели решений многостепенных систем и их приложения к проблеме Варинга, суммé k-х степеней, проблеме приводимости многочленов, вычислению логарифмов и числа π. В V главе рассматриваются проблемы, аналогичные проблеме Эскотта-Тарри, именно, решение n сравнений: $x_1, x_2, \ldots, x_p \equiv y_1, y_2, \ldots, y_p \pmod q$ при q простом. В. А. Голубев

2287. Разрешимость некоторых диофантовых неравенств. Даничич (The solubility of certain Diophantine inequalities. Danicic I.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 30, 161—176 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{14}$ — отличные от нуля действительные числа, не имеющие один и тот же знак, и пусть λ_1/λ_2 — иррационально. Тогда для любого действительного γ и любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|\lambda_1 x_1^4 + \ldots + \lambda_{14} x_{14}^4 + \gamma| < \varepsilon$$

имеет бесчисленное множество решений в целых положительных $x_1, \ldots, x_{14}$. Г. А. Ломадзе

2288. Определенный интеграл в асимптотической теории разбиения чисел на слагаемые. Райт (A definite integral in the asymptotic theory of partitions. Wright E. M.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 30, 312—320 (англ.)

Оценивается интеграл, относящийся к прежней работе автора (РЖМат, 1958, 78): $I(z) = \int_0^\infty h(u, z)\, du$, где

$$R(z) \neq 0, \; c_2(z) = (z + 3 + z^{-1})/_{24},$$

$$h(u, z) = \frac{1}{u(e^{zu}-1)(e^u-1)} - \frac{1}{zu^3} + \frac{z+1}{2zu^2} - \frac{2c_2(z)}{e^u-1}.$$

Определяется асимптотическая формула для $I(z)$ при малом z, простые выражения, дающие $I(z)$ для всякого действительного положительного z с ошибкой не менее 10^{-5}, и точная формула для $I(z)$ при рациональном z. В. А. Голубев

2289. О представлении достаточно большого четного числа суммой двух почти простых. Ван Юань (On the representation of large even number as a sum of two almost-primes. Wang Yuan), Sci. Rec., 1957, **1**, № 5, 291—295 (англ.)

Доказывается разрешимость уравнения $2N = Q_1 + Q_2$, где сумма простых делителей Q_1 и $Q_2 \leqslant 5$. Эффект достигнут за счет введения в метод А. А. Бухштаба новых оценок, полученных методом А. Сельберга. А. И. Виноградов

2290. О некоторых мультипликативных функциях и проблеме близнецов. Голубев (Sur certaines fonctions multiplicatives et le problème des jumeaux. Golubev V. A.), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 11—20 (франц.)

Функция $\varphi_r(n)$ определяет число пар натуральных чисел a_1, a_2 с данной четной разностью $a_2 - a_1 = r$ между ними и условиями: $(a_2, n) = 1$, $(a_1, n) = 1$, $a_1 \leqslant n$. Доказана мультипликативность функции $\varphi_2(n)$ и выведена формула: $\varphi_r(n) = n\prod_{p_1,\, p_2}(1 - 1/p_1)(1 - 2/p_2)$, где p_1 — общие простые делители n и r, p_2 — остальные простые делители n. Тогда для четного n имеем:

$$\varphi_2(n) = \frac{1}{n}[\varphi(n)]^2 \cdot 2\prod_{p/n}\left[1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right],$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $p > 2$ — простое. Аналогичное соотношение, по-видимому, существует и между $\pi(x)$ и $\pi_2(x)$ — числом близнецов в промежутке от 1 до x. На этом предположении основан далее вывод эвристической формулы для числа близнецов: $\pi_2(x) \sim Cx(\ln x)^{-2}$, где

$$C = 2\prod_{p=3}^{\infty}[1 - 1/(p-1^2)].$$

Даны формулы и таблицы для числа близнецов, а также и для числа троек, четверок и пятерок простых чисел с малыми разностями между ними.

Примечание референта и автора статьи. Формула автора для числа близнецов подтверждает и в некотором смысле уточняет гипотетическую формулу $P_2(n) \sim 2C_2 n/\ln^2 n$, где $2C_2 = 1{,}3203$, приведенную в работе Харди и Литлвуда (Hardy, Littlewood, Acta math., 1923, **44**, 1—70).

Опечатки: 1) В статье ошибочно напечатано не $p=3$, а $p>3$. 2) Стр. 14, 1 строка снизу, напечатано

$$\sum_{d|n}\mu_2(d)=\begin{cases}0, & \text{если } n>1,\\ 1, & \text{если } n=1,\end{cases}$$

а должно быть

$$\sum_{d|n}\mu_2(d)=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ — четное;}\\ 1, & \text{если } n=1, \text{ или } n=p_1^{\alpha}\cdots p_k^{\lambda},\\ & p>2\text{—простое, } k\text{—четное;}\\ -1, & \text{если } n=p_1^{\alpha}\cdots p_k^{\lambda}, \quad p>2\text{— простое,}\\ & k\text{—нечетное.}\end{cases}$$

3) На той же странице, 9 строка снизу, напечатано $\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)n/d$, надо $\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)n/d$. 4) На стр. 15, 2 строка сверху, вместо $\varphi_2(n)=\sum_{d|n}\mu_2(d)^{n/d}$ должно быть $\varphi_2(n)=\sum_{d|n}\mu_2(d)n/d$. Б. А. Кордемский

2291. Существенные компоненты множеств точек решетки. II. Каш (Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen. II. Kasch Friedrich), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 1-2, 53—55 (нем.)

Оценка в теореме 2 части I (РЖМат, 1958, 77) усиливается путем некоторого увеличения параметра c: можно взять, например, $c=\{3(r+1)\}^{-r}\{2r/(r+1)\}$ для $r\geqslant 2$. Понятие асимптотической плотности, определенное в цитированной работе, модифицируется с целью приспособить это понятие для получения оценок, аналогичных теореме Кнезера (РЖМат, 1954, 2849). Б. М. Бредихин

2292. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. Пань Чэн-дун (Pan Cheng-tung), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1958, **4**, № 1, 1—34 (кит.; рез. англ.)

Пусть $P_{\min}(D, l)$ — минимальное простое число в прогрессии $nD+l$; $1\leqslant l\leqslant D-1$, $(l, D)=1$. Доказывается, что: $P_{\min}(D, l)<D^{5448}$. Доказательство базируется на леммах: 1) При $C=1/180$, в области $1-C\ln^{-1}D(|t|+1)\leqslant\sigma\leqslant 1$ нет нулей $L(s, \chi)$ $(s=\sigma+it)$, кроме, может быть, простого вещественного нуля исключительного ряда $L(s, \widetilde{\chi})$ для модуля D.
2) Если $Q(D,\psi)$ — число L-рядов для модуля D, каждый из которых имеет нули в прямоугольнике $1-\psi\ln^{-1}D\leqslant\sigma\leqslant 1$, $|t|\leqslant e^{U\psi}(25\ln D)^{-1}$, где $\psi\in[0, \ln\ln D]$, $U>0$, то:

$$Q(D,\psi)<\begin{cases}5020e^{U\psi}, & 0<\psi\leqslant\frac{1}{50},\\ 10^{14}e^{U\psi}, & \frac{1}{50}<\psi\leqslant\frac{1}{6}\\ e^{(1500+U)\psi}, & \frac{1}{6}<\psi\leqslant 2\\ e^{(2230+U)\psi}, & 2<\psi\leqslant\ln\ln D.\end{cases}$$

3) Если есть исключительный нуль $\widetilde{\beta}$ для модуля D, $\rho_0=\beta_0+it_0$ любой нуль $L(s, \chi)$ $(\chi\neq\chi_1)$, то при условии: $1-\widetilde{\beta}\leqslant A_1\ln^{-1}D(|\tau_0|+1)$ $(A_i>0$ — вычислимые константы) имеем: $\beta_0\leqslant 1-\frac{A_2}{\ln D(|\tau_0|+1)}\ln\frac{A_4}{\widetilde{\delta}\ln D(|\tau_0|+1)}$, $D>A_5$, $\widetilde{\delta}=1-\widetilde{\beta}$. Ю. В. Линник

2293. Обобщения теоремы Дирихле о простых числах. Голубев В. А., Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1958, **3**, № 1, 105—113 (болг.; рез. русск., нем.)

Дается таблица с указанием количества простых чисел — близнецов, содержащихся в прогрессиях вида $210m+a$ от $x_1=11$ до $x_2=8\cdot 10^6$. Продолжена таблица Эйлера простых чисел вида a^2+1 до $a=3500$. Исправлены некоторые ошибки, допущенные другими авторами при рассмотрении простых чисел вида a^2+1, а также полиномов x^2+x+a, дающих относительно большое количество простых чисел при $x=0,1,2,\ldots$

Приводятся таблицы для количества троек простых чисел p, $p+2$, $p+6$ и четверок простых чисел p, $p+2$, $p+6$, $p+8$, содержащихся в арифметических прогрессиях вида $210m+a$ до $x=2\cdot 10^6$.

Без доказательства приводятся некоторые формулы, характеризующие количества упомянутых выше групп простых чисел. Н. В. Гордеев

2294. О наименьшем бесквадратном числе арифметической прогрессии. Прахар (Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe. Prachar Karl), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 2, 173—176 (нем.)

Пусть $Q(x, k, l)$ — количество бесквадратных натуральных чисел $\leqslant x$, сравнимых с l по модулю k, где k — натуральное число, $0\leqslant l<k$ и $(k, l)=1$; $q(k, l)$ — наименьшее из этих бесквадратных чисел.

Выводятся формулы

$$Q(x, k, l)=Axk^{-1}+O(x^{1/2}), \tag{1}$$

где: $A=6\pi^{-2}\prod_{p|k}(1-p^{-2})^{-1}$;

$$Q(x, k, l)=Axk^{-1}+O(x^{1/2}k^{-1/4+\varepsilon}+k^{1/2+\varepsilon});$$

$$q(k, l)<k^{3/2+\varepsilon},$$

причем в (1) константа в $O(\cdots)$ не зависит от k.

Н. В. Гордеев

2295. О числах, свободных от квадратов, с заданными простыми делителями. Канольд (Über quadratfreie Zahlen mit vorgeschriebener Primteileranzahl. Kanold Hans-Joachim), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 46—53 (нем.)

Изучается распределение бесквадратных чисел $m=p_1p_2\cdots p_k$ при фиксированном k. Доказывается, что известное асимптотическое выражение для числа $m\leqslant x$

$$\frac{x}{\ln x}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{1}$$

сохраняется, если наложить дополнительные условия на m. А именно, пусть

$$\sigma_r(n)=\sum_{d|n}d^r, \quad \varphi_r(n)=n^r\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^r}\right)$$

r — фиксированное целое число, тогда и при 4 дополнительных условиях на m:

$$(\sigma_r(m), m)=1, \quad (\varphi_r(m), m)=1,$$

$$p_1>\exp((\ln x^{1/g(x)}), \quad p_k>x^{1-1/\ln\ln x}$$

$g(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, (1) сохраняется.

А. И. Виноградов

2296. Асимптотическая оценка некоторых числовых функций, связанных с числом делителей. Бухштаб А. А., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 45—53

Изучается сумма

$$T_k(x, y) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q(y)}} \tau_k(n).$$

$Q(y)$ — означает множество тех целых чисел $\leqslant x$, все простые делители которых $\leqslant y$.

Доказана теорема: При любом фиксированном $\alpha \geqslant 1$ и $x \to \infty$

$$T_k(x; x^{1/\alpha}) = x \sum_{s=0}^{k-1} b_s \omega_s(\alpha) \ln^s x + O\left(\frac{x}{\ln x}(\ln \ln x)^{k-1}\right),$$

где b_s — некоторые константы, зависящие от s, $\omega_s(\alpha)$ — интегральная функция α.

Метод доказательства элементарный.

А. И. Виноградов

2297. **Заметка о некоторых свойствах функций $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ и $\Theta(n)$. Шинцель, Ван** (A note on some properties of the functions $\varphi(n)$, $\sigma(n)$ and $\Theta(n)$. Schinzel A., Wang Y.), Ann. polon. math., 1958, **4**, № 2, 201—213 (англ.)

Пусть $\varphi(n)$ обозначает функцию Эйлера, $\sigma(n)$ — сумму делителей числа n и $\Theta(n)$ — число делителей n.

Шинцель (РЖМат, 1956, 5713) доказал, что для каждой последовательности из h положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_h$ и для $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа n и n' такие, что

$$\left|\frac{\varphi(n+i)}{\varphi(n+i-1)} - a_i\right| < \varepsilon, \qquad (1)$$

$$\left|\frac{\sigma(n'+i)}{\sigma(n'+i-1)} - a_i\right| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Методом Бруна доказывается, что существуют положительные константы $c = c(a, \varepsilon)$ и $X_0 = X_0(a, \varepsilon)$ такие, что число чисел n, удовлетворяющих неравенству (1) в интервале $1 \leqslant n \leqslant X$, будет больше чем $cX/\log^{h+1} X$ для $X > X_0$.

Аналогичная теорема доказывается относительно числа чисел n'. Вопрос о существовании аналогичного свойства функции $\Theta(n)$ остается открытым, но доказывается теорема, из которой для $\Theta(n)$ получается неравенство, аналогичное (1).

В. А. Голубев

2298. **О некоторых арифметических функциях. Деланж** (On some arithmetical functions. Delange Hubert), Illinois J. Math., 1958, **2**, № 1, 81—87 (англ.)

Пусть $\omega(n)$ — число простых делителей n, λ — некоторое иррациональное число. Дается новое доказательство теоремы о равномерном распределении последовательности $\lambda\omega(n)$. Вместо свойств нулей $\zeta(s)$ в прежнем доказательстве, применяются некоторые тауберовы теоремы. Даются обобщения этой теоремы на некоторые специальные последовательности, удовлетворяющие суммарным условиям. Наряду с $\omega(n)$ рассмотрена также функция $\Omega(n)$ — число всех простых делителей n и для нее доказаны соответствующие теоремы.

А. И. Виноградов

2299. **О нормальном распределении аддитивных арифметических функций. Вилкас** (Adityviniu aritmetiniu funkciju normalinio pasiskirstymo klausimu. Vilkas E.), Уч. зап. Вильнюсск. ун-та. Сер. матем., физ. и хим. н., Mokslo darbai. Vilniaus univ. Matem., fiz. ir chem. mokslu ser., 1957, **7**, 23—31 (лит.; рез. русск.)

Рассматриваются вещественные сильно аддитивные арифметические функции $f(m)$. Пусть

$$A_n = \sum_{p<n} f(p)/p, \qquad B_n = \sum_{p<n} f^2(p)/p,$$

где суммы берутся по всем простым $p < n$; $\varkappa_n(x)$ и $\lambda_n(x)$ — число натуральных $m < n$, удовлетворяющих соответственно условиям $f(m) < A_n + xB_n^{1/2}$, $f(m) - f(m+1) < x(2B_m)^{1/2}$. Из теорем референта (РЖМат, 1956, 1116, 1117) следует: если сумма $B_n^{-1}\sum f^2(p)/p$, где суммируется по всем простым $p < n$, для которых $|f(p)| > \varepsilon B_n$, для любого $\varepsilon > 0$ стремится к 0 при $n \to \infty$ (аналог условия Линдеберга), то $\varkappa_n(x)/n$ и $\lambda_n(x)/n$ стремятся к нормальному закону $(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)\,du$ при $n \to \infty$. Дается новое, более элементарное доказательство этих теорем, основанное на методе моментов.

И. П. Кубилюс

2300. **О распределении значений одного класса арифметических функций. Шао Пин-Тсунг**, Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 9, 559—562

Формулируются три теоремы, обобщающие результаты Шинцеля, Серпинского и Ванга (РЖМат, 1956, 1957, 1958; 1957, 2886); так, для некоторого достаточно широкого класса арифметических функций $G_S(n)$, указывается оценка снизу для числа решений в целых числах $1 \leqslant n \leqslant x$ системы неравенств

$$\left|\frac{G_S(n+\nu)}{G_S(n+\nu+1)} - \delta_\nu\right| < \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1),$$

где δ_ν и ε — произвольные неотрицательные числа.

Доказательства не приведены. Отмечается, что часть этих результатов получена Шинцелем и Ваном.

Г. В. Емельянов

2301. **О последовательности целых чисел, порожденных методом решета. Часть I. Эрдёш, Яботинский** (On sequences of integers generated by a sieving process. Erdös Paul, Jabotinsky Eri), Proc. Koninkl. nederl. akad. wentensch., 1958, **A61**, № 1, 115—123; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 115—123 (англ.)

Вводится понятие о процессе высеивания чисел, несколько отличном от обычного „решета" Эратосфена.

Задаются две последовательности целых чисел

$$B \equiv b_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad b_k \geqslant 2 \quad \text{и} \quad A^{(1)} \equiv a_k^{(1)}.$$

Последовательность $A^{(i+1)}$ задается индуктивным путем а именно, из $A^{(i)}$ выбрасываются все числа вида $a^{(i)}_{1+mb_i}$.

Изучается распределение членов $a_k = a_1^{(k)}$ для двух последовательностей $B: b_k = k+1$ и $b_k = a_k$. Для обоих случаев при условии, что $a_k^{(1)} = k$, получены асимптотические выражения для a_k. В случае $b_k = k+1$ получено:

$$a_k = \frac{k^2}{\pi} + O(k^{4/3}).$$

Для $b_k = a_k$ $a_k \sim k \ln k$. Метод работы элементарный.

А. И. Виноградов

2302. **О последовательности целых чисел, порожденных методом решета. Часть II. Эрдёш, Яботинский** (On sequences of integers generated by a sieving process. Erdös Paul, Jabotinsky Eri), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1,

124—128; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 124—128 (англ.)

Продолжается изучение последовательности a_k для случая $b_k = a_k$. Получено более точное асимптотическое выражение для a_k:

$$a_k = k\ln k + \frac{1}{2}\, k\ln\ln^2 k + (2-\gamma)\, k\ln\ln k + o(k\ln\ln k).$$

Метод работы элементарный. А. И. Виноградов

2303. Случайное решето. Хокинс (The random sieve. Hawkins David), Math. Mag., 1957, **31**, № 1, 1—3 (англ.)

Предлагается следующая стохастическая модель простых чисел. Пишем натуральный ряд и зачеркиваем 1. Оставляем 2, а каждое последующее число вычеркиваем с вероятностью 1/2. Пусть P_2 — первое невычеркнутое после 2 число. Оставляем P_2 и вычеркиваем каждое последующее с вероятностью P_2^{-1}. Затем берем первое невычеркнутое число после P_2 число P_3 и вычеркиваем последующие числа с вероятностью P_3^{-1} и т. д. Числа $P_1=2, P_2, P_3, \ldots$ можно рассматривать как случайные простые числа. Они обладают рядом свойств простых чисел. Рассматриваются и другие случайные способы отсеивания. Обсуждается вопрос о возможности использования чисел $P_1, P_2, \ldots$ для эвристического обнаруживания закономерностей распределения простых чисел.

И. П. Кубилюс

2304. Изолированные простые числа на интервале. Климов Н. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 154—162

Обобщается теорема Серпинского-Вальфиша об изолированных простых числах на прогрессии и изучаются некоторые специальные множества простых чисел.

А. И. Виноградов

2305. О некоторых ламбертовых рядах. I. Обобщенная модулярная функция $\eta(\tau)$ и ее дедекиндова формула преобразования. Миколаш (Über gewisse Lambertsche Reihen, I: Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\tau)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel. Mikolas Mikklós), Math. Z., 1957, **68**, № 1, 100—110 (нем.)

Пусть $\eta(\tau) = \exp\frac{\pi i \tau}{12}\prod_{m=1}^{\infty}(1-\exp 2\pi i m\tau)$, комплексное $\omega \neq 0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \neq nz^{-1}$, $\mathrm{Im} z > 0$; $e(x) = \exp 2\pi i \cdot x$. Полагаем: $G(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-\omega)^{-1}x^n(1-x^n)^{-1}$; ряд сходится для $|x|<1$. $\widetilde{G}(\tau, \omega) = G(\exp 2\pi i\tau, \omega)$, $\widetilde{Q}(\tau, \omega) = \widetilde{G}(\tau, \omega) + \widetilde{G}(\tau, -\omega)$. Автор доказывает тождество:

$$\widetilde{Q}(k^{-1}(h+z), \omega) - \widetilde{Q}(k^{-1}(h'-z^{-1}), z\omega) = \frac{1}{2}(Y(\omega) - Y(z\omega)) + \ln z + 2\pi i \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) + \pi i[(e(\omega)-1)^{-1} + (e(z\omega)-1)^{-1}] - k(2\pi i)^{-1}\omega^{-1}(z\omega)^{-1},$$

где k — натуральное; h, h' — целые, $(k, h) = 1$, $hh' \equiv -1 \pmod k$, $Y(\omega) = \Gamma'(\omega)/\Gamma(\omega) + \Gamma'(-\omega)/\Gamma(-\omega)$

$$\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) = (e(\omega)-1)^{-1}(e(z\omega)-1)^{-1}\sum_{\lambda=0}^{k-1}\exp(\omega\lambda h/k + z\omega\lambda/k).$$

В частности, для $h = h' = 0$, $k = 1$ имеем:

$$\widetilde{Q}(z, \omega) - \widetilde{Q}\left(-\frac{1}{z}, z\omega\right) = \frac{1}{2}(Y(\omega) - Y(z\omega)) + \ln(-zi) - \frac{1}{2}\pi i \operatorname{ctg}\pi\omega \operatorname{ctg}\pi z\omega - (2\pi i\omega\cdot z\omega)^{-1} \quad (1')$$

С помощью тождества (1) автор получает ряд соотношений между суммами Дедекинда.

Например, если положить $\omega \to \infty$, то получаем:

$$\ln\eta(k^{-1}(h'-z^{-1})) - \ln\eta(h+z)k^{-1} = \frac{1}{2}\ln z + \pi i s(h,k) + \pi i(12k)^{-1}(h'-h) - \frac{\pi i}{4},$$

где $s(h, k)$ — сумма Дедекинда. (1′) дает: $\eta(-z^{-1}) = \eta(z)\sqrt{-zi}$. Пусть далее величина $s_{m,n}\left(\begin{matrix}ab\\c\end{matrix}\right)$ определяется тождеством

$$s_{m,n}\left(\begin{matrix}ab\\c\end{matrix}\right) = \sum_{\lambda=0}^{c-1} B_m(\overline{\lambda a/c})\cdot B_n(\overline{\lambda b/c}),$$

где $B_n(x)$ — полином Бернулли, $m, n = 0, 1, 2\ldots$. Используя унимодулярные линейные преобразования переменного τ в $\widetilde{Q}(\tau, \omega)$, автор получает тождество

$$s_{11}\left(\begin{matrix}bc\\a\end{matrix}\right) + s_{11}\left(\begin{matrix}ca\\b\end{matrix}\right) + s_{11}\left(\begin{matrix}ab\\c\end{matrix}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)$$

для $abc > 0$; $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$; для $a = 1$; $b = h$; $c = k$ получаем известный закон взаимности Дедекинда: $12s(h, k) + 12s(k, h) = -3 + hk^{-1} + kh^{-1} + (kh)^{-1}$. Кроме того, автор получает обобщение некоторых результатов Апостола (T. M. Apostol) и Карлица (L. Carlitz)

Н. Г. Чудаков

2306. Представление эрмитовых модулярных форм с помощью рядов Пуанкаре. Браун (Darstellung Hermitischer Modulformen durch Poincarésche Reihen. Braun Hel), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 1—2, 9—37 (нем.)

Доказывается теорема о представлении эрмитовых модулярных форм в виде конечной линейной комбинации рядов Пуанкаре. Г. А. Ломадзе

2307. О распределении дробных долей показательной функции. Пятецкий-Шапиро И. И., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 317—322

Усиливаются предыдущие результаты автора (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951, **15**, 47—52) и А. Г. Постникова (Докл. АНСССР, 1952, **86**, 473—476). Пусть α — вещественное число, $q > 1$ целое число, $P_\nu(\alpha, \Delta)$ — число дробных долей $\{\alpha q^k\}$ с $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$, принадлежащих интервалу $\Delta \subset (0, 1)$, $|\Delta|$ — длина интервала Δ, $\varphi(t)$ — монотонная функция, определенная на отрезке $[0,1]$. Если $\lim \inf_{t\to 0}\varphi(t)\, t^{\varepsilon-1} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и существует такая постоянная C, что для любого интервала Δ

$$\lim_{\nu\to\infty}\sup P_\nu(\alpha, \Delta) \leqslant C\varphi(|\Delta|), \quad (1)$$

то последовательность $\{\alpha q^k\}$ равномерно распределена. Если же $\lim \inf_{t\to 0}\varphi(t)\, t^{\varepsilon-1} > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то всегда можно найти такое α, что (1) выполняется, однако дробные доли $\{\alpha q^k\}$ распределены неравномерно. И. П. Кубилюс

2308. О дробных долях степеней рациональных чисел. II. Малер (On the fractional parts of the powers of a rational number. (II). Mahler K.), Mathematika, 1957, **4**, № 8, 122—124 (англ.)

Ранее автором (Acta arithmetica, 1938, 3, 89—93) была доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть u и v — взаимно простые целые числа $u > v \geqslant 2$, а ε — произвольное положительное число, и предположим, что неравенство

$$\left|\left(\frac{u}{v}\right)^n - (\text{ближайшее целое})\right| < e^{-\varepsilon n} \qquad (1)$$

удовлетворяется для бесконечной последовательности $n_1, n_2, \ldots$ натуральных значений n.

Тогда $\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty$.

В реферируемой статье автор показывает, что, пользуясь методом Рота (РЖМат, 1956, 7844), можно получить более сильный результат.

Теорема 2. Пусть u, v и ε удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда неравенство (1) имеет место не более чем для конечного числа натуральных значений n.

Доказательство теоремы 2 автор выводит из теоремы Райдаута (РЖМат., 1959, 110). А. Б. Шидловский

2309. О проблеме приближения алгебраических чисел рациональными. Гельфонд А. О., Матем. просвещение, 1957, вып. 2, 35—50

В популярной форме излагаются первоначальные сведения из теории алгебраических чисел, теории приближения иррациональных чисел цепными дробями и теории алгебраических чисел рациональными числами. Затем дается обзор результатов, полученных в теории приближения алгебраических чисел рациональными по настоящее время. Заканчивается статья доказательством теоремы Туэ, являющейся приложением этой теории к решению уравнений в целых числах.

А. Б. Шидловский

2310. Диофантова проблема Перрона. Ван-дер-Варден (Ein diophantisches Problem von O. Perron. Van der Waerden B. L.), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 54—58 (нем.)

Перрон (РЖМат, 1957, 8408) изучает минимум функции $f(x) = |a - x|\,|b - x|$, где a и b — действительные числа, x пробегает целые числа, причем величина $b - a = c$ постоянна. В данной работе изучается функция $G(c) = \operatorname{Max} M(c,d)$ для всех действительных d, где $a = d - c/2$, $b = d + c/2$ и $M(c,d) = \operatorname{Min} f(x)$ для целых x.

Вычисляются функции $G(c)$ и те значения x, которые реализуют минимум $f(x)$ и соответствуют значениям d, реализующим максимум $M(c,d)$. М. А. Пробст

2311. О некоторых точных неравенствах диофантовых приближений линейных форм. Обрешков (Върху някои точни неравенства за диофантовите приближения на линейните форми. Обрешков Н.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1957, **2**, № 2, 19—44 (болг.; рез. русск., франц.)

Пусть α и β — произвольные действительные числа, N — любое число $\geqslant 1$; x, y, z — целые, не равные одновременно нулю, причем $|x| \leqslant N$, $|y| \leqslant N$, $|z| \leqslant N$. Борель доказал, что всегда существует тройка чисел x, y, z, удовлетворяющих указанным выше условиям и неравенству

$$|\alpha x + \beta y + z| < \Theta \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{N^2},$$

где Θ — постоянная, не зависящая от α, β и N. Устанавливается, что значение Θ точно равно единице. Доказано также другое неравенство для диофантовых приближений линейных форм с n переменными. А. И. Попов

2312. О целых точках в болеемерных выпуклых телах. Крупичка Сватоплук, Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 4, 524—552 (рез. нем.)

Пусть $A(x)$ обозначает число целых точек в действительном r-мерном эллипсоиде $Q(u) \leqslant x$, $r \geqslant 2$. $V(x)$ обозначает объем этого эллипсоида и $P(x) = A(x) - V(x)$. Тогда, как известно, имеет место верхняя оценка $P(x) = O(x^{r|2-r|(r+1)})$ и нижняя оценка $P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$.

Ярник (Jarník, V. O mřížových bodech v rovině. Rozpravy II. tř. Čes. Akademie věd a umění 1924, Praha) показал, что имеют место подобные оценки для плоских областей ($r = 2$), ограниченных более общими выпуклыми кривыми.

Автор обобщает результаты Ярника и показывает, что аналогичные оценки имеют место для целых точек в областях, ограниченных выпуклыми гиперповерхностями.

Пусть $r \geqslant 2$ — натуральное число. Точки r-мерного пространства E_r будем обозначать через $u = (u_1, \ldots, u_r)$. Пусть $K \subset E_r$ — выпуклое тело (т. е. компактное выпуклое множество), содержащее начало координат $(0, 0, \ldots, 0)$ в качестве внутренней точки; L — выпуклая гиперповерхность, граница тела K. Для $x \geqslant 0$ символ $K(x)$, соответственно $L(x)$, обозначает множество точек $(\sqrt{x}\,u_1, \sqrt{x}\,u_2, \ldots, \sqrt{x}\,u_r)$, где $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in K$, соответственно $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in L$. Функция $Q(u)$ определяется следующим образом: $Q(u) = 1$ для $u \in L$, $Q(\sqrt{x}\,u_1, \sqrt{x}\,u_2, \ldots, \sqrt{x}\,u_r) = x\,Q(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ для $x \geqslant 0$.

Обозначим теми же буквами соответственно объем тела $K(x)$ и число целых точек в теле $K(x)$ через $V(x)$ и $A(x)$. Пусть снова $P(x) = A(x) - V(x)$. Верхняя и нижняя оценки для $P(x)$ даются теоремами:

Теорема 4. Для целых $r \geqslant 2$

$$A(x) = V(x) + O(x^{r|2-r|(r+1)}), \quad x \to \infty.$$

Теорема 5. Существует $\gamma > 0$ и последовательность $0 < x_1 < x_2 < \ldots$ такая, что

$$x_k = k^2 \pi^2 / 4\lambda_1 + O(k), \quad k \to \infty,$$

k — целые числа, и для всех достаточно больших k

$$P(x_{2k}) > \gamma x_{2k}^{(r-1)/4}, \quad P(x_{2k+1}) < -\gamma x_{2k+1}^{(r-1)/4}$$

Теорема 6. Положим $P^+(x) = \operatorname{Max}(P(x), 0)$,

$$P^-(x) = \operatorname{Max}(-P(x), 0).$$

Тогда существует $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что

$$\int_0^x P^+(y)\,dy > C_1 x^{(r+3)/4}, \quad \int_0^x P^-(y)\,dy > C_1 x^{(r+3)/4}$$

для $x > C_2$. А. П. Лурсманашвили

Примечание редакции. Слово „болеемерные" следует понимать в смысле „многомерные".

2313. Два вопроса о линейной форме с целыми коэффициентами. Лу Вэнь-дуань, У Чан-цзю. Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ) Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 2, 151—171 (кит.; рез. русск.)

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — натуральные числа, $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$, $D_i = (a_1, a_2, \ldots, a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и

$$G_k = \sum_{i=2}^{k} a_i D_{i-1} D_i^{-1} - \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Рассматривается вопрос о нахождении наибольшего значения M_k, которое не может быть представлено в виде

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k, \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — целые неотрицательные числа. Основные результаты: 1) $M_k = G_k$ тогда и только тогда, когда $a_i D_{i-1} D_i^{-1}$ может быть представлено в виде $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{i-1} x_{i-1}$, где $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_{i-1} \geqslant 0$, $i = 3, 4, \ldots, k$ (теорема 3); 2) для других случаев дана верхняя граница для M_k (теорема 5).

Далее исследуется вопрос о нахождении числа N_k чисел, которые не могут быть представлены в виде (1). Теорема 6 дает верхнюю и нижнюю границы для N_k:

$$(M_k + 1)/2 \leqslant N_k \leqslant (G_k + 1)/2.$$

В теореме 8 доказывается, что $N_k = (G_k + 1)/2$ тогда и только тогда, когда $a_i D_{i-1} D_i^{-1}$ удовлетворяет условию теоремы 3. В. А. Голубев

2314. Линейные диофантовы уравнения. Браун (Linear Diophantine equations. Brown Arthur B.), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 215—220 (англ.)

На примерах объясняются 6 элементарных методов решения в целых числах линейного уравнения или системы линейных уравнений с целочисленными коэффициентами. Дана теорема Веблена и Франклина, выражающая условия разрешимости системы уравнений первой степени в целых числах. В. А. Голубев

2315. Еще одно доказательство формулы Сельберга для классов идеалов mod $\mathfrak{f}$ в алгебраических полях. Ригер (Ein weiterer Beweis der Selbergschen Formel für Idealklassen mod $\mathfrak{f}$ in algebraischen Zahlkörpern. Rieger G. J.), Math. Ann., 1958, **134**, № 5, 403—407 (нем.)

Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — простые идеалы в алгебраическом поле K; $\mathfrak{f}$ — идеал в поле K; $\mathfrak{S}$ — класс идеалов по модулю $\mathfrak{f}$, взаимно простых с $\mathfrak{f}$; $h(\mathfrak{f})$ — количество классов в K, на которые разбиваются идеалы, взаимно простые с $\mathfrak{f}$; $\mathfrak{N}\mathfrak{q}$ — норма идеала $\mathfrak{q}$. Дается новое доказательство теоремы:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqslant x \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}}} \log^2 \mathfrak{N}\mathfrak{p} + \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{p}\mathfrak{q} \leqslant x \\ \mathfrak{p}\mathfrak{q} \in \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}}} \log \mathfrak{N}\mathfrak{p} \log \mathfrak{N}\mathfrak{q} = \frac{2}{h(\mathfrak{f})} x \log x + O(x),$$

где x — положительное вещественное число с условием $x \to \infty$, причем константа $O(x)$ зависит только от K и $\mathfrak{f}$.

Доказательство теоремы приводится без использования средств математического анализа и сходно с доказательством А. Сельберга формулы

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \log^2 p + \sum_{\substack{pq \leqslant x \\ pq \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \log p \log q = \frac{2}{\varphi(x)} x \log x + O(x),$$

где p, q — простые числа, $(k, l) = 1$, $\varphi(x)$ — функция Эйлера. Н. В. Гордеев

2316. Взвешенные разбиения для эрмитовых матриц над конечным полем. Ходжес (Weighted partitions for Hermitian matrices over a finite field. Hodges John H.), Math. Nachr., 1958, **17**, № 1-2, 93—100 (англ.)

Пусть A — неособенная эрмитова матрица порядка m, B — эрмитова матрица порядка t, X — произвольная $m \times t$ матрица, U — $m \times t$ матрица, удовлетворяющая равенству $U^*AU = B$; все матрицы состоят из элементов конечного поля $GF(p^{2n})$.

Пусть далее

$$e(a) = \exp\left(\frac{2\pi i t(a)}{p}\right), \quad t(a) = a + a^p + \ldots + a^{p^{n-1}},$$

$a \in GF(p^n)$, $\sigma(A)$ — след матрицы A (очевидно, $\sigma(A) \in GF(p^n)$),

$$S = S(B, X, A) = \sum_{U^*AU = B} e(\sigma(X^*U + U^*X)),$$

$K_t(B, W) = \sum_{|C| \neq 0} e\{\sigma(BC + C^{-1}W)\}$ — обобщенная сумма Клоостермана (B, W — эрмитовы матрицы порядка t над полем $GF(p^{2n})$, C — неособенная эрмитова порядка t матрица над тем же полем). Доказывается (теорема 5), что S выражается через обобщенные суммы Клоостермана.

Устанавливаются некоторые свойства обобщенных сумм Клоостермана. Например, доказывается (теорема 8), что

$$\sum_B K_t(B_1 + B, W_1) K_t(B_2 - B, W_2) = p^{nt^2} K_t(B_1 + B_2, W_1 + W_2),$$

где B_1, B_2, W_1, W_2 — фиксированные эрмитовы матрицы порядка t над полем Галуа $GF(p^{2n})$. Суммирование ведется по всем эрмитовым матрицам B над тем же полем. Б. В. Левин

2317. Непостоянная матричная подстановка в алгебраическом способе тайнописи. Левин (Variable matrix substitution in algebraic cryptography. Levine Jack), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 170—179 (англ.)

Установлено однозначное соответствие (эквивалент) между всеми 26 буквами латинского алфавита и числами натурального ряда, включая нуль. Шифруемый текст, таким образом, преобразуется в числовую последовательность p_{ij}, которая затем произвольно рассекается на части $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}, p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n}, \ldots$ Каждая такая группа чисел $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}$ используется как совокупность значений для x_j в заранее обусловленной системе равенств $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,(\mathrm{mod}\, 26)$, $i = 1, \ldots, n$, где числовые коэффициенты a_{ij} подобраны так, что определитель $|a_{ij}|$ и 26 — взаимно простые числа. Каждый вычет по модулю 26 совокупности чисел $y_1, \ldots, y_n$ вновь преобразуется в его буквенный эквивалент. Получается зашифрованный текст. Для дешифровки текста действуют в обратном порядке, разрешив систему обусловленных равенств относительно x. Пусть

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{in} \end{bmatrix} \text{ и } C_i = \begin{bmatrix} c_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{in} \end{bmatrix} \text{ — матрицы, составленные из}$$

чисел i-й группы значений x и соответствующих значений y, тогда

$$C_i \equiv AP_i \,(\mathrm{mod}\, 26), \text{ где } A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Предлагается усложнение шифра за счет замены способа фиксированных подстановок $C_i \equiv AP_i \,(\mathrm{mod}\, 26)$ способами непостоянных подстановок: 1а). $C_i \equiv AP_i + BC_{i-1}$

где C_0 выбрано заранее, а B — матрица из $n \times n$ фиксированных чисел b_{ij}; 1б). $C_i \equiv AP_i + BP_{i-1}$, P_0 — выбрано заранее. 2). Вместо фиксированных элементов a_{ij} матрицы A вводятся какие-либо многочленные функции параметров $t, u, v, \ldots$ при условии, что определитель $|A|$ матрицы A не зависит от параметров, а его вычет по модулю 26 и модуль — взаимно простые числа. Приведены примеры. Б. А. Кордемский

2318. Диофантова проблема, не имеющая решения. Кемпбелл (Diophantine problems having no solution. Campbell J. G.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 204 (англ.)

Изложено очевидное утверждение о том, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i^{r_i(p-1)} = B, \qquad (1)$$

в котором $A_i > 0$, $B > 0$, $r_i > 0$ — данные целые рациональные числа, x_i — неизвестные целые рациональные, p — простое натуральное число, — не имеет решений, если $B - S_i \not\equiv 0 \pmod p$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1)$ и S_i — всевозможные суммы из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с $k \leqslant n$ членами (например: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n, 0 + A_2 + \ldots + A_n, A_1 + 0 + A_3 + \ldots + A_n, \ldots$ и т. д.). П. Н. Реморов

2319. Теорема о непрерывных дробях. Рейнер (A theorem on continued fractions. Reiner Irving), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1111—1113 (англ.)

Пусть $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ обозначает непрерывную дробь, у которой неполные частные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат полю K. Тогда числитель P и знаменатель Q непрерывной дроби можно определить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$ или кратко $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \sim P/Q$.

Пусть K — тело и $K[x]$ — кольцо полиномов от одного неизвестного с коэффициентами из K. Для $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K[x]$ определим $[f_1, f_2, \ldots, f_n] \sim P/Q$, где

$$\begin{pmatrix} f_1 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_2 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} f_n 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Доказывается теорема: Пусть $f \to f^*$ обозначает гомоморфизм $K[x]$ в себя, который оставляет на месте элементы поля K и $(af)^* = af^*$, где $a \in K$. Если $[f_1, f_2, \ldots, f_n] \sim P/Q$, $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$, то $[f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*] \sim P/Q$, где $P, Q \in K$. М. А. Пробст

2320. К принципу «ящиков» в линейных интервалах. Шёнхаге (Zum Schubfächerprinzip im linearen Intervall. Schönhage Arnold), Arch. Math., 1957, **8**, № 5, 327—329 (нем.)

Рассматриваются все последовательности $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ с условием $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, причем $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Пусть u_n — длина наименьшего интервала из тех интервалов, на которые разбивается $[0,1]$ точками последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $\omega = \sup\{\lim_{n\to\infty}(nu_n)\}$. Доказывается, что $\omega = 1/\ln 4$. Н. В. Гордеев

2321. Исправление к моей статье «Об уточнении принципа разбиения линейного интервала». Островский (Bemerkungen zu meiner Mitteilung: Eine Verschärfung des Schubfächerprinzips in einem linearen Intervall. Ostrowski Alexander), Arch. Math., 1957, **8**, № 5, 330 (нем.)

См. РЖМат, 1958, 2701.

2322. Исследования относительно нечетных совершенных чисел. Чжан Ши-сюнь (Chang Shih-Hsun), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 2, 173—188 (кит.; рез. нем.)

Доказывается теорема: Пусть $n = p^a q_1^{q_1^{a_1}-1} q_2^{q_1^{a_2}-1} \ldots$ $\ldots q_r^{q_1^{a}r-1}$ — каноническое разложение нечётного совершенного числа, где $p, q_1, q_2, \ldots, q_r$ — различные простые числа с натуральными экспонентами a, a_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Пусть m и M — наименьший и наибольший из показателей $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Если $h - 1$ есть число чисел q_i, которые удовлетворяют условию $q_i \equiv 1 \pmod{q_1}$, то должно быть:

$$h \leqslant (q_1^q - 1)/m + 1,\ r \leqslant [a + (h-1)(q_1^M - 1)]/m.$$

Дано несколько следствий, например: Если $n = p^a q_1^6 q_2^6 \ldots$ $\ldots q_r^6$ — нечетное число, то оно не может быть совершенным. В. А. Голубев

2323. Об одном предположении Серпинского о возможности в натуральных числах выражения $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. Палама (Su di una congettura di Sierpiński relativa alla possibilità in numeri naturali della $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 65—72 (итал.; рез. англ.)

Серпинский показал, что равенство $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$ возможно в натуральных числах, если $1 < n \leqslant 1000$. Доказывается, что данное равенство возможно для всех натуральных $n \neq 1260m + 1$ и для $n = 1260m + 1$ при $m < 732$, т. е. для натуральных $n \leqslant 922321$. В. А. Голубев

2324. Замечательные квадраты. Тебо (Carrés parfaits remarquables. Thébault V.), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 49—52 (франц.)

Рассматривается способ определения двух натуральных чисел, квадраты которых отличаются лишь перестановкой одной или нескольких цифр, например, $160^2 = 25600$ и $245^2 = 60025$. Дано обобщение для системы счисления с основанием B. В. А. Голубев

2325. Арифметические сравнения с их практическими приложениями. Ло (Arithmetical congruences with practical applications. Law Carol), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 221—227 (англ.)

Популярная статья о сравнениях. Даны теоремы о сравнениях и примеры решений сравнений с одним неизвестным, а также их применение к определению дней недели календаря. В. А. Голубев

2326. Коэффициенты $\cosh x/\cos x$ и заметка о коэффициентах Карлица для $\sinh x/\sin x$. Ганди (The coefficients of $\dfrac{\cosh x}{\cos x}$ and a note on Carlitz's coefficients of $\dfrac{\sinh x}{\sin x}$. Gàndhi J. M.), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 185—191 (англ.)

Доказываются следующие свойства коэффициентов разложения в бесконечный ряд отношения

$$\frac{\cosh x}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}:$$

A) все S — положительные четные числа; B) последняя цифра S_{2n} для $n \geqslant 1$ равна 2; C) $S_{4n} \equiv 0 \pmod{4n-1}$, если $4n - 1$ — простое. Даются способ вычисления S_{2n} и таблица 6 первых значений для S_{2n}. Высказываются предположения: 1) $n(2n-1) S_{2n-2} \geqslant S_{2n}$; 2) $S_{2n} \equiv 0 \pmod{2^n}$.

Во II части дан способ вычисления коэффициентов

β_{2n} разложения $\sinh x/\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n} x^{2n}/(2n)!$, отличный от способа Карлица (РЖМат, 1957, 83), и доказаны 2 свойства β_{2n}. В. А. Голубев

2327. **Развлечения с помощью решетки. Гросман** (Fun with lattice points. Grossman Howard D.), Scripta math., 1954, 20, № 3-4, 203—204 (англ.)

См. также: 2907

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

2328 К. **Элементы современной алгебры. Лантен, Ривo** (Eléments d'algèbre modenre, 2e éd. Lentin André, Rivaud Jacques. Paris, Vuibert, 1957, 334 p., ill., 2000 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 15, 418 (франц.)

2329 К. **Современная алгебра. Кезанн, Делаше** (L'algèbre moderne. 2e éd. Queysanne Michel, Delachet André. Paris, Presses univ. France, 1957, 136 p., ill., 177 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 15, 418 (франц.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2330. **Расположение корней производной от характеристического полинома матрицы. Пароди** (Localisation des zéros de la dérivée du polynome caractéristique d'une matrice. Parodi Maurice), Bull. sci. math., 1957, **81**, № 3, 119—123 (франц.)

Результаты были опубликованы ранее (РЖМат, 1958, 1830).

2331. **По поводу расположения корней производной характеристического многочлена матрицы. Пароди** (A propos de la localisation des zéros de la dérivée du polynome caractéristique d'une matrice. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 8, 1131—1133 (франц.)

Изучается расположение корней производной $f'(x)$ характеристического многочлена $f(x)$ матрицы (a_{ik}) $i,k = 1, 2, \ldots, n$. Гершгорин (Изв. АН СССР, 1931, 749, 754) определил область D расположения корней характеристического многочлена $f(x)$ как объединение n кругов:

$$|a_{ii} - z| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Автор (РЖМат, 1958, 1830; реф. 2330) показал, что область D' расположения корней производной $f'(x)$ определяется уравнениями

$$\frac{(x - a_{ii})^2}{2p_i^2} + \frac{y^2}{p_i^2} \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Марден (Marden M., Trans. Amer. Math. Soc., 1939, **45**, 355) доказал, что если существует круг (C) радиуса R, содержащий p нулей многочлена $f(x)$, то концентрический круг (C') радиуса $R' = R \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2(n-p+1)}$ содержит по меньшей мере $p-1$ нулей его производной.

В реферируемой статье автор предполагает, что область D состоит из непересекающихся областей $D_1, D_2, \ldots, D_k$, причем D_μ состоит из p_μ кругов, один из которых Γ_μ содержит $p_\mu - 1$ остальных. Тогда Γ'_μ — круг, содержащий $p_\mu - 1$ нулей многочлена $f'(x)$.

Доказывается теорема: Пересечение области D' и круга Γ'_μ содержит по крайней мере $p_\mu - 1$ нулей многочлена $f'(z)$, если только k кругов Γ'_μ не имеют общих точек и внешняя часть области D'' по отношению к окружностям Γ'_μ содержит не более k нулей многочлена $f'(x)$. Г. Н. Веселая

2332. **Трисекция угла. Неванлинна** (Kulman kolmiajaosta. Nevanlinna Veikko), Arkhimede, 1958, № 1, 29—33 (финск.)

2333. **О квадратичных формах трех переменных. Коммо** (Sur les formes quadratiques à trois variables. Commeau J.), Rev. math. spéc., 1958, **68**, № 11, 265—267 (франц.)

2334. **О системах линейных форм от «n» переменных. Аванесов Э. Т.**, Уч. зап. Рыбинск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 2, 307—311

2335. **Об обозначении в тензорной алгебре. Англес д'Орьяк** (Sur la notation de l'algèbre tensorielle. Anglès d'Auriac Paul), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 19, 1584—1585 (франц.)

Автор предлагает новую систему обозначений различных тензоров, при которой тензоры обозначаются пучком стрелок, исходящих из общего центра (кружка). Эти стрелки направлены к центру или от центра в зависимости от того, соответствуют ли они контравариантным или ковариантным индексам тензора. Стрелки обозначаются буквами; совпадение букв у различных стрелок указывает на свойство симметрии тензора относительно данных индексов. Сложение, умножение и свертывание тензоров интерпретируются как операции над графическими обозначениями тензоров.

Приводится небольшое число примеров использования введенных обозначений, но на основании этих примеров трудно пока судить о том, насколько предложенная система обозначений целесообразна. Л. А. Калужнин

2336. **Детерминантное неравенство Робертсона. Таусски** (A determinantal inequality of H. P. Robertson. Taussky Olga), J. Wash. Acad. Sci., 1957, **47**, № 8, 263—264 (англ.)

Робертсон (Robertson H. P., Phys. Rev., 1934, **9**, 794—801) доказал, что если эрмитова матрица $H = A + iB$ положительно определена, то $|A| > |B|$. В реферируемой статье даны некоторые обобщения и уточнения неравенства Робертсона. Например, доказана следующая теорема: Эрмитова матрица $H = A + iB$ положительно определена тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $iA^{-1}B$ вещественны и меньше 1.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2337. **О границах некоторых определителей. Хейнсуэрт** (Note on bounds for certain determinants. Haynsworth Emilie V.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 313—319 (англ.)

Пусть $P(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть некоторый достаточный признак неотрицательности определителя $|A|$, где $P(A_i)$ изображает определенное условие, имеющее место для i-й строки матрицы A. Используя разложение матрицы $A + B$ в сумму 2^n матриц, автор доказывает, что если A и B суть две матрицы, для которых имеет место $P(A_i)$ и $P(B_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, то $|A + B| \geqslant |A| + |B|$. Автором получены следующие результаты об оценке нижней положительной границы некоторых определителей: 1) Если $A = (a_{ij})$ — неотрицательная $n \times n$-матрица, для которой

$$a_i = \min a_{ij}, \quad a_i^* = \max a_{ij}, \qquad (1)$$

$$a_i \geqslant \frac{a_i^*}{k} \quad (k \geqslant 2), \tag{2}$$

$$a_{ii} \geqslant [(n+1)(k-1)/k]\, a_i^*, \tag{3}$$

то

$$|A| \geqslant \frac{1}{k^{2n}}\left[\left(2k-1\right)k-1\right]\times$$

$$\times\left[\left(k-1\right)n-1\right]^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\left(a_i-a_i^*/k\right).$$

2) Если элементы a_{ij} $n\times n$-матрицы A удовлетворяют условиям (1) и (2), но (3) заменяется условием

$$a_{ii} \geqslant [(n+1)(k^2-1)]\,/\,k^2]\, a_i^*, \tag{3}$$

то $|A| \geqslant \frac{1}{k^{2n}}\left[\left(2k-1\right)n-1\right]\left[\left(k-1\right)n-1\right]\prod_{i=1}^{n} a_i^*$.

Х. Р. Сулейманова

2338. Скалярные произведения с симметричным аннулированием. Бальё (Produits scalaires à annulation symétrique. Ballieu Robert), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1956, **70**, № 2, 87—95 (франц.)

Скалярное произведение $f(\xi, \tau_i)$ с антиавтоморфизмом w тела K (или, как мы будем в последующем говорить, w-скалярное произведение), определенное на векторном пространстве L произвольного ранга над телом K, представляет собой такое отображение f $L\times L \to K$, что

$$f\left(\sum_i a_i\,\xi_i, \sum_j b_j\,\eta_j,\right) = \sum_{i,j} a_i f\left((\xi_i, \eta_j\right) w\left(b_j\right),$$

где $\xi_i, \eta_j \in L$ и a_i, $b_j \in K$. f называется w-скалярным произведением с симметричным аннулированием, если из соотношения $f(\xi, \tau_i) = 0$ следует соотношение $f(\eta, \xi) = 0$; в дальнейшем рассматриваются только такие скалярные произведения. Скалярное произведение f естественным образом определяет на векторном пространстве L соотношение ортогональности. Основное утверждение: Если w-скалярное произведение f с симметричным аннулированием, определенное на произвольном векторном пространстве L над телом K, не равно нулю на подпространстве коразмерности 1 (т. е. на подпространстве, дополнение к которому имеет размерность 1) и ортогональном к своему дополнению, то в теле K существует такой элемент d,

что $w(f(\xi, \tau_i)) = df(\eta, \xi)$ для любых $\xi, \eta \in L$; (1)

кроме того, $w^2(x) = dxd^{-1}$ для любого $x \in K$; (2)

$$dw(d) = 1. \tag{3}$$

(Частный случай этого утверждения имеется в книге Бера (РЖМат, 1956, 5101). Обратно, если заданы антиавтоморфизм w тела K и элемент $d \in K$, удовлетворяющие условиям (2) и (3), то на произвольном векторном пространстве L над телом K можно построить такое нетривиальное симметрично аннулирующее w-скалярное произведение f, что будет выполняться соотношение (1) (с заданным d). Отмечается, что условия (2) и (3) являются независимыми друг от друга и что элемент d, в совокупности с которым антиавтоморфизм w удовлетворяет условиям (2) и (3), определяется антиавтоморфизмом w в общем случае неоднозначно. Приводятся примеры пар w, d, удовлетворяющих условиям (2) и (3). Е. Г. Шульгейфер

2339. Когерентно инвариантные отображения симметрических преобразований. Джейкоб (Coherence invariant mappings of symmetric transformations. Jacob H. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 5, 943—949 (англ.)

Пусть Ф—поле, характеристика которого не равна 2, а $\alpha \to \alpha^*$ — инволюция в Ф. Рассмотрим левое векторное пространство L над Ф размерности $\geqslant 3$. Пусть теперь существует скалярное произведение $(x, y) \in \Phi$; $x, y \in L$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,

2) если $(x, y) = 0$ при всех x, то $y = 0$,

3) $(y, x) = (x, y)^*$.

Линейное преобразование T пространства L называется симметрическим, если $(xT, y) = (x, yT)$ для любых $x, y \in L$. Будем говорить, что линейное преобразование T имеет конечный ранг $r(T) = n$, если размерность подпространства LT равна n. Как показал Джекобсон, любое линейное преобразование T конечного ранга можно задать в виде

$$xT = \sum_{i=1}^{n}(x, x_i)\, y_i, \text{ где } x_1, \ldots, x_n \text{ и } y_1, \ldots, y_n \text{ — две системы линейно независимых векторов из } L.$$

Если же T — симметрическое преобразование конечного ранга, то

$$xT = \sum_{i=1}^{n}(x, x_i)\, y_i^* = \sum_{i=1}^{n}(x, y_i)\, x_i.$$

Кроме того любое симметрическое преобразование конечного ранга можно задать в виде

$$xT = \sum_{i=1}^{n}(x, \alpha_i z_i)\, z_i, \quad \alpha^* = \alpha \in \Phi.$$

Пусть Σ — совокупность всех симметрических преобразований конечного ранга. Взаимно однозначное отображение σ множества Σ на себя будем называть когерентно инвариантным, если для $T_1, T_2 \in \Sigma$ из $r(T_1 - T_2) = 1$ следует

$$r(T_1^\sigma - T_2^\sigma) = r(T_1^{\sigma-1} - T_2^{\sigma-1}) = 1.$$

Будем рассматривать лишь такие когерентно инвариантные отображения, которые нулевое преобразование оставляют на месте.

Пусть теперь S — полулинейное невырожденное преобразование пространства L, ассоциированное с автоморфизмом τ поля Ф, $\lambda \in \Phi$ и $\lambda^* = \lambda$. Пусть автоморфизм τ перестановочен с инволюцией $\alpha \to \alpha^*$. Тогда можно проверить, что

$$T \to T^1, \tag{1}$$

где $xT = \sum_{i=1}^{n}(x, \alpha_i z_i)\, z_i$,

$$xT^1 = \sum_{i=1}^{n}(x, \lambda\, \alpha_i^\tau (z_i S))\, z_i\, S,$$

является когерентно инвариантным отображением множества. Доказывается, что любое когерентно инвариантное отображение множества Σ имеет вид (1).

Д. А. Супруненко

2340. Об умножении прямоугольных матриц. Довгановский Б. П., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1958, **2**, 259—260

2341. Новое доказательство теорем Перрона и Фробениуса о неотрицательных матрицах. I. Положительные матрицы. Брауэр (A new proof of theorems of Perron and Frobenius on non—negative matrices: I. Positive matrices. Brauer Alfred), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 367—378 (англ.)

Приводится новое доказательство теоремы Перрона и Фробениуса, а также устанавливаются некоторые дополнения к этой теореме; при этом используются спектраль-

ные свойства обобщенных стохастических матриц, т. е. неотрицательных матриц, у которых все строчные суммы равны между собою.

Получены следующие основные результаты:

1) Если A — положительная $n\times n$-матрица с характеристическими числами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, то для каждого заданного $\varepsilon>0$ можно найти положительную обобщенную стохастическую матрицу $S(\varepsilon)$ с характеристическими числами $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n'$ так, что

$$|\omega_\nu - \omega_\nu'| < \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Предельным случаем этой теоремы является теорема А. Н. Колмогорова о существовании для каждой неразложимой неотрицательной матрицы подобной ей стохастической матрицы (Дмитриев, Дынкин, Докл. АН СССР, 1945, 49, № 3, 159—162).

2) Если ω — наибольшее положительное характеристическое число положительной $n\times n$-матрицы и m—наименьший ее недиагональный элемент, а R и r — соответственно наибольшая и наименьшая строчные суммы матрицы A, то

$$\omega \geqslant \max\{a_{\nu\nu} + (R_\nu - a_{\nu\nu})\, m/(R-r+m)\},$$

где R_ν — сумма элементов ν-й строки, $\nu=1, 2, \ldots, n$.

3) Если ξ_ν — наибольшее положительное характеристическое число главного минора $A_{\nu\nu}$ порядка $(n-1)$ положительной $n\times n$-матрицы A, то при вышеуказанных обозначениях

$$\xi_\nu \leqslant \omega - \frac{1}{2}\left\{-R+r+\left[(R-r)^2+4m^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

4) Если a_{ii}, a_{jj} суть наименьшие элементы главной диагонали положительной $n\times n$-матрицы A и при вышеуказанных обозначениях

$$\mu = \min\left\{a_{ii}, a_{jj}, \frac{-R+r+\left[(R-r)^2+4m^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2}\right\},$$

то все характеристические числа ω_i $(i=2, 3, \ldots, n)$ матрицы A лежат внутри или на границе овала Кассини: $|z-(a_{ii}-\mu)|\cdot|z-(a_{jj}-\mu)| \leqslant \{\omega-a_{ii}-(n-1)\mu\}\{\omega-a_{jj}-(n-1)\mu\}$.

Х. Р. Сулейманова

2342. **О строении матриц выравнивания Гутвирта и Жаботинского. Гинзбург** (On the structure of the alignment matrices of Gutwirth and Jabotinsky. Ginzburg A.), Bull. Res. Council Israel, 1956, **A6**, № 12, 42—46 (англ.)

Рассматриваются введенные Гутвиртом и Жаботинским в связи с исследованием ими рациональных точек плоских кубических кривых (РЖМат, 1959, 791) матрицы (невырожденные матрицы выравнивания) вида

$$A = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix},$$

не имеющие ни тождественных строк, ни строк, которые получаются одна из другой циклической перестановкой, и удовлетворяющие условиям

$$x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2=x_3+y_3+z_3\neq 0,$$
$$x_1y_1z_1=x_2y_2z_2=x_3y_3z_3\neq 0,$$
$$\det A = 0.$$

Доказывается, что эти матрицы могут быть построены с помощью элементов $a_i, b_i c_i$ $(i=1, 2, 3)$ таких, что $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=0$, если положить:

$$x_1 = a_1b_1c_1, \quad y_1 = a_2b_2c_2, \quad z_1 = a_3b_3c_3,$$
$$x_2 = a_1b_3c_2, \quad y_2 = a_2b_1c_3, \quad z_2 = a_3b_2c_1,$$
$$x_3 = a_1b_2c_3, \quad y_3 = a_2b_3c_1, \quad z_3 = a_3b_1c_2.$$

А. Г. Школьник

2343. **О присоединенных группах групп вращений в пространствах 3, 4, 5 измерений. Арчидьяконо** (Sui gruppi aggiunti dei gruppi delle rotazioni negli spazi a 3, 4, 5 dimensioni. Arcidiacono Giuseppe), Rend. mat. e applic., 1956, **15**, № 1—2, 140—152 (итал.)

Применяется метод Фантапье (РЖМат, 1956, 4335,4870) вычисления функции от матрицы и дальнейшее его усовершенствование, принадлежащее автору (Portug. Math., 1955, **14**, №2) для получения явных формул для указанных в заголовке присоединенных групп.

М. А. Наймарк

2344. **Две заметки о матрицах. Дионизиу** (Two notes on matrices. Dionísio J. Joaquim), Portugal. math., 1954, **13**, 141—144 (англ.)

В I-й заметке отмечается, что для того чтобы линейное преобразование A было скалярным, достаточно, чтобы оно коммутировало с линейными преобразованиями B, C, где $Bx_i=\beta_i x_i$ для x_i, пробегающих все множество базисных векторов $\beta_i\neq\beta_j$ при $i\neq j$, а преобразование C имело простое собственное значение, соответствующее такому собственному вектору $x=\Sigma\gamma_i x_i$, что $\gamma_i\neq 0$ для $i=1, 2, \ldots, n$.

Во II заметке для таких вырожденных линейных преобразований A и D, что $D^p\neq 0$ и ранг преобразования A не превосходит разности между размерностью пространства и рангом преобразования D^p при некотором целом p, доказывается, что для произвольного преобразования B существует такое преобразование A', подобное преобразованию A, что элементарные делители преобразования $A'B$ с ненулевыми корнями содержатся среди элементарных делителей преобразования $A'B+D^p$ (и совпадают с ними, если D—нильпотентная), а характеристические уравнения преобразований $A'B$ и $A'B+D^p$ будут иметь, соответственно, вид $\lambda^{n-p}\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)\psi(\lambda)$.

W. Givens. Перевод из Maht. Revs, 1956, **17**, № 4, 339.

2345. **Коммутативность конечных матриц. Таусски** (Commutativity in finite matrices. Taussky Olga). Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 4, 229—235 (англ.)

Разбирается вопрос, когда собственные значения любого многочлена $p(A, B)$, где A и B — комплексные квадратные матрицы, имеют вид $p(\alpha_k, \beta_k)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — собственные значения матрицы A, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — собственные значения матрицы B. Даются следующие необходимые и достаточные условия:

1) существует такая матрица S, что матрицы $S^{-1}AS$ и $S^{-1}BS$ являются треугольными матрицами;

2) все матрицы вида $f(A, B)(AB-bA)$ нильпотентны, где f — произвольный многочлен от A и B. В конце статьи рассматривается вопрос: каковы должны быть матрицы A и B, чтобы при любых λ и μ собственные значения матрицы $\lambda A+\mu B$ имели вид $\lambda\alpha_k+\mu\beta_k$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2346. **О некоммутативных решениях экспоненциального уравнения $e^xe^y=e^{x+y}$. Моринага, Ноно** (On the non-commutative solutions of the exponential equation $e^xe^y=e^{x+y}$. Morinaga Kakutaro. Nôno Takayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1951, **A17**, № 3, 345—358 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей 2-й степени над полем комплексных чисел (т. е. ее элементы удовлетворяют квадратным уравнениям с комплексными коэффициентами). Даются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять элементы $x, y\in\mathfrak{A}$, $xy\neq yx$, чтобы имело место $e^xe^y=e^{x+y}$. (1)

Отдельно рассматривается случай Фреше:

$$e^xe^y = e^{x+y} = e^ye^x. \quad (2)$$

В частности, находятся все решения для (1) и (2) в элементах алгебры 3-го порядка, алгебры кватернионов и полной матричной алгебры 2-го порядка.

Примечание референта. Решение уравнения (1) в матрицах 2-го порядка было получено референтом (РЖМат, 1955, 2563). Г. Н. Чеботарев

2347. О некоммутативных решениях экспоненциального уравнения $e^x e^y = e^{x+y}$. II. Моринага, Ноно Часть I см. реф. 2346.

(On the non—commutative solutions of the exponential equation $e^x e^y = e^{x+y}$ II. Morinaga Kakutaro, Nôno Takayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, A18, № 2, 137—178 (англ.)

В алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей над полем комплексных чисел $\mathfrak{K}$ рассматриваются «итерационные» пары элементов, удовлетворяющие условиям $x^3 = \alpha^2 x$, $y^3 = \beta^2 y$, $x^2 y = yx^2 = \alpha^2 y$, $xy^2 = y^2 x = \beta^2 x$, где $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$. Для таких пар устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых имеет место (1) (реф. 2346). Отдельно рассмотрен случай Фреше (2). Дается структура матриц n-го порядка, отвечающих решениям уравнения (1) в произвольном матричном представлении алгебры $\mathfrak{A}$. Как частный случай получается решение уравнения (1) в матрицах 2-го порядка. Указывается эффективный прием построения всех решений (1) в треугольных матрицах n-го порядка (индукцией по n).

Приводится ряд условий, при которых для матриц x, y из соотношений (2) следует $xy = yx$ или из (1) следует (2). Наконец, дается полное решение уравнения (2) в матрицах 3-го порядка. Г. Н. Чеботарев

2348. О пути в матричном пространстве. Моринага, Мицудо (On the path in matrix space. Morinaga Kakutaro, Mitsudo Fuzio), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, A20, № 2, 79—84 (англ.)

В множестве неособенных матриц n-го порядка рассматриваются пути: $C(M_1, M_2) = M_1 (M_1^{-1} M_2)^t$ ($-\infty < t < \infty$), соединяющие точки M_1, M_2 этого пространства. Изучаются точечные множества этого пространства, выпуклые в том или ином смысле, и касательные к ним множества. Устанавливается связь последних с тройными системами Ли, т. е. множествами матриц $\mathfrak{A}$, удовлетворяющими условиям: при $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$, $t_1 A_1 + t_2 A_2 \in \mathfrak{A}$, $[A_1, [A_2, A_3]] \in \mathfrak{A}$ (квадратные скобки означают лиево произведение). Имеются опечатки, сильно затрудняющие чтение. Г. Н. Чеботарев

2349. Об особом изоморфизме. II. Оно. Сугаку, 1954, 6, № 2, 98—99 (японск.)

2350. О пространственном изоморфизме. II, III. Оно Сугаку, 1954, 6, № 2, 98—99; № 3, 164—166 (японск.)
Ч. 1 см. РЖМат, 1957, 5732.

2351 К. Лекции по комбинаторному анализу. Лакас-Неттo (Liçoes de análise combanatória. Lacaz Netto Francisco A. S. Paulo, Liv. Nobel, 1958, 153 p., 130,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1957, 5, № 6, 303 (порт.)

2352 К. Определители и матрицы. Кохендёрфер (Determinanten und Matrizen. Kochendörffer R. Leipzig, Teubner, 1957, VI, 144 S., 6.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 2, 106 (нем.)

2353 К. Теория матриц. Часть I. Общая теория. Гантмахер (Matrizenrechnung. Teil I. Allgemeine Theorie. Gantmacher F. R. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, XI, 324 S., ill.) (нем.)
Перевод с русского (РЖМат, 1953, 593).

ГРУППЫ

2354. Автоморфизмы голоморфа конечной абелевой группы. Милс (The automorphisms of the holomorph of a finite abelian group. Mills W. H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 1, 1—34 (англ.)

Дано полное описание группы $\mathfrak{O}$ внешних автоморфизмов голоморфа H произвольной конечной абелевой группы G. С этой целью рассматриваются группа $\mathfrak{A}$ всех автоморфизмов группы H, подгруппа $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ автоморфизмов, отображающих G на себя, подгруппа $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ автоморфизмов, оставляющих на месте каждый элемент из G, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ — группа внутренних автоморфизмов, A — группа всех автоморфизмов группы G. Доказано, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{F}$, а фактор-группа $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$ может быть отождествлена с первой группой когомологий $H'(A,G)$. Индекс $H'(AG)$ в $\mathfrak{O} = \mathfrak{A}/\mathfrak{F}$ не превосходит 4. В изучении этой группы $H'(A,G)$, которой посвящена большая часть работы, важную роль играет группа $\mathrm{Hom}(A,I)$, где I — центр голоморфа H, совпадающий с множеством характеристических элементов в G. Группа G записывается в виде $G = G^1 \times G^2$, где G^1 — абелева группа нечетного порядка, а $G^{(2)} = G_1 \times \ldots \times G_k$ — прямое произведение циклических групп $C_i = \{c_i\}$ порядков $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k > 1$ (n_i — степени 2). I имеет порядок 2 и образующий элемент $c_1^{n_1/2}$, если $n_1 > n_2$, в противном случае I — единичная группа. Оказывается, что $H'(A,G)$, если она содержит отличные от 1 элементы, является прямым произведением групп порядка 2. Такое же строение имеет и группа внешних автоморфизмов $\mathfrak{O}$, кроме тех случаев, когда $k = 2 = n_2$, а $n_1 \geqslant 4$. При этих условиях $\mathfrak{O}$ является прямым произведением конечного числа групп порядка 2 и симметрической группы S_3 (если $n_1 = 4$) или группы диэдра порядка 8 (если $n_1 > 4$). А. И. Кострикин

2355. Порядок группы автоморфизмов конечной группы. II. Ледерман, Нёйман (On the order of the automorphism group of a finite group. II. Lederman W., Neumann B. H.), Proc. Roy. Soc., 1956, A235, № 1201, 235—246 (англ.)
Ч. I см. РЖМат, 1956, 8600.

Доказывается, что для любого простого числа p существует функция $g_p(h)$ целочисленного аргумента с целыми значениями, которая обладает следующим свойством: если порядок конечной группы G делится на $p^{g_p(h)}$, то порядок группы автоморфизмов группы G делится на p^h. Минимальное $g_p(h)$ удовлетворяет условиям: $g_p(1) = ?$ $g_p(h) \leqslant (h-1)^3 p^{h-1} + h$ при $h \geqslant 2$. И. Р. Шафаревич

2356. Существование внешних автоморфизмов некоторых групп. II. Ри (The existence of outer automorphisms of some groups. II. Ree Rimhak), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 105—109 (англ.)
Часть I. см. РЖМат, 1958, 1021.

Если G — конечная p-группа, каждый элемент которой удовлетворяет уравнению $x^p = e$, и если порядок G больше p^2, то порядок G является делителем порядка группы автоморфизмов группы G. Отсюда выводится следующая теорема:

Пусть группа G содержит нормальный делитель N простого индекса p с нетривиальным центром $Z(N)$ порядка $< p^p$. Тогда если все элементы из $Z(N)$ имеют порядок p, то существуют внешние автоморфизмы группы G.

Для случая групп без кручения доказана следующая теорема:

Если G — упорядоченная нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих и A — группа автоморфизмов групп G, сохраняющих заданный порядок в G, то A — нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих. Б. И. Плоткин

2357. Отображение, переводящее каждый элемент группы в его n-ю-степень. Шенкман, Уэйд (The mapping which takes each element of a group onto its nth power. Schenkman Eugene, Wade L. I.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 1, 33—34 (англ.)

Пусть G — произвольная группа, $G\{n\}$ — ее подгруппа, порожденная всеми элементами $g \in G$, для которых

$g^n = 1$, φ — отображение группы G в себя, при котором каждому $g \in G$ ставится в соответствие g^n. Доказывается, что если отображение φ является эндоморфизмом группы G, то фактор-группа $G/G\{n^2 - n\}$ абелева; если φ является автоморфизмом, то фактор-группа $G/G\{n-1\}$ абелева; сама группа G при этом абелевой быть не обязана. А. П. Мишина

2358. **О прямых разложениях абелевых групп без кручения. Йоунссон** (On direct decompositions of torsionfree Abelian groups. Jónsson Bjarni), Math. scand., 1957, 5, № 2, 230—235 (англ.)

Строится пример абелевой группы без кручения, обладающей такими двумя разложениями в прямую сумму, $G = A \dotplus B = C \dotplus D$, что A — группа ранга 1, а C и D — группы ранга 2, не разложимые в прямую сумму. Затем приводится пример абелевой группы без кручения конечного ранга, которую можно разложить в прямую сумму двумя способами так, что $G = A \dotplus B = C \dotplus D$, $A \cong C$, а B не изоморфно D. Наконец, приводится пример абелевой группы без кручения конечного ранга, допускающей такие разложения в прямую сумму $G = A \dotplus B = C \dotplus D$, что $A \cong B$, $C \cong D$, но A не изоморфно C.

Примечание референта. Первое сообщение о существовании примера, подобного приведенным в реферируемой работе, было сделано автором в Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 354. Проф. А. Г. Курош просит отметить, что содержащееся во втором издании его книги „Теория групп" (РЖМат, 1954, 3255 К) утверждение об ошибочности этого примера основано на недоразумении и должно быть снято. А. П. Мишина

2359. **Расширения предельных групп. Лонстра** (Erweiterungen von Grenzgruppen. Loonstra F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 548—559; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 548—559 (нем.)

Все рассматриваемые группы и их расширения — абелевы. В связи с задачей, изучавшейся автором ранее (РЖМат, 1957, 7659), доказывается теорема, позволяющая ассоциировать с заданными последовательностями групп $A_1, A_2, \ldots (B_1, B_2, \ldots)$ и гомоморфизмов $k_n : k_n(A_{n+1}) = A_n (k_n : h_n(B_{n+1}) = B_n)$ последовательность их расширений $G_1(A_1; B_1)$, $G_2(A_2; B_2), \ldots$ и гомоморфизмов $g_n : g_n(G_{n+1}) = G_n$, индуцирующих k_n и h_n. Группа элементов $a = (a_1, a_2, \ldots)$, где $a_i \in A_i$, $a_n = k_n(a_{n+1})$, с умножением $a \cdot b = (a_1, a_2, \ldots)(b_1, b_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots)$ называется обратной предельной группой (о. п. г.) последовательности $\{A_n; k_n\}$. Доказано, что о. п. г. G последовательности $\{G_n; g_n\}$ является расширением о. п. г. A при помощи B; всякое расширение $G(A; B)$ изоморфно с о. п. г. надлежащим образом выбранной последовательности $\{G_n(A_n; B_n); g_n\}$. Последовательность $\{\mathfrak{A}_n(A_n; B_n)\}$ групп всех расширений A_n при помощи B_n определяет, посредством гомоморфизмов k_n и h_n, о. п. г. $\mathfrak{A}^*$, изоморфную с $\mathfrak{A}(A; B)$. Часть результатов остается верной в случае $h_n(B_{n+1}) \subset B_n$, а также в классе прямых предельных групп, определяемых гомоморфизмами $A_n \to A_{n+1}$, $B_n \to B_{n+1}$.

А. И. Кострикин

2360. **О некоторых свойствах *FC*-групп. Нисигори** (On some properties of *FC*-groups. Nishigori Noboru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, **A21**, № 2, 99—105 (англ.)

Приводятся следующие (необходимые и достаточные) признаки *FC*-групп:

1. Группа G содержит инвариантную *FC*-подгруппу N с конечным числом образующих такую, что $G/P(N)$ есть *FC*-группа. ($P(N)$ — периодическая часть N).

2. $P(G)$ содержит коммутант группы G и G содержит инвариантную *FC*-подгруппу N с конечным числом образующих такую, что G/N — *FC*-группа.

Доказывается также, что если H — подгруппа *FC*-группы G и $D(H : G)$ — множество всех элементов из G, некоторые степени которых содержатся в H, то $D(H : G)$ есть подгруппа в G. Приведенная в работе теорема о конечности простой *FC*-группы известна. Б. И. Плоткин

2361. **Группы с силовской башней. Бер** (Sylowturmgruppen. Baer Reinhold), Math. Z., 1958, **69**, № 3, 239—246 (нем.)

Силовской башней группы G называется такой инвариантный ряд $[S_i]$ в группе G, что $S_0 = E$, $S_n = G$ и S_i/S_{i-1} есть силовская P_i-подгруппа в G/S_{i-1}. В работе рассматриваются только конечные группы: Группа G называется *ST*-группой (Sylowturmgruppe), когда каждый нетривиальный гомоморфный образ группы G обладает нетривиальной инвариантной силовской подгруппой. Группа G тогда и только тогда является *ST*-группой, когда она обладает хотя бы одной силовской башней.

Подгруппа и фактор-группа *ST*-группы снова являются *ST*-группами. Прямое произведение *ST*-групп не обязательно является *ST*-группой.

Рассматриваются некоторые признаки *ST*-групп, а также изучаются различные возможные типы силовских башен в таких группах. Формулировка основных результатов дается с помощью ряда новых специальных терминов, относящихся к множеству простых чисел, входящих в порядок группы. Б. И. Плоткин

2362. **Полуавтоморфизмы групп. Херштейн, Рухте** (Semi-automorphisms of groups. Herstein I. N., Ruchte M. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 145—150 (англ.)

Полуавтоморфизмом группы G называется такое ее взаимно однозначное отображение φ на себя, что $\varphi(aba) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)$, где a и b — произвольные элементы группы G. Доказывается, что полуавтоморфизм простой (конечной или бесконечной) группы, обладающей элементом четвертого порядка, является либо автоморфизмом, либо антиавтоморфизмом. В конце работы передоказываются известные аналогичные результаты для симметрических и знакопеременных групп (Dinkines F., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 478—486). А. И. Ширшов

2363. **О нильпотентных линейных группах. Тышкевич Р. И.**, Матем. сб., 1957, **42**, № 4, 441—444

Пусть G — неприводимая нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$, максимальная среди нильпотентных подгрупп класса $l > 1$, а $Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_{l-1} \subset G$ — ее верхний центральный ряд. Для случая, когда P — алгебраически замкнутое поле, доказываются следующие утверждения:

1. Если Z_i — неприводимая группа, то $Z_i = G$.
2. Если $l > 2$, то группа Z_2 коммутативна.
3. Z_{l-1} содержится в централизаторе Z_2 в G.
4. Если $Z_2 : Z_1 = n$, то Z_{l-1} абелева.

Д. А. Супруненко

2364. **О подстановках второго порядка полной линейной группы над конечным полем. Елкин Ю. Г.**, Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 33—38

Полная линейная группа $GL(n, p)$ над простым конечным полем порядка p трактуется как группа подстановок степени $p^n - 1$. Доказывается, что число различных цикленных типов подстановок второго порядка из $GL(n, p)$ при $p > 2$ равно n, а при $p = 2$ больше или равно $\left[\frac{n}{2}\right]$. Однако, если бы автор рассмотрел общую нормальную форму подстановки второго порядка из $GL(n, 2)$, то он бы увидел, что число различных цикленных типов подстановок второго порядка из $GL(n, 2)$ в точности равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Д. А. Супруненко

2365. **О порядке одной подгруппы $GL(q, p)$. Накамура** (Über die Ordnung gewisser Untergruppen von $GL(q, p)$. Nakamura Kirio), Nagoya Math. J., 1957, 12, 191—193 (нем.)

Пусть p и q — простые числа, причем $q \neq p \neq 2$. Доказывается теорема: Если порядок d неприводимой нильпотентной подгруппы $GL(q, p)$ есть нечетное число, то $d < p^q$. Из результатов статьи референта (РЖМат, 1953, 89), с которой автор, по-видимому, незнаком, можно получить, что приведенная выше теорема верна для любых простых p и q. Д. А. Супруненко

2366. К теории локально нильпотентных групп. Вилянцер В. Г., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 163—168

Доказаны теоремы: 1. Пусть в группе G все абелевы подгруппы имеют конечный специальный ранг. Тогда если каждая пара элементов из G порождает нильпотентную подгруппу, то любое конечное множество элементов из G также порождает нильпотентную подгруппу.

2. Пусть G — произвольная группа и H — ее нормальный делитель конечного специального ранга. Для того чтобы H принадлежал верхнему гиперцентру группы G, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент из H вместе с произвольным элементом из G порождал нильпотентную подгруппу.

3. Нильгруппа с условием минимальности для подгрупп локально нильпотентна. В. И. Плоткин

2367. Полупрямые произведения рациональных групп. Шевцов Г. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 184—201

Исследование групп, разложимых в полупрямое произведение рациональных групп (т. е. абелевых групп без кручения первого ранга). Группа G называется разложимой в полупрямое произведение своих подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_\alpha, \ldots$, $1 \leqslant \alpha < \gamma$, если выполняются следующие требования: 1) группа G порождается всеми подгруппами H_α, 2) подгруппа G_α, порожденная подгруппами H_β, $\beta < \alpha$, инвариантна в группе G и пересекается по единице с группой $G^{(\alpha)}$, порожденной остальными подгруппами H_α.

Основными результатами статьи являются следующие предложения:

I. Если $G = [H_1\ H_2 \ldots H_\alpha \ldots]$ — некоторое разложение группы G в полупрямое произведение рациональных подгрупп и h_i — произвольный элемент множителя H_i ($i = 1, 2, \ldots, \alpha, \ldots$), то для элементов h_i, h_j при $i < j$ в группе G возможны лишь соотношения вида:

$$h_i\ h_j = h_j\ h_i^{\alpha(h_i,\ h_j)}$$

При этом:

1) если H_j — циклическая группа, то $\alpha(h_i, h_j)$ может быть любым рациональным числом, определяющим автоморфизм группы H_i (при изображении элементов группы H_i рациональными числами этот автоморфизм осуществляется умножением их на $\alpha(h_i, h_j)$). 2) если H_j — нециклическая группа, то число $\alpha(h_i, h_j)$ может быть равно лишь ± 1; если, в частности, H_j не имеет подгрупп индекса два, то $\alpha(h_i, h_j) = 1$.

II. Пусть H_μ, $\mu \in M_1$ — любые рациональные группы, $H'_\nu = \{a_\nu\}$, $\nu \in M_2$ — бесконечные циклические группы (M_1 и M_2 — вполне упорядоченные множества) и пусть далее $\xi_{\mu\nu}$ ($\mu \in M_1$, $\nu \in M_2$) равно ± 1 или любому рациональному числу $\alpha_{\mu,\nu}$ из множества рациональных чисел, определяющих автоморфизмы группы H_μ. Тогда группа G, порожденная элементами всех групп H_μ, H_ν при соотношениях

$$h_{\mu'} h_{\mu''} = h_{\mu''}\ h_{\mu'}^{\pm 1}, \quad h_{\mu'} \in H_{\mu'},\ h_{\mu''} \in H_{\mu''},\ \mu' < \mu'',$$

$$a_\nu\ a_{\nu'} = a_{\nu'}\ a_\nu,\ a_\nu \in H'_\nu = \{a_\nu\},\ a_{\nu'} \in H'_{\nu'} = \{a_{\nu'}\},$$

$$h_\mu a_\nu = a_\nu h_\mu^{\alpha_{\mu,\nu}},\ h_\mu \in H_\mu,\ a_\nu \in H'_\nu = \{a_\nu\},\ \mu \in M_1,\ \nu \in M_2$$

(соотношения между элементами каждой группы H_μ, H'_ν сохраняются в группе G), разлагается в полупрямое произведение

$$[H_1\ H_2 \ldots H_\mu \ldots H'_1 H'_2 \ldots H'_\nu \ldots],$$

удовлетворяющее этим соотношениям.

Полученную таким образом группу G автор называет внешним полупрямым произведением заданных рациональных групп. Отмечается, что из приведенных здесь предложений вытекает совпадение класса групп, разложимых в полупрямое произведение своих рациональных подгрупп, с классом всевозможных внешних полупрямых произведений произвольных рациональных групп.

III. Группа G, разложимая в полупрямое произведение рациональных подгрупп, является расширением абелева вполне разложимого нормального делителя с помощью прямого произведения абелевой группы, все элементы которой второго порядка, и свободной абелевой группы.

IV. Если группа разложима в полупрямое произведение своих рациональных подгрупп, то любые два ее таких разложения изоморфны между собой (т. е. между их множителями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие множители будут изоморфными).

Это предложение является обобщением теоремы Бера об изоморфизме прямых разложений произвольной вполне разложимой абелевой группы без кручения (РЖМат, 1954, 3091 К). С. Н. Черников

2368. Об ассоциативных произведениях групп. Стрейк (On associative products of groups. Struik Ruth Rebekka), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 425—452 (англ.)

Для подгрупп A_α, $\alpha \in M$, группы G через $[A_\alpha]^G$, или короче $[A_\alpha]$, будем обозначать нормальный делитель группы G, порожденный коммутаторами $[a_\alpha, a_\beta] = a_\alpha^{-1} a_\beta^{-1} a_\alpha a_\beta$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $a_\beta \in A_\beta$, $\alpha, \beta \in M$, $\alpha \neq \beta$; для случая двух подгрупп A, B будет употребляться символ $[A, B]$. Если $A \subset G$, то ${}_0A$ — нормальный делитель, порожденный A в G; ${}_kA = [G, {}_{k-1}A]$.

А. Г. Курош (Теория групп, М.—Л., Гостехиздат, 1944, стр. 351) поставил вопрос о существовании на множестве групп алгебраических операций, отличных от операций прямого и свободного умножения, но обладающих их основными общими свойствами.

Референтом была построена (Докл. АН СССР, 1947, 58, № 7, 1257—1260; Матем. сб., 1950, 27, № 3, 427—454) счетная серия таких операций и введены следующие понятия: I) Группа G является правильным произведением своих подгрупп A_α, $\alpha \in M$, если $G = \{A_\alpha, \alpha \in M\}$, т. е. G порождается ими, причем для всех α имеет место соотношение $A_\alpha \cap B_\alpha = 1$, где B_α — нормальный делитель, порожденный всеми подгруппами A_β, $\beta \in M$, $\beta \neq \alpha$. II) Вполне правильным Δ-умножением групп называется операция, ставящая каждому множеству групп A_α, $\alpha \in M$, в соответствие некоторую, с точностью до изоморфизма однозначно определенную, группу $G = \Pi^{\Delta}_{\alpha \in M} A_\alpha$, причем выполнены условия: 1) правильность: G является правильным произведением своих подгрупп, соответственно изоморфных группам A_α, $\alpha \in M$; 2) ассоциативность: если

$G = \Pi^{\Delta}_{\alpha\in M} A_\alpha$ и $A_\alpha = \Pi^{\Delta}_{\beta_\alpha\in M_\alpha} A_{\alpha\beta_\alpha}$, $\alpha\in M$, то $G = \Pi^{\Delta}_{\beta_\alpha\in M_\alpha,\alpha\in M} A_{\alpha\beta_\alpha}$. Заметим, что конечное вполне правильное умножение (т. е. произведение с конечным числом факторов) может быть, очевидно, определено как правильная бинарная операция, удовлетворяющая законам ассоциативности и коммутативности. (В бесконечном случае коммутативность являлась следствием неупорядоченности множества M). Там же было показано, что каждое правильное произведение групп A_α, $\alpha\in M$, является фактор-группой их свободного произведения $F = \Pi^* A_\alpha$ по некоторому нормальному делителю R („определяющему ядру"), содержащемуся в $[A_\alpha]^F$. И наоборот, всякая такая фактор-группа свободного произведения некоторых групп является правильным произведением тех же групп.

Построенные референтом вполне правильные умножения (так называемые „нильпотентные" умножения) определялись ядрами

$$N_k,\ N_k = [F,\ N_{k-1}],\ N_0 = [A_\alpha],\ F_\cdot = \Pi^* A_\alpha,\ k = 1,\ 2,\ldots\ .$$

Автор строит большое количество бинарных правильных операций, исследуемых не только на предмет выполнения для них постулатов ассоциативности и коммутативности, но и еще одного нового — постулата Маклейна (S. Mac Lane): Δ-умножение удовлетворяет постулату Маклейна, если из того, что $G = \Pi^{\Delta} A_\alpha$, для любых нормальных делителей N_α сомножителей A_α следует, что $\Pi^{\Delta}(A_\alpha / N_\alpha)$ „естественно" изоморфно G/N, где N — нормальный делитель группы G, порожденный всеми N_α. Вот несколько примеров, построенных автором бинарных правильных операций $A \Delta B = (A*B)/R$.

Ядра вида $R_{m,n} = [{}_mA,\ {}_nB]\,[{}_nA,\ {}_mB]$ или более общего вида $R^{(k)}_{m_i,n_i} = \Pi^{k}_{i=1}[{}_{m_i}A,{}_{n_i}B]\,[{}_{n_i}A,\ {}_{m_i}B]$ определяют вполне правильные бинарные операции, удовлетворяющие постулату Маклейна. В частности, ядра R_{0n} дают нильпотентные произведения референта. В свою очередь операции, определяемые ядрами $R^{k}_{m_i,n_i}$, оказываются частными случаями вербальных произведений Морана (реф. 2369). Утверждается, что все вербальные произведения удовлетворяют постулату Маклейна.

Ядра R_k, порожденные коммутаторами $[a, b]$, $a\in A$, $b\in B$, где либо a лежит в центре подгруппы A и $a^k = 1$, либо b лежит в центре B и $b^k = 1$, определяют вполне правильные операции, не удовлетворяющие постулату Маклейна, чем установлены, с одной стороны, независимость постулата Маклейна от остальных постулатов и, с другой, — невербальность определяемых этими ядрами операций.

Указывается много ядер, определяющих неассоциативные коммутативные правильные бинарные операции. Таковыми, например, являются $R = [\,[A, A]^A,\ [B, B]^B\,]^F$, где $F = A*B$; $R = [\,[A, A]^F, [B, B]^F\,]^F$; $R = [\,[A,\ B],\ [A,\ B]]$; $R = [\,[A, B],\ [F,\ F]\,]$. Приводится пример правильной неассоциативной и некоммутативной бинарной операции, определяемой ядром $R = [\,[A, A]^F,\ {}_0B]^F$.

Во введении имеются неточные формулировки. Так, непонятен смысл требования (c), сформулированного в начале введения. В последнем абзаце первой страницы введения необоснованно говорится, будто референтом показано, что условие (d) является следствием условий (c) и (e). На самом же деле не только в работах референта нет такого утверждения, но оно и по сути дела неверное, как показывают простейшие примеры. Там же во введении дается неправильная интерпретация вопроса, поставленного референтом, об ассоциативности операции разложения данной группы в неиндивидуализированное правильное произведение своих подгрупп. Этот вопрос получил положительный ответ в работе Бенадо (реф. 2370).

О. Н. Головин

2369. Ассоциативные операции на группах. I. Моран (Associative operations on groups. I. Moran S.), Proc. London, Math. Soc., 1956, **6**, № 24, 581—596 (англ.)

Терминологию и обозначения см. реф. 2368. Пусть V — произвольное множество слов на конечном или счетном алфавите. Через $V(G)$ обозначается вербальная подгруппа, определяемая множеством V в группе G, в смысле Неймана (Neumann B. H., Math. Ann., 1937, **114**, 506—525), т. е. подгруппа, порожденная множеством значений слов из V, когда буквы алфавита независимо друг от друга пробегают всю группу G. Рассматриваются правильные произведения, определяемые ядрами $R = V(F) \cap [G_\alpha]^F$, где $F = \Pi^* G_\alpha$. При любом фиксированном V такие „вербальные" произведения $\Pi^V G_\alpha$ оказываются ассоциативными и потому вполне правильными. Устанавливается ряд дальнейших свойств вербальных произведений, в том числе следующие:

Теорема 4.2. Если $G = \Pi^V G_\alpha$ и U — произвольное множество слов, то $U(G) = \Pi U(G_\alpha)\cdot(U(G) \cap [G_\alpha]^G)$.

Следствие 4.2.2. $V(\Pi^V G_\alpha) = \Pi^x V(G_\alpha)$, где x — знак прямого произведения.

Теорема 4.3. Если $V(G_\alpha) = 1$ для всех α, то произведение $G = \Pi^V G_\alpha$ максимально в том смысле, что каждая группа H, порождаемая подгруппами, изоморфными, соответственно, G_α и такая, что $V(H) = 1$, изоморфна некоторой фактор-группе группы G.

Нильпотентные произведения референта оказываются частными видами вербальных произведений; достаточно за множество V взять слово вида $[\ldots[[x_1, x_2], x_3],\ldots, x_n]$. Ввиду этого, как теорема об ассоциативности нильпотентных произведений, так и ряд других теорем референта, устанавливающих их свойства, оказываются частными случаями много более общих теорем Морана.

Указываются другие важнейшие частные виды вербальных произведений: разрешимые произведения (определяемые отдельными словами вида

$$[[x_1, x_2]\,[x_3, x_4]],\ [[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]\,[[x_5, x_6], [x_7, x_8]]$$

и т. п.); бернсайдовы произведения (определяемые словами вида x^n) и др.

Приводится пример неассоциативного правильного произведения. Вновь, подобно Стрейк (реф. 2368), автор неверно приписывает референту постановку вопроса об ассоциативности любого правильного произведения как фиксированной операции на множестве всех групп.

О. Н. Головин

2370. Об общей теории правильных произведений. О. Н. Головина. I. Бенадо (Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin. I. Benado Mihail), Math. Nachr., 1955 (1956), **14**, № 4-6, 213—234 (нем.)

Терминология и обозначения см. реф. 2368. Система $\{\alpha_i, i\in I\}$ эндоморфизмов группы G называется полной, если $G = \{G\alpha_i, i\in I\}$; она называется идемпотентной, если все α_i идемпотентны, т. е. $\alpha_i^2 = \alpha_i$; она называется внешней (лучше бы ортогональной), если для любых $i', i''\in I$, $i'\neq i''$, справедливо соотношение $G\alpha_{i'}, \alpha_{i''} = 1$.

Доказываются теоремы: Каждому разложению $G = \Pi^{\Delta} G_i$ группы G в правильное произведение своих подгрупп G_i, $i\in I$, однозначно соответствует такая полная внешняя идемпотентная система эндоморфизмов $\{\alpha_i, i\in I\}$, что $G\alpha_i = G_i$, а ядром эндоморфизма α_i является нор-

мальный делитель G_i^*, порожденный всеми $G_j, j \neq i$. Такая система эндоморфизмов называется фиттинговской системой эндоморфизмов правильного разложения $G = \Pi^{\Delta} G_i$. Наоборот, каждая полная внешняя идемпотентная система эндоморфизмов является фиттинговской для некоторого однозначным образом определенного правильного разложения.

Основным фактом, установленным с помощью перехода от правильных разложений к фиттинговским системам эндоморфизмов, является теорема об ассоциативности правильных разложений фиксированной группы, дающая положительный ответ на вопрос референта (реф. 2368):

$$\text{Если } G = \overset{\Delta}{\prod_{i \in I}} G_i \text{ и } G_i = \overset{\Delta}{\prod_{j_i \in J_i}} G_{ij_i}, \text{ то } G = \overset{\Delta}{\prod_{j_i \in J_i}} G_{ij_i}.$$

Автор называет правильное разложение $G = \overset{\Delta}{\prod_{i \in J}} G_i$ вполне ассоциативным, если при любом разбиении множества I на две непересекающиеся части I' и I'' будет $G = G' \Delta G''$, где $G' = \{G_i, i \in I'\}$, $G'' = \{G_i, i \in I''\}$; если при этом фиттинговской системой эндоморфизмов разложения $G = G' \Delta G''$ является $\{\alpha', \alpha''\}$, то эндоморфизмы α' и α'' называются блоками эндоморфизмов $\{\alpha_i, i \in I'\}$ и $\{\alpha_i, i \in I''\}$ соответственно. Доказывается теорема: Для полной ассоциативности правильного разложения $G = \Pi^{\Delta} G_i$ необходимо и достаточно, чтобы его определяющее ядро (реф. 2368) было допустимой подгруппой свободного произведения $F = \Pi^* G_i$ относительно множества всех блоков эндоморфизмов этого свободного разложения.

Устанавливается еще ряд свойств правильных произведений и нормализованных взаимных коммутантов правильных сомножителей.

Во всей работе рассматриваются группы с произвольной областью операторов, в частности, все встречающиеся в ней правильные разложения и эндоморфизмы — операторные.

О. Н. Головин

2371. К вопросу о разложимости группы в разноименные нильпотентные произведения. Ляховицкий В. Н., Матем. сб.; 1956, 40, № 4, 401—414

Референтом было установлено (Матем. сб., 1951, 28, № 2, 445—451), что встречаются случаи, когда одно и то же разложение группы является как прямым, так и нильпотентным любого номера (термин объяснен в реф. 2368). Будем в этом случае говорить, что нильпотентное разложение "вырождается" в прямое.

В работе показывается, что возможны и существенно различные разложения группы в прямое и нильпотентное произведения. Точнее, доказана теорема: Невырожденное первое нильпотентное произведение групп A и B, факторгруппы которых по коммутантам разлагаются в прямые произведения циклических подгрупп, тогда и только тогда разлагается одновременно в прямое произведение, когда сами группы A и B разлагаются в прямые произведения $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$, причем группы A_1, A_2, B_1, B_2 таковы, что первое нильпотентное произведение как групп A_1 и B_2, так и групп A_2 и B_1 вырождается в прямое. Из этой теоремы, в частности, следует, что конечная p-группа не может быть разложимой одновременно в прямое и первое нильпотентное произведения.

Попутно, в ходе доказательства основной теоремы, устанавливается, что все нильпотентные произведения удовлетворяют постулату Маклейна (реф. 2368).

О. Н. Головин

2372. Полукоммутативное умножение групп и некоторые его свойства. Фридман М. А., Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 112—142

Терминологию и обозначения см. реф. 2368. Е. С. Ляпин в 1949 г. опубликовал (Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, 1949, 86, 93—106) пример еще одной вполне правильной операции, отличной от прямого и свободного умножения. В реферируемой работе широко обобщается идея, лежащая в основе этого примера.

Пусть установлен закон T, по которому в каждой абстрактной группе G выделены два нормальных делителя G_1 и G_2. Полукоммутативным T-произведением $A \overset{\circ}{\times}_T B$ двух групп A и B называется группа G, системой образующих которой служит $A \cup B$, а системой определяющих соотношений — объединение соответствующих систем групп A и B, пополненное соотношениями вида $[a_1, b_2] = [a_2, b_1] = 1$ для всех элементов $a_i \in A_i$, $b_i \in B_i$ $(i = 1, 2)$. Определяемая таким образом бинарная операция на группах является, очевидно, правильной и коммутативной с определяющим ядром, порожденным коммутантами $[A_1, B_2]$ и $[A_2, B_1]$ внутри свободного произведения $F = A^* B$.

Приводится пример, показывающий, что, вообще говоря, такая операция неассоциативна. Устанавливается необходимое условие ассоциативности несвободного полукоммутативного умножения в виде равенства $G_1 G_2 = G$ для всех групп G и необходимое и достаточное условие ассоциативности в виде совпадения подгрупп $(A \overset{\circ}{\times}_T B)_i$ и $\{A_i, B_i\}$, $i = 1, 2$, группы $A \overset{\circ}{\times}_T B$ для любой пары групп A и B.

О. Н. Головин

2373. Условие ассоциативности полукоммутативного умножения любого множества групп. Фридман М. У., Уч. зап. Глазовск. пед. ин-т, 1956, вып. 3, 143—148

Определение полукоммутативного умножения групп, данное автором ранее (реф. 2372) лишь для бинарного случая, переносится естественным образом на общий случай произвольного множества групп и доказывается, что справедливо необходимое и достаточное условие ассоциативности такой операции, получающееся из аналогичного условия, данного для бинарного случая, путем перехода от двух групп A и B к произвольному множеству групп $\{A_\alpha, \alpha \in M\}$.

О. Н. Головин

2374. Элементы конечного порядка, центр полукоммутативного произведения. Решение проблемы тождества для полукоммутативного произведения групп. Фридман М. А., Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та, 1956. вып. 3, 155—167

Исходные определения см. реф. 2372, 2373.

Если закон T таков, что $C_1 C_2 = C$ для любой группы C, то элемент g группы $G = A \overset{\circ}{\times}_T B$ имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда он представим в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$, причем $ab = ba$ и порядки элементов a и b конечны.

При тех же предположениях, если в группах A и B относительно заданных систем образующих N_A и N_B положительно решается вопрос о тождестве слов и то же самое имеет место для их фактор-групп A/A_1, A/A_2, B/B_1, B/B_2 относительно систем образующих, являющихся образами систем N_A и N_B при естественных гомоморфизмах, то положительно решается вопрос о тождестве слов и в группе $A \overset{\circ}{\times}_T B$ относительно системы образующих $N = N_A \cup N_B$. Для ассоциативных T-произведений сформулированное утверждение переносится на произведение с любым множеством факторов.

Наконец, при тех же начальных предположениях центр произведения $A \overset{\circ}{\times}_T B$ равен $(Z_A \cap A_1 \cap A_2) \times (Z_B \cap B_1 \cap B_2)$, где Z_A — центр группы A, а Z_B — группы B.

О. Н. Головин

2375. Конкретные ассоциативные полукоммутативные умножения групп. Фридман М. А., Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та, 1956, вып. 168—183

Приводятся примеры ассоциативных полукоммутатив-

ных произведений групп (реф. 2372, 2373). Для любой группы G при $G_1 = G_2 = 1$ (реф. 2372) получаем свободное произведение, а при $G_1 = G_2 = G$ — прямое произведение.

Опираясь на необходимое и достаточное условие ассоциативности (реф. 2373), автор устанавливает ассоциативность полукоммутативных произведений, определяемых следующими T-законами: 1) $G_1 = G$, а G_2 порождена всеми элементами группы G, порядки которых являются делителями некоторых фиксированных натуральных чисел; 2) $G_1 = G$, а G_2 — фиксированный член верхнего центрального ряда группы G; частный случай такого произведения с G_2, совпадающим с центром группы, рассматривался ранее Е. С. Ляпиным (см. ссылку в реф. 2372).

Следующие произведения не являются ассоциативными на множестве всех групп, но ассоциативны в пределах некоторых специальных классов групп: 3) Произведение, определяемое условиями: $G_1 = G$, а за G_2 взято пересечение всех максимальных абелевых нормальных делителей, — ассоциативно на множестве всех тех групп G, для которых G_2 имеет индекс, отличный от 2; 4) Пусть множество всех простых чисел разбито на два непустых непересекающихся класса P_1 и P_2. Произведение, определяемое условиями: G_i порождено всеми элементами из G, порядки которых являются степенями чисел из P_i ($i = 1, 2$), — ассоциативно на множестве всех групп, обладающих системами образующих из элементов конечных порядков.

О. Н. Головин

2376. **О полукоммутативных умножениях. Фридман М. А.**, Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 4, 710—712

Помимо краткого изложения основных результатов предыдущих работ автора (реф. 2372—2375) приводится без доказательства следующее обобщение теоремы Бера и Леви: Полукоммутативное произведение двух групп, не совпадающее со свободным, не разложимо в свободное произведение никаких своих подгрупп.

О. Н. Головин

2377. **Алгебраическая характеристика абелевых групп, допускающих компактные топологии. Хулыницкий** (Algebraic characterisation of abelian groups which admits compact topologies. Hulanicki A.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, cl. 3, **4**, № 7, 405—406 (англ.)

Сообщение о необходимых и достаточных условиях, полученных автором для компактной топологизации абелевых групп. Полные абелевы группы, допускающие компактную топологию, являются, согласно автору, простыми суммами некоторого числа групп R^+ и G_{p^∞}, где на степени компонент наложены некоторые довольно естественные условия. Во второй теореме автор рассматривает произвольные абелевы группы, допускающие компактную топологию. К таким группам относятся группы вида $G = D + \sum_n^* J_n / \sum_j^* J_j$, где D — максимальная полная группа допускающая компактную топологию, а $\sum^* J_n$ и $\sum^* J_j$ — полные суммы групп J_p-адических целых чисел, вторая сумма расположена в первой сумме таким образом, что всякая проекция группы J_j на J_n, не являющаяся изоморфизмом, имеет нулевой образ. В формулировке теоремы 2 имеется опечатка. Кроме того, автор не выясняет вопроса, будут ли группы J_n p-адическими для одного p или для разных p. Доказательства теорем опубликованы в Fundam. math.

J. W. Mostowski

2378. **О структуре ортогональных групп. Тамагава** (On the structure of orthogonal groups. Tamagawa Tsuneo), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 1, 191—197 (англ.)

Пусть Q — невырожденная квадратичная форма индекса ν в n-мерном векторном пространстве V над полем k, $\Omega(V)$ — коммутант ортогональной группы формы Q. Дается новое доказательство теоремы Дьедонне о том, что если $\dim V \geqslant 3$, $\nu \geqslant 1$, то фактор-группа группы $\Omega(V)$ по ее центру проста, за исключением следующих случаев: $n=3$, k — поле из трех элементов; $n=4$, $\nu=2$.

А. Л. Онищик

2379. **Арифметика ортогональных групп. Оно** (Arithmetic of orthogonal groups. Ono Takashi), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 1, 79—91 (англ.)

Пусть K — поле характеристики $\neq 2$ и V — векторное n-мерное пространство над полем K. Группа автоморфизмов пространства V над полем K обозначена через $GL(V)$. Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная форма над V. Пусть $f^\sigma(x,y) = f(\sigma x, \sigma y)$, $x, y \in V$, для каждого $\sigma \in GL(V)$. Две формы f, g названы конгруэнтными (обозначение $f \sim g$), если $g = f^\sigma$ для некоторого $\sigma \in GL(V)$, и названы подобными в поле K (обозначение $f \backsim g$), если $g \backsim af$ для некоторого ненулевого $a \in k$. Множество всех таких $\sigma \in GL(V)$, что $f^\sigma = f$, называется ортогональной группой, соответствующей f, и обозначается через $O(V,f)$. Если f, g — две формы над пространством V, тогда $O(V,f)$ и $O(V,g)$ сопряжены в $GL(V)$ тогда и только тогда, когда $f \backsim g$ в поле K. Теперь пусть K — или поле алгебраических чисел, или же поле алгебраических функций от одного переменного над конечным полем характеристики $\neq 2$. Пусть $K_\mathfrak{p}$ — $\mathfrak{p}$-адическое пополнение поля K, соответствующее положению $\mathfrak{p}$ в поле K. Обозначим через $V_\mathfrak{p}$ скалярное расширение пространства V, соответствующее полю $K_\mathfrak{p}$. Если f — форма над пространством V, то f может быть рассмотрена как форма над $V_\mathfrak{p}$ и $O(V,f)$ может быть рассмотрена как подгруппа группы $O(V_\mathfrak{p}, f)$. Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах, которые представляют собой примеры того, что автор называет „принципом Хассе“. 1. $f \backsim g$ в поле K тогда и только тогда, когда $f \backsim g$ в поле $K_\mathfrak{p}$ при любом положении $\mathfrak{p}$ в поле K. 2. Группы $O(V,f)$ и $O(V,g)$ сопряжены в группе $GL(V)$ тогда и только тогда, когда группы $O(V,f)$ и $O(V,g)$ сопряжены в $GL(V_\mathfrak{p})$ при любом положении $\mathfrak{p}$ в поле K. 3. Если $O(V_\mathfrak{p}, f)$ и $O(V_\mathfrak{p}, g)$ изоморфны при любом положении $\mathfrak{p}$ в поле K, то $O(V,f)$ и $O(V,g)$ сопряжены в $GL(V)$.

C. E. Rickart

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 11, 1087.

2380. **О просто транзитивных группах аналитических автоморфизмов. Кошуль** (Sur les groupes simplement transitifs d'automorphismes analytigues. Koszul Jean-Louis), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 14, 847—849 (франц.)

Опираясь на результаты, ранее подробно изложенные (РЖМат, 1957, 1784), автор показывает, что просто транзитивная группа аналитических автоморфизмов ограниченной области V в комплексном аффинном пространстве не может иметь двусторонне инвариантного объема. Если V — односвязная симметрическая область, то существуют разрешимые группы, введенные Ивасава, которые просто транзитивны на V. Выводятся некоторые свойства этих групп, в частности, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли такой группы G, то ортогональное дополнение к идеалу $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ в $\mathfrak{g}$ относительно метрики Бергмана является максимальной абелевой подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Доказывается также, что внешняя форма Ω, связанная с метрикой Бергмана, имеет вид $\Omega = d\omega$, где ω — форма типа $(0,1)$, инвариантная относительно G и однозначно определенная этими условиями.

А. Л. Онищик

2381. **Замечания о примитивных идемпотентах в компактных полугруппах с нулем. Кох** (Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero. Koch R. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 828—833 (англ.)

Пусть X — компактная топологическая (хаусдорфова) полугруппа с нулем (т. е. с таким элементом 0, что $a\cdot 0=0\cdot a=0$ для всех $a\in X$). Идемпотент e полугруппы X называется примитивным, если e и 0 суть единственные идемпотенты в eXe. Элемент a полугруппы X называется нильпотентным, если 0 лежит в замыкании множества положительных степеней элемента a. Множество всех нильпотентных элементов полугруппы X обозначено через N. Любое подмножество множества N называется ниль-множеством. Подмножество A множества X называется би-идеалом, если AA и AXA содержатся в A. Основной результат этой заметки, пересекающийся с улучшенными результатами Нумакура (Numakura Katumi, Bull. Yamagata Univ. (Nat. Sci.), 1951, № 4, 405—412), следующий:

Теорема 1. Если e — ненулевой идемпотент полугруппы X, следующие условия эквивалентны: 1) e—примитивный идемпотент, 2) $(eXe)\setminus N$-группа, 3) eXe — минимальный ненулевой би-идеал, 4) Xe — минимальный ненулевой левый идеал, 5) XeX — минимальный ненулевой (двусторонний) идеал, 6) Каждый идемпотент в XeX — примитивный.

Теорема 2. Если пространство X связно, то $(eXe)\cap N$ компактно в eXe и $(Xe)\cap N$ — компактно в Xe.

M. Henriksen.

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 447.

2382. Метризуемые группы и алгебры Ли. Цзоу, Уокер (Metrisable Lie Groups and algebras. Tsou S. T., Walker A. G.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1955—1957 (1957), **A44**, № 3, 290—304 (англ.)

Пусть G — группа Ли, A — ее алгебра Ли. Группа G обладает двусторонне инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда в A существует невырожденная симметрическая билинейная форма $a(x,y)$ такая, что $a(x,[y,z])+a([x,z],y)=0$ $(x,y,z\in A)$. Такая алгебра Ли называется метризуемой. Пусть $C(A)$ и $D(A)$ — соответственно центр и производная алгебра алгебры A. Алгебра A называется приведенной, если $C(A)\subset D(A)$. Доказывается, что всякая метризуемая алгебра есть прямая сумма абелевой алгебры и неразложимых метризуемых приведенных алгебр. Автор говорит, что A имеет тип (r,s), если $\dim D(A)=r$, $\dim C(A)=s$. В метризуемой алгебре $\dim A=r+s$. Алгебры типа (r,s), где $0\leqslant s\leqslant r$, существуют при всех $r\geqslant 3$, за исключением случаев $r=4$; $r=5$; $s=0$; $r=7$; $s=0$.

Доказывается, что число $m(A)$ линейно независимых инвариантных метрик в неабелевой метризуемой алгебре A типа (r,s) удовлетворяет неравенству $m(A)\geqslant 1/2\, s(s+1)$. Если A проста, то $m(A)=1$ тогда и только тогда, когда комплексная оболочка A^c алгебры A проста; если же A^c не проста, то $m(A)=2$.

А. Л. Онищик

2383. О геометрии метризуемых алгебр Ли. Руз (On the geometry of metrisable Lie algebras. Ruse H. S.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957—1958, **A65**, № 1, 1—12 (англ.)

Пусть L—n-мерная метризуемая алгебра Ли, снабженная метрикой $a(x,y)$ (реф. 2382), P — $(n-1)$-мерное проективное пространство, связанное с L, $x,y\in P$, x',y' — представители этих точек в L. Если $[x',y']\neq 0$, то прямая z, соединяющая 0 с $[x',y']$, не зависит от выбора x',y'. Положим $z=[x,y]$. Уравнение $a(x,x)=0$ определяет в P квадрику Q. Доказывается, что точка $[x,y]$ лежит на поляре относительно Q к прямой, соединяющей x с y, и что центр и производная алгебра алгебры L определяет в P полярные друг к другу подпространства. Далее рассматриваются некоторые примеры метризуемых алгебр.

А. Л. Онищик

2384. Пространство идеалов локального кольца. Самюэль (L'espace des idéaux d'un anneau local. Samuel Pierre), Bol. Soc. mat. mexicana, 1956, **1**, № 1, 10—12 (франц.)

В множестве Φ идеалов локального кольца $\mathfrak{o}$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ автор вводит равномерную топологию, определяя n-ю окрестность $V_n(\mathfrak{a})$ любого идеала $\mathfrak{a}$ как множество идеалов $\mathfrak{b}$ из $\mathfrak{o}$, удовлетворяющих соотношениям $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n$ и $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n$. Получаемое таким образом пространство можно метризовать, положив $d(\mathfrak{a},\mathfrak{a})=0$ и, при $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$, $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\frac{1}{n}$, если $\mathfrak{a}\in V_n(\mathfrak{b})$ и $\mathfrak{a}\notin V_{n+1}(\mathfrak{b})$.

Доказываются следующие предложения:

1. Включение $\mathfrak{b}\in V_n(\mathfrak{a})$ равносильно существованию баз $(a_1,\ldots,a_s)$ и $(b_1,\ldots,b_s)$ идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, удовлетворяющих условиям $a_i\equiv b_i(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}^n)$, $i=1,\ldots,s$.

2. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — главные идеалы, то число s в предложении 1 можно принять равным единице.

3. Отображения $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\to\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ пространства $\Phi\times\Phi$ на Φ являются равномерно непрерывными. Отображение $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\to\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ может не быть непрерывным.

4. Если кольцо $\mathfrak{o}$ полное, то и пространство Φ является полным.

5. Если для любого идеала $\mathfrak{a}$ из $\mathfrak{o}$ через $d(\mathfrak{a})$ обозначить размерность кольца $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, то функция $d(\mathfrak{a})$ полунепрерывна сверху.

Автор отмечает, что предложения 1—4 без изменения распространяются на кольца Зарисского.

А. И. Узков

2385. Автоморфизмы упорядоченных множеств. Шик (Automorphismen geordneter Mengen. Šik Františ ek). Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 1—22 (нем.; рез. чешск., русск.)

Под автоморфизмом упорядоченного множества $\mathfrak{M}$ понимается взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{M}$ на себя, сохраняющее отношение упорядочения. Совокупность всех автоморфизмов множества $\mathfrak{M}$ образует группу $\mathfrak{G}$ относительно обычной операции умножения. Если положить для $f,g\in\mathfrak{G}$ $f\leq g$ тогда и только тогда, когда $f(x)\leq g(x)$ для всех $x\in\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{G}$ становится структурно упорядоченной группой. Будем обозначать через Γ подгруппу группы $\mathfrak{G}$, при этом Γ рассматривается как частично упорядоченная группа относительно частичного упорядочения в $\mathfrak{G}$. Два элемента $f,g\in\Gamma$ называются одинаково ориентированными, если для любого $x\in\mathfrak{M}$ из $f(x)>x$ следует $g(x)\geq x$ и из $g(x)>x$ следует $f(x)\geq x$.

В работе изучается взаимная зависимость между свойствами группы Γ и множества $\mathfrak{M}$. Отметим главные, по мнению автора, результаты. Доказано, что транзитивная группа Γ автоморфизмов на $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда является упорядоченной, когда ее сопряженные элементы одинаково ориентированы.

Циклом автоморфизма f на $\mathfrak{M}$ называется подмножество $A\subset\mathfrak{M}$, определяемое следующим образом: берем произвольный элемент $x\in\mathfrak{M}$; если $f(x)=x$, то $A=(x)$; если $f(x)>x$, то $A=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon\,[f^n(x)\leq y<f^{n+1}(x);\ y\in\mathfrak{M}]$; если $f(x)<x$, то $A=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon\,[f^n(x)\leq y<f^{n-1}(x);\ y\in\mathfrak{M}]$.

Когда цикл содержит по крайней мере два различных элемента из $\mathfrak{M}$, то он называется истинным. Группа Γ называется моноциклической, если каждый ее элемент имеет самое большее один истинный цикл. Элемент $x\in\mathfrak{M}$ называется стабильным (относительно Γ), если $f(x)=x$ для каждого $f\in\Gamma$. Через $\mathfrak{M}(\Gamma)$ обозначается множество всех нестабильных элементов из $\mathfrak{M}$. В случае, когда f обладает истинным циклом A, автоморфизм $g\in\mathfrak{G}$ называется фазой автоморфизма f, если $g(x)=f(x)$ для $x\in A$ и $g(x)=x$ для $x\notin A$. Группа Γ обладает свойством (α), если вместе с каждым $f\in\Gamma$ и $f\neq e$ для некоторой фазы g автоморфизма f и некоторого натурального числа $n>0$ $g^n\in\Gamma$. Группа дивергентна, если для любых $x,y\in\mathfrak{M}$, $x<y$ существует такой элемент $f\in\Gamma$, что $f(x)\geq y$. Показано, что на группе Γ эквивалентны следующие свойства:

а) Γ моноциклична; б) Γ архимедово упорядоченная и дивергентна; в) $\mathfrak{M}\Gamma$ является циклом каждого автоморфизма $f\in\Gamma$, $f\neq e$; г) Γ упорядоченная и обладает свойством (α).

$\mathfrak{M}$ называется сверху (снизу) слабо полным относительно Γ, если для каждого ограниченного сверху (снизу) множества автоморфизмов $\{f_\nu\}\subset\Gamma$ существует в $\mathfrak{M}$ элемент $\vee_\nu[f_\nu(x)]$ ($\wedge[f_\nu(x)]$) для любого $x\in\mathfrak{M}$. Будем называть $\mathfrak{M}$ слабо полным, если оно является сверху и снизу слабо полным относительно Γ. Отметим следующие условия: 1) $\mathfrak{M}$ — сверху слабо полное относительно Γ, и преобразование $s(x)=\vee_\nu[f_\nu(x)]$ является автоморфизмом на $\mathfrak{M}$; 2) $\mathfrak{M}$ — снизу слабо полное относительно Γ, и преобразование $t(x)=\wedge_\nu[f_\nu^{-1}(x)]$ является автоморфизмом на $\mathfrak{M}$; 3) $\mathfrak{M}$ — слабо полное относительно Γ, и для любого $x\in\mathfrak{M}$ имеет место $\bigvee_\nu\{f_\nu(\bigwedge_\mu[f_\mu^{-1}(x)])\}\geqq \geqq\{f_\nu^{-1}(\bigvee_\mu[f_\mu(x)])\}$. В статье установлено, что если некоторое из условий 1), 2), 3) выполнено для любого сверху ограниченного подмножества $\{f_\nu\}$ группы Γ автоморфизмов на $\mathfrak{M}$, то выполнены также все остальные, Γ полная l-группа, и для преобразований s и t имеем $s=Vf_\nu$, $t=\wedge f_\nu^{-1}$.

В случае, когда Γ — транзитивная группа, выяснено, при каких условиях она изоморфна упорядоченным аддитивной группе всех целых чисел и аддитивной группе всех действительных чисел. Установлено, что $\mathfrak{M}$, обладающее скачком, является множеством типа $\omega^*\otimes\omega$ тогда и только тогда, если существует на $\mathfrak{M}$ архимедово упорядоченная транзитивная группа автоморфизмов.

В заключение предполагается, что Γ является интранзитивной. Обозначая через T область транзитивности группы Γ, через Γ_T группу всех автоморфизмов на T, индуцированных на T автоморфизмами группы Γ, и через Γ^T группу всех автоморфизмов из Γ, для которых элементы, не содержащиеся в T, неподвижны, можно сформулировать следующие теоремы: Если группа Δ всех автоморфизмов на T абелева, то $\Gamma_T=\Delta$. Если Γ — архимедово упорядоченная группа, то каждая область транзитивности группы Γ, содержащая в себе не менее двух элементов из $\mathfrak{M}$ (истинная область), подобна упорядоченному множеству Γ, и каждая упорядоченная группа Γ_T (для истинных T) изоморфна упорядоченной группе Γ. Если Γ — архимедова l-группа и если Γ обладает в точности двумя истинными областями транзитивности T и S, то Γ является упорядоченной тогда и только тогда, когда имеют место равенства $\Gamma^T=(e)=\Gamma^S$. А. А. Виноградов

2386. **Реализация полных структурно упорядоченных групп. Жаффар** (Réalisation des groupes complètement réticulés. Jaffard Paul), Bull. Soc. math. France, 1956, 84, № 3, 295—305 (франц.)

Гомоморфизм φ структурно упорядоченной (с. у.) группы G в с. у. группу G' называется конструктурным, если для всякой пары элементов $x, y\in G$ имеет место соотношение: $\varphi(\sup(x,y))=\sup(\varphi(x),\varphi(y))$. В случае, если G и G' являются полными с. у. группами, и из того, что подмножество $X\subset G$ имеет наименьшую верхнюю грань (н. в. г.), следует, что $\varphi(X)$ также имеет н. в. г., причем $\varphi(\sup X)=\sup(\varphi(X))$, гомоморфизм φ называется вполне конструктурным. Подгруппа H с. у. группы G конструктурна, если для всякой пары элементов $x, y\in H$ их $\sup(x,y)$ (в G) принадлежит H. Выпуклую подгруппу H полной с. у. группы G назовем вполне конструктурной, если для всякого подмножества $X\subset H$, имеющего н. в. г. в G, его н. в. г. принадлежит H. В работе показано, что выпуклая подгруппа H полной с. у. группы G тогда и только тогда вполне конструктурна, когда естественно частично упорядоченная фактор-группа G/H является полной с. у. группой и естественное отображение φ группы G на G/H вполне конструктурно.

Простым t-идеалом с. у. абелевой группы G называется подмножество $\mathfrak{p}\subset G^+$, удовлетворяющее следующим условиям: $\mathfrak{p}\neq G^+, \varnothing$; $\{x\in\mathfrak{p}$ и $x\leqslant y\}$ влечет $y\in\mathfrak{p}$; из $\{x,y\in G^+$, $x+y\in\mathfrak{p}$ и $x\neq\mathfrak{p}\}$ следует $y\in\mathfrak{p}$. Простой t-идеал группы G максимален, если он не содержится ни в каком другом простом t-идеале. Известно, что между простыми t-идеалами с. у. группы G и конструктурными гомоморфизмами устанавливается соответствие следующим образом: для простого t-идеала $\mathfrak{p}$ определяется подмножество $H_\mathfrak{p}\subset G$, удовлетворяющее условиям: $x\in H_\mathfrak{p}\rightleftharpoons\{x^+, x^-=-\inf(x,0)\notin\mathfrak{p}\}$. $H_\mathfrak{p}$ является выпуклой конструктурной подгруппой группы G и $G/H_\mathfrak{p}=G_\mathfrak{p}$ является естественно упорядоченной. Обратно, если φ есть конструктурный гомоморфизм группы G на упорядоченную группу G', то подмножество $\mathfrak{q}\in G^+$, определенное через соотношения: $x\in\mathfrak{q}\rightleftharpoons\{x\in G^+$ и $\varphi(x)>0\}$, является простым t-идеалом группы G, причем $\varphi^{-1}(0)=H_\mathfrak{q}$ и $\varphi=\varphi_\mathfrak{q}$. В статье доказано, что в полной с. у. группе G всякий такой простой t-идеал $\mathfrak{p}$ группы G, что подгруппа $H_\mathfrak{p}$ является вполне конструктурной, есть максимальный простой t-идеал, а $H_\mathfrak{p}$ в том и только в том случае вполне конструктурна, когда $\mathfrak{p}$ определяется минимальной нитью (РЖМат, 1955, 3635) группы G. Говорят, что идеал $\mathfrak{p}$ и гомоморфизм $\varphi_\mathfrak{p}$ определяются минимальной нитью $\bar{a}$ группы G, если $x\in\mathfrak{p}_{\bar{a}}\rightleftharpoons\inf(a,x)>0$. Реализацией с. у. группы G в кардинальном прямом произведении $\Gamma=\Pi_{i\in I}G_i$ упорядоченных групп G_i называется включение G в качестве конструктурной подгруппы в Γ. Она называется неприводимой, если для всякого индекса $\alpha\in I$ ядро естественного гомоморфизма G в $\Gamma_\alpha=\Pi_{i\neq\alpha}G_i$ отлично от нуля. Когда G есть полная с. у. группа, то реализация группы G в $\Gamma=\Pi_{i\in I}G_i$ называется вполне конструктурной реализацией, если она определяет G как вполне конструктурную подгруппу группы Γ. Автором показано, что для того чтобы полная с. у. группа G обладала вполне конструктурной реализацией, необходимо и достаточно, чтобы G обладала неприводимой реализацией. Группа G обладает не более чем одной вполне конструктурной реализацией. Причем, если такая реализация существует, то упорядоченные группы, которые ее определяют, изоморфны аддитивной группе целых чисел или аддитивной группе вещественных чисел. Если полная с. у. группа G не обладает минимальной нитью, то никакой гомоморфизм группы G на упорядоченную группу не является вполне конструктурным.

Топологическое пространство ε называется пространством Стона, если оно компактно и если частично упорядоченная обычным образом группа G всех непрерывных функций, заданных на ε и принимающих вещественные числовые значения, является полной с. у. группой. Доказано, что группа G функций, заданных на ε, тогда и только тогда обладает вполне конструктурной реализацией, когда пространство ε конечно.

Отметим, что теорема 2 работы не является новой (Michiura T., Indagationes math., 1951, **13**, 386 — 387).

А. А. Виноградов

2387. **О так называемом латинском квадрате групп. Ямамото**, Сугаку, 1954, **6**, № 3, 162—164 (японск.)

2388. ***n*-группы с единицами. Робинсон** (*n*-groups with identity elements. Robinson Donald W.), Math. Mag., 1958, **31**, № 5, 255—258 (англ.)

Множество M, замкнутое относительно некоторой $(n+1)$-арной операции $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, называется n-полугруппой, если $((a_0, a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, (a_i, \ldots, a_{i+n}), \ldots, a_{2n})$, $i = 1, \ldots, n$; $a_k \in M$. Если в n-полугруппе для любых $a, a_1, \ldots, a_n$ разрешимо каждое из уравнений $(x, a_1, \ldots, a_n) = a$ и $(a_1, \ldots, a_n, y) = a$, то она называется n-группой.

Доказывается, что n-полугруппа M, обладающая таким элементом e, что для любого элемента $a \in M$ $(e, e, \ldots, e, a) = a$ и уравнение $(x, e, \ldots, e) = a$ разрешимо, является n-группой, причем $(a, e, \ldots, e) = a$, каждое из уравнений $(x, e, \ldots, e) = a$, $(e, \ldots, e, y) = a$ имеет ровно по одному корню, а эти корни совпадают. А. И. Ширшов

2389. Квазигруппы и неассоциативные системы. III. Чаудхури (Quasigroups and nonassociative systems. III. Choudhury A. C.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 1, 9—24 (англ.)

Продолжается изучение квазигрупп и других алгебраических систем с помощью левых или правых графов (предыдущие части см. там же, 1948, **40**, 183; 1949, **41**, 221). Именно, если $a \in Q$, где Q — аддитивно записываемая квазигруппа, то решение уравнения $x + a = a$ называется левым относительным нулем и обозначается через $0_l(a)$. Совокупность всех цепей и циклов вида $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где каждый элемент является левым относительным нулем предыдущего, называется левым графом. Аналогично определяется правый относительный нуль $0_r(a)$ и правый граф.

Под кольцоидом понимается множество R, являющееся квазигруппой относительно операции сложения $+$ и группоидом относительно умножения, причем обе операции связаны дистрибутивным законом. Элементы a, b называются делителями левого относительно нуля, если $a \neq 0_l(p)$ $b \neq 0_l(q)$, но $ab = 0_l(r)$. В кольцоиде R выполняется сильное условие для левых относительных нулей, если из $a \neq 0_l(p)$, $ab = 0_l(as)$ следует $b = 0_l(S)$. Доказывается, что в таких кольцоидах верно следующее свойство: из $ab = ac$, где a — не левый относительный нуль, следует $b = c$. Имеет место также и такая теорема: уравнение $0_l(p)\, x = q$ разрешимо тогда и только тогда, когда $q = 0_l(r)$, $w(q) = 1$ и уравнение $px = r$ разрешимо. Под $w(q)$ понимается вес элемента q, т. е число решений уравнения $q + x = x$.

В кольцоидах R с единицей 1 относительно умножения вводится понятие характеристики следующим образом. Определяются левые кратные $na = a + (n-1)a$. Наименьшее целое положительное число p, для которого существует такой элемент r, что $p1 = 0_l(r)$, называется ll-характеристикой. Если в определении характеристики берется правый относительный нуль, то получается lr-характеристика, и т. д., всего четыре характеристики. Понятие характеристики вводится и для кольцоидов без делителей относительных нулей. Вычисляются характеристики различных кольцоидов; они могут быть различными числами и не обязательно простыми.

Последние параграфы посвящены гомоморфизмам квазигрупп и кольцоидов. Каждому гомоморфизму h ставится в соответствие отношение конгруэнтности θ: $a\,\theta\,b$, если $h(a) = h(b)$. По Киокемейстеру (Kiokemeister F., Amer. J. Math., 1948, **70**, 99) отношение конгруэнтности θ называется нормальным, если гомоморфный образ $h(Q)$ квазигруппы Q — также квазигруппа, или, если из $ca\,\theta\,cb$, $ac\,\theta\,bc$ следует $a\,\theta\,b$. Передоказывается известная теорема Биркгофа, что все нормальные отношения на квазигруппе образуют модулярную структуру.

Автор вводит понятие ядра гомоморфизма h относительно элемента a (обозначение N_a), именно, $x \in N_a$, если $h(x) = h(0_l(a))$ или $x\,\theta\,0_l(a)$. Ядро называется нормальным, если θ нормальное. Основной результат следующий: Необходимое и достаточное условие, чтобы система ядер N_a соответствовала нормальному отношению θ, является $N_a \cdot N_b\, b = N_{ab}$ (ab). Понятие нормального ядра переносится на кольцоиды и применяется к различным примерам, в частности к медиальным квазигруппам (с законом $ab \cdot cd = ac \cdot bd$). Имеется много опечаток. В. Д. Белоусов

2390. Несколько замечаний относительно изоморфизмов и автоморфизмов квазигруппы. Сад (Quelques remarques sur l'isomorphisme et l'automorphisme des quasigroupes. Sade A.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 1-2, 84—91 (франц.)

В первой части статьи рассматриваются группы автоморфизмов и изоморфизмов любой квазигруппы $Q(\cdot)$. Пусть G — некоторая группа подстановок на множестве Q, A — пересечение этой группы с группой A_Q всех автоморфизмов квазигруппы $Q(\cdot)$. Из каждого правого смежного класса по A в G берется по одному представителю. Если все представители образуют группу, то она называется группой изоморфизмов квазигруппы $Q(\cdot)$ в группе G.

Доказывается теорема: Необходимым и достаточным условием того, чтобы квазигруппа $Q(\cdot)$ обладала группой изоморфизмов в G, является существование такой подгруппы I группы G, равномощной множеству смежных классов по A, что $A \cap I = 1$. Если $Q(\cdot)$ — квазигруппа порядка n, то любой ее автоморфизм оставляет неподвижными не более $[n/2]$ элементов, откуда следует, что при $n > 4$ группа A_Q не может быть симметрической, а при $n > 6$ — знакопеременной группой. Множество $D \subset Q$ инвариантных элементов относительно $T \in A_Q$ будет подквазигруппой квазигруппы $Q(\cdot)$, и если D — максимальная подквазигруппа, то T будет регулярной подстановкой на QD.

Во второй части даются некоторые необходимые условия изоморфизма двух квазигрупп $Q(\cdot)$ и $Q(\times)$. Отметим следующие условия. Последовательность элементов $a_1, a_2, a_3 \ldots$ называется цепью произведений квазигруппы, если каждый член последовательности является произведением двух предыдущих; число элементов цепи называется ее длиной. Изоморфные квазигруппы должны иметь цепи одинаковых длин. Зная цепи квазигруппы $Q(\cdot)$, можно найти в некоторых случаях и группу автоморфизмов A_Q. Последовательность элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называется цепью частных для элемента b, если $a_n\, a_{n+1} = b$ для любого n. Если $Q(\cdot)$ и $Q(\times)$ изоморфны, то цепи частных должны иметь одинаковые длины. Отметим, что каждый элемент a определяет с помощью цепи частных отношение эквивалентности θ_a и что такие отношения коммутируют между собой. В. Д. Белоусов

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2391. Об одном обобщении основной теоремы теории Галуа. Михлер (Über eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Galoisschen Theorie. Michler Lothar), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, **1**, № 1, 3—7 (нем.)

О значении фактор-группоида $\Gamma//\mathfrak{H}$ в обобщенной теории Галуа. Михлер (Über die Bedeutung des Faktorgrupoids $\Gamma//\mathfrak{H}$ in einer verallgemeinerten Galoisschen Theorie. Michler Lothar), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, **1**, № 2, 77—80 (нем.)

Обобщение основной теоремы теории Галуа на случай конечных, сепарабельных, но не обязательно нормальных расширений полей, основанное на использовании группоидов Брандта. Все расширения данного поля рассматриваются в некотором фиксированном алгебраическом замыкании. Вместо автоморфизмов нормального расширения, оставляющих на месте элементы расширяемого поля, рассматриваются изоморфизмы между расширениями. При естественном определении произведения изоморфизмов изоморфизмы, оставляющие на месте элементы основного поля,

образуют группоид Брандта; автор его называет группоидом изоморфизмов. Группоид изоморфизмов является обобщением группы Галуа; в случае нормальных расширений оба понятия совпадают.

С помощью понятий теории группоидов Брандта формулируются и доказываются соответствия между подрасширениями рассматриваемого расширения и подгруппоидами его группоида изоморфизмов. Все доказательства ведутся непосредственно без использования классической основной теоремы теории Галуа. Л. А. Калужнин

2392. **О погружении циклического поля в метациклическое. Бейер** (Über die Einbettung zyklischer Körper in metazyklische. Beyer Gudrun), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3/4, 127—133 (нем.)

Статья дополняет исследования Вольфа (РЖМат, 1954 2024) по алгебрам Галуа. Разрешение поставленной проблемы зависит от существования решения некоторых уравнений. В настоящей статье показано, как общее решение этих уравнений может быть получено, если известно одно частное решение. Для случая абелевых алгебр соответствующий результат был получен Хассе (Hasse H., Math. Nachr., 1948, **1**, 40—61). R. Brauer

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 330.

2393. **Об одном методе определения множителей числа классов в числовых полях. Фрёлих** (On a method for the determination of class number factors in number fields. Fröhlich A.), Mathematika, 1957, **4**, № 8, 113—121 (англ.)

Пусть K — конечное расширение поля P рациональных чисел, A_K — мультипликативная группа идеалов этого поля, I_K — подгруппа группы A_K, образованная всеми главными идеалами, которые порождаются вполне положительными элементами поля.

Обозначим через $h_{K,l}$ наибольшую степень простого числа l, на которую делится число

$$h_K = (A_K : I_K).$$

Теорема 1. Если K — нормальное расширение степени l^α конечного поля алгебраических чисел Ω, удовлетворяющее условиям: 1) $h_{\Omega,l} = 1$; 2) простое число p имеет точно один простой делитель $\mathfrak{p}$ в Ω; 3) абсолютная норма относительного дискриминанта поля $K \mid \Omega$ равна p^τ, то $h_{K,l} = 1$ и в поле K число p также делится только на один простой идеал.

Теорема 2. Пусть для каждого простого идеала B поля K имеет место равенство $T_B(K/\Omega) = \Gamma(K/\Omega)$, где $\Gamma(K/\Omega)$ — группа Галуа поля K над Ω, а $T_B(K/\Omega)$ — группа инерции идеала B. Тогда $h_K \equiv 0 \pmod{h_\Omega}$.

Из теорем 1 и 2 вытекает ряд результатов о делителях числа классов h_K.

Если K нормально над P, степень K над P взаимно проста с l и дискриминант поля K равен p^α (p — простое), то $h_K \not\equiv 0 \pmod{l}$.

Если $K \subseteq P(\tau_{l^n})$, где τ_{l^n} — первообразный корень степени l^n из 1, и $\Omega = K \cap P(\tau_l)$, то $h_{K,l} = 1$ тогда и только тогда, когда $h_{\Omega,l} = 1$.

Этот результат получен Фуртвенглером (Furtwängler Ph., J. reine und angew. Math., 1911, **140**, 29—32).

Если $K = P(\tau_{l^n}, l^{1/l^n})$, то $h_{K,l} = 1$ тогда и только тогда когда $h_{\Omega,l} = 1$, где $\Omega = P(\tau_l)$. Доказывается, что при $K = P(\tau_l, p^{1/l})$ $h_K = 0 \pmod{l}$, если p и l — нечетные простые числа K и $p \equiv 1 \pmod{l}$. Если $K = P(\tau_l, p)$ и $p \equiv 1 \pmod{l^2}$, то также $h_K \equiv 0 \pmod{l}$.

Во вступительной части работы приведены новые доказательства ряда теорем теории полей классов. С. Д. Берман

2394. **p-расширение локального поля, содержащего корни степени p^M из единицы. Скопин А. И.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1955, **19**, № 6, 445—470

Приводятся доказательства ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1954, 5469).

2395. **Необходимые условия для локальной теории полей классов. Шиллинг** (Necessary conditions for local class field theory. Schilling O. F. G.), Math. J. Okayama Univ., 1953, **3**, № 1, 5—10 (англ.)

Рассматривается полное дискретно нормированное поле F, удовлетворяющее условиям:

А Для каждой степени простого числа p^m существует циклическое расширение Z/F степени p^m, в группе классов норм которого F^*/NZ^* содержится элемент порядка p^m. Б. Если k — конечное расширение F и K/k — циклическое расширение простой степени p или абелево типа (p, p), то группа классов норм $k^*/N_{K|k}K^*$ изоморфна группе Галуа K/k.

Доказывается, что поле классов вычетов поля F совершенно и имеет ровно одно расширение любой заданной степени.

Эта теорема доказана в связи с работой Мория (Moriya M., Math. J. Okayama Univ., 1952, **2**, 13—20), из которой следует, что для поля, удовлетворяющего условиям A и $Б$, выполняются все теоремы локальной теории полей классов. И. Р. Шафаревич

2396. **О каноническом базисе идеалов. Эда** (On the canonical basis of ideals. Eda Yoshikazu. Sci. Rept Kanazawa Univ., 1953, **2**, № 1, 15—21) (англ.)

P, I, K и $\mathfrak{o}$ обозначают соответственно поле рациональных чисел, область целостности поля P, поле алгебраических чисел над P степени n и область целостности поля K. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — базис идеала $\mathfrak{o}$ и $\omega_i \omega_j = \sum_{k=1}^n r_{ij}^k \omega_k$, $r_{ij}^k \in I$. Хорошо известно, что для базиса идеала $\mathfrak{o}$ в поле K существует такой базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a_i = a_i^1 \omega_1 + \ldots + a_i^i \omega_i$, $a_j^i \in I$, $N_\mathfrak{o} = \Pi_{i=1}^n a_i^i$, где $N_\mathfrak{o}$ — норма идеала $\mathfrak{o}$. Пусть $\Delta_{kj}^m = [c_{\nu\lambda}]$ — некоторая матрица, где $c_{1\lambda 1} = r_{kj}^{m+\lambda-1}$ $(\lambda = 1, \ldots, n-m+1)$, $c_{\nu 1} = a_{m+\nu-1}^m$ $(\nu = 2, \ldots, n-m+1)$, $c_{\nu\lambda} = o_{m+\nu-1}^{m+\lambda-1}$ $(\lambda = 2, \ldots, n-m+1,\ \nu = 2, \ldots)$ $(a_\nu^\lambda = 0$ для $\lambda > \nu)$. Доказывается, что базис $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ может быть выбран так, чтобы он обладал также свойством

$$\sum_{k=1}^i a_l^k \Delta_{kj}^m \equiv 0 \bmod \Pi_{i=m}^n a_i^i \ (i, j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Этот базис называется каноническим. H. Bergström

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 350.

2397. **Гильбертова функция в полулокальном кольце. Ресильяс, Льюис** (La funcion de Hilbert en anillos semilocales. Recillas J. F., Lluis R. E.), Bol. Soc. mat. mexicana, 1954, **11**, № 1-4, 1—8 (исп.)

Пусть $\mathfrak{o}$ — (нетерово) полулокальное кольцо и $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_h$ — все его максимальные простые идеалы. Тогда кольца отношений $\tilde{\mathfrak{o}}_i = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ являются локальными кольцами. Если $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал кольца $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{q}_1, \ldots \ldots, \mathfrak{q}_h$ — некоторые примарные идеалы, принадлежащие соответственно максимальным простым идеалам $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$, то гильбертовой функцией идеала $\mathfrak{a}$ относительно примарных идеалов $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_h$ называется функция

$$\chi_{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_h}(r, \mathfrak{a}) = \sum_i \chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r, \tilde{\mathfrak{a}}_i), \qquad (1)$$

где $\tilde{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{o}}_i$, $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}_i\tilde{\mathfrak{o}}_i$ и $\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r, \tilde{\mathfrak{a}}_i)$ — гильбертова функ-

ция в смысле Норткотта (РЖМат, 1953, 104) идеала $\widetilde{q}_i$ локального кольца $\widetilde{\mathfrak{o}}_i$ относительно примарного идеала $\widetilde{a}_i$; суммирование в правой части формулы (1) производится по тем индексам i максимальных простых идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, для которых $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$. Можно также считать, что суммирование производится по всем i от 1 до h, поскольку, если $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_j$ для некоторого j, то $\widetilde{a}_j \notin \widetilde{q}_j$ и, следовательно, как это вытекает из выведенных Норткоттом свойств гильбертовой функции в локальном кольце, $\chi_{\widetilde{q}_j}(r, \widetilde{a}_j) = 0$. Из результатов Норткотта и определения непосредственно вытекает, что функция $\chi_{q_1, \ldots, q_h}(r, \mathfrak{a})$ при достаточно больших r выражается в виде некоторого многочлена от r.

Выводятся следующие свойства функции $\chi_{q_1, \ldots, q_h}(r, \mathfrak{a})$.

1) Если $\bar{\mathfrak{o}}$ — пополнение кольца $\mathfrak{B}$, $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}}$ и $\bar{q}_i = q_i\bar{\mathfrak{o}}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$, $\chi_{q_1, \ldots, q_h}(r, \mathfrak{a}) = \chi_{\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_h}(r, \bar{\mathfrak{a}})$.

2) Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h^1)$, $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(h^1 + 1 \leqslant i \leqslant h)$ и пусть $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, $q_i^1 = (q_i + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ $(1 \leqslant i \leqslant h^1)$ и $\bar{0}$ — нулевой идеал кольца $\mathfrak{o}^1$. Тогда $\chi_{q_1, \ldots, q_h}(r, \mathfrak{a}) = \chi_{q_1^1, \ldots, q_{h^1}^1}(r, \bar{0})$.

3) $\chi_{q_1, \ldots, q_h} = \dim(\mathfrak{f}^r + \mathfrak{a})/(\mathfrak{f}^{r+1} + \mathfrak{a})$, где $\mathfrak{f} = q_1 \cap \ldots \cap q_h$, а под размерностью dim понимается длина композиционного ряда подмодулей модуля $(\mathfrak{f}^r + \mathfrak{a})/(\mathfrak{f}^{r+1} + \mathfrak{a})$ над кольцом Артина $\mathfrak{o}/\mathfrak{f}$.

Свойства 1) и 2) являются обобщениями соответствующих свойств гильбертовой функции $\chi_q(r, \mathfrak{a})$ в локальном кольце, установленных в упомянутой работе Норткотта, однако при выводе этих свойств авторы опираются на результаты Норткотта. Е. Г. Шульгейфер

2398. Об открытых идеалах кольца Зариского. Льюис (Sobre los ideales abiertos en anillos de Zariski. Lluis Riera Emilio), Bol. Soc. mat. mexicana, 1954, **11**, № 1-4, 33—34 (исп.)

При предположениях, указанных в следующем реферате (реф. 2399), доказывается, что с помощью тех же отображений устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми открытыми идеалами $\mathfrak{a}$ кольца $\mathfrak{v}$ и всеми открытыми идеалами $\bar{\mathfrak{a}}$ кольца $\bar{\mathfrak{v}}$. Е. Г. Шульгейфе

2399. О примарных идеалах обобщенно полулокальных колец. Льюис, Ресильяс (Sobre ideales primarios en anillos semilocales genralizados. Lluis Riera E., Recillas Juárez F.), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, **10**, № 3-4, 19—22 (исп.)

Пусть $\mathfrak{v}$ — произвольное $\mathfrak{m}$-кольцо Зариского (таким образом, $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал, содержащийся в пересечении всех максимальных идеалов кольца $\mathfrak{v}$) и $\bar{\mathfrak{v}}$ — пополнение кольца $\mathfrak{v}$. Доказывается, что отображениями $\mathfrak{q} \to \bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{v}}$ и $\bar{\mathfrak{q}} \to \mathfrak{q} \cap \mathfrak{v}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми примарными идеалами $\bar{\mathfrak{q}}$, принадлежащими некоторому максимальному простому идеалу $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{v}$, и всеми примарными идеалами $\mathfrak{q}$, принадлежащими максимальному простому идеалу $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{v}}$ кольца $\bar{\mathfrak{v}}$. Е. Г. Шульгейфер

2400. О структуре полных локальных колец. Нарита Сугаку, 1955, **7**, № 3, 22—24 (японск.)

2401. Теоремы существования нормирований с наперед заданными размерностью, рангом и центром в локальной области целостности. Сакума (Existence theorems of valuations centered in a local domain with preassigned dimension and rank. Sakuma Motoyoshi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, **A21**, № 2, 61—67 (англ.)

Доказываются следующие теоремы о существовании нормирований с наперед заданными свойствами (относящуюся к нормированиям терминологию см., например, книгу Ходжа и Пидо (РЖМат, 1956, 5455 К):

А. Пусть $\mathfrak{o}$ — локальная область целостности ранга d с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, Σ — поле частных $\mathfrak{o}$. Тогда для любых целых чисел r, $\bar{r}$ и ρ, удовлетворяющих условиям $\rho + \bar{r} = d$, $\bar{r} \geqslant r \geqslant 1$, $\rho \geqslant 0$, существует нормирование v поля Σ со следующими свойствами: 1) v имеет $\mathfrak{m}$ своим центром в $\mathfrak{o}$, 2) ранг нормирования v равен r, 3) рациональный ранг нормирования v равен $\bar{r}$, 4) размерность v в кольце $\mathfrak{o}$ равна ρ, 5) кольцо вычетов R_v/M_v, где R_v — кольцо нормы в поле Σ, а M_v — максимальный идеал в R_v, имеет конечное число образующих над $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$.

Б. При тех же обозначениях $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}$, Σ для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{o}$, имеющего ранг d_1, любых целых чисел ρ и ρ_1, удовлетворяющих неравенствам $d > \rho$, $d_1 > \rho_1$, $\rho_1 + \operatorname{rank} \mathfrak{o}/\mathfrak{p} > \rho$, и любого нормирования v_1 поля Σ, имеющего $\mathfrak{p}$ своим центром в $\mathfrak{o}$ и размерность ρ_1 в этом кольце, найдется нормирование v поля Σ со следующими свойствами: 1) v составлено из v_1 и некоторого нормирования поля вычетов для v_1, 2) v имеет $\mathfrak{m}$ своим центром в $\mathfrak{o}$, 3) ранг v на единицу больше ранга v_1, 4) размерность v в кольце $\mathfrak{o}$ равна ρ.

Из этих теорем вытекает, в частности, основной результат о нормированиях полей алгебраических функций, доказанный Зариским (Zariski O., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **53**, 480—542). А. И. Узков

2402. Некоторые замечания о нетеровых кольцах. Йосида (Some remarks on Noetherian rings. Yoshida Michio), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 1, 35—37 (англ.)

Доказываются следующие предложения:

1. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал нетерова кольца R. Если $\mathfrak{a}$ содержит элемент, не являющийся в R делителем нуля, то в $\mathfrak{a}$ найдется элемент a, для которого при всех достаточно больших n выполняются равенства $\mathfrak{a}^{n+r}\colon Ra = \mathfrak{a}^n$, где r определяется из условий $a \in \mathfrak{a}^r$, $a \notin \mathfrak{a}^{r+1}$.

2. Если простые идеалы, принадлежащие идеалу $\mathfrak{a}$ нетерова кольца R, не являются простыми идеалами нуля, то в $\mathfrak{a}$ найдется элемент a, удовлетворяющий при всех достаточно больших n соотношению $\mathfrak{a}^{(n+r)}\colon Ra = \mathfrak{a}^n$, где $a \in \mathfrak{a}^{(r)}$, $a \notin \mathfrak{a}^{(r+1)}$. Более того, для достаточно больших n справедливо соотношение $\mathfrak{a}^{(n+m)}\colon \mathfrak{a}^{(m)} = \mathfrak{a}^{(n)}$ при всех $m \geqslant 0$.

Здесь символические степени произвольного идеала $\mathfrak{a}$ определяются как пересечения соответствующих символических степеней примарных компонент этого идеала, определяемых обычным образом. Доказательства основываются на одном предложении Артина. Нужный автору частный случай этого предложения сформулирован и доказан в реферируемой работе. А. И. Узков

2403. Об уравнении $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{x}$ с неизвестным идеалом. Мори (Über die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{x}$ mit einem unbekannten Ideale $\mathfrak{x}$. Mori Shinziro), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A17**, № 3, 303—309 (нем.)

В нетеровом кольце $\mathfrak{R}$, не обязательно содержащем единицу, рассматривается уравнение $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{x}$, в котором идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ заданы. Доказывается, что среди решений этого уравнения существует единственный максимальный идеал, причем он выражается формулой $\bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$.

Доказываются следующие свойства максимального решения уравнений указанного вида:

1. Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{R}$, отличный от $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{q}$ — примарный идеал, принадлежащий $\mathfrak{p}$, то максимальное решение уравнения $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{q}) = \mathfrak{x}$ совпадает либо с $\mathfrak{R}$, либо с $\mathfrak{q}$, смотря по тому, имеет место равенство $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{R}$, или нет. Если $\mathfrak{p} = \mathfrak{R}$, то максимальное решение того же уравнения всегда совпадает с $\mathfrak{q}$.

2. Если $\mathfrak{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$ — любые идеалы, для которых $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{b}_i) = \mathfrak{R}$, то пересечение $\mathfrak{b}$ этих идеалов также удовлетворяет условию $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{R}$.

3. Если $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ — несократимое представление идеала $\mathfrak{b}$ пересечением примарных идеалов, а $\mathfrak{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$ — максимальные решения уравнений $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{q}) = \mathfrak{x}$, то максимальное решение уравнения $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{q}) = \mathfrak{x}$ определяется формулой $\mathfrak{x} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{x}_i$.

Доказательства всех свойств опираются на следующее предложение:

Если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — любые идеалы из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие соотношению $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}$, то существует элемент $a \in \mathfrak{a}$, для которого при любом $x \in \mathfrak{c}$ имеет место сравнение $ax \equiv x \pmod{\mathfrak{b}}$.

Свойства 1 и 3 содержат в качестве частного случая теорему о пересечении $\bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$, ранее доказанную Зариским для колец с единицей (Zariski O., Summa Math. Brasil., 1946, 1, 169—195). А. И. Узков

2404. Замечание о сопряженных элементах. Томинага (A note on conjugates. Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1957, 7, № 1, 75—76 (англ.)

Пусть R — бесконечное простое подкольцо (ассоциативного) кольца U, а T — множество всех элементов вида rtr^{-1}, где t — некоторый фиксированный элемент кольца U, а r — регулярный элемент кольца R. Доказывается, что либо мощности множеств R и T совпадают, либо же $T = \{t\}$. А. И. Ширшов

2405. О совокупности делителей нуля в алгебрах. Ше (Sulla varietà dei divisori dello zero nelle algebre. Sce Michele), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 23, № 1-2, 39—44 (итал.)

Пусть A — квадратная матрица порядка n с элементами из (некоммутативного) тела C. Если элементы первого столбца матрицы A отличны от нуля, то A можно привести к треугольному виду с помощью $n!$ различных способов. Произведения диагональных элементов этих $n!$ треугольных матриц, взятые с соответствующими знаками, автор называет значениями матрицы A. Значения произведения двух матриц равны нулю в том и только в том случае, если равны нулю значения одной из них. Доказывается, что для некоторых видов алгебр проблема отыскания левых или правых делителей нуля сводится к установлению того, что значения некоторых соответствующих матриц равны нулю. Доказывается, что исследование совокупности делителей нуля в альтернативных алгебрах над полем характеристики $\neq 2$ и в йордановых алгебрах характеристики 0 сводится к изучению аналогичной совокупности в центральных простых алгебрах. Основной теоремой, доказанной в работе, является следующая: размерность совокупности делителей нуля в альтернативной алгебре A над полем с характеристикой $\neq 2$ равна разности ранга алгебры A и максимального ранга примитивной алгебры, являющейся делителем алгебры A. В. К. Туркин

2406. Алгебраические и диагональнообразные кольца. Дрейзин (Algebraic and diagonable rings. Drazin M. P.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 341—354 (англ.)

Перенесение результатов Джекобсона об алгебраических алгебрах на алгебраические кольца. Рассматривается ассоциативное кольцо R, имеющее в качестве области операторов произвольное коммутативное кольцо F, причем предполагается, что F содержит тождественный оператор. Случай кольца „без операторов" включается в эту схему, если в качестве F взять кольцо целых чисел. Элемент x кольца R называется алгебраическим над F, если существует такое целое положительное n и такие элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в F, что x удовлетворяет уравнению $x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n = 0$, т. е. первый элемент a_i, не равный нулю, есть тождественный оператор. Другая эквивалентная форма этого определения следующая: x является алгебраическим, если существует такое положительное целое число $m = m(x)$ и такой элемент $a = a(x)$ в подкольце, порожденном x, что $x^m = x^m a$. Кольцо R называется алгебраическим над F, если каждый x в R является алгебраическим над F. Доказывается основная теорема о том, что если F — произвольная область целостности с единицей, не являющаяся полем, а R — любое алгебраическое кольцо над F, то из уравнения $a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n = 0$, где $a_i \in F$, $a_m \neq 0$, $x \in R$, следует существование такого ненулевого α в F, что $\alpha x^m = 0$. Отсюда вытекает, что всякое кольцо с нулевой характеристикой будет алгебраическим над кольцом целых чисел в том и только в том случае, если оно есть ниль-кольцо. Далее доказывается ряд результатов, связанных с теоремой Херстейна о коммутативности колец. Элемент x кольца R над F называется диагонально-образным над F, если в F существуют такие различные элементы $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$, что $x(\nu_1 x + 1) \ldots (\nu_t x + 1) = 0$. Последнее равенство имеет смысл в кольце R без единицы. Кольцо R над F называется диагонально-образным, если каждый его элемент диагонально-образен над F. Доказывается, что всякое диагонально-образное кольцо коммутативно. Наконец, рассматриваются аддитивные функции на π-регулярных кольцах (кольцо R называется π-регулярным, если для всякого x из R существует такое целое $s = s(x)$ и такой элемент $b = b(x)$ в R, что $x^s = x^s b x^s$). Доказывается также, что всякое π-регулярное кольцо без нильпотентных элементов будет строго регулярным (кольцо R называется строго регулярным, если для всякого x из R существует такой элемент $a = a(x)$, что $x = x^2 a$). В. А. Андрунакиевич

2407. К теории ниль-колец. Левицкий (Contributions to the theory of nilrings. Lesitzki J.), Riveon Lemat., 1953—1954, 7, 50—70 (иврит; рез. англ.)

Вводятся новые типы ниль-колец — V-кольца. Бесконечная последовательность элементов кольца $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называется исчезающей справа или, короче, V_r-последовательностью, если для некоторых m и n имеем $a_{m+1} \ldots a_{m+n} = 0$; она называется V_l-последовательностью, если $a_{m+n} \cdot a_{m+n-1} \ldots a_{m+1} = 0$. Кольцо S называется V_r-кольцом (V_l-кольцом), если все бесконечные последовательности в S являются V_r- (V_l-) последовательностями. Кольцо называется V_{rl}-кольцом, если оно будет одновременно V_r- и V_l-кольцом. Нильпотентное кольцо, очевидно, есть V_{rl}-кольцо. Показывается, что всякое V_{rl}-кольцо будет L-кольцом, т. е. будет совпадать с нижним радикалом Бера. Если обозначим через $N(S)$ сумму всех V_r-идеалов (или V_l-идеалов) и будем обычным образом трансфинитно повторять процесс образования $N(S)$, то получим бесконечно возрастающую цепочку $\{N_\rho\}$, которая во всех этих случаях оканчивается нижним радикалом $L(S)$ кольца. Для данного элемента $a \in S$ отображение $x \to xa$ является эндоморфизмом a_1 аддитивной группы кольца S. Соответствие $a \to a_1$ есть гомоморфизм кольца S (левое представление S), ядро которого будет правым аннулятором $M^r(S)$. Трансфинитное повторение приводит к возрастающей последовательности правых аннуляторов $\{M_\rho^{(r)}\}$, которая заканчивается правым аннулятором $M_\tau{}^r$, где τ — нижний правый индекс S, т. е. наименьшее порядковое число для которого $M_{\tau+1} = M_\tau$. Кольцо $S/M_\tau^{(r)}$ будет точным слева (т. е. его левое представление есть изоморфизм) и $M_\tau^{(r)}$ является пересечением всех таких идеалов A, что S/A — точно слева. $M_\tau^{(r)}$ будет множеством всех таких элементов a, что каждая бесконечная последовательность в S, начинаю-

щаяся с a, есть V_l-последовательность. Кольцо S будет V_l-кольцом тогда и только тогда, когда $S=M_\tau^{(r)}$. Доказывается, что всякое V_r-кольцо (V_l-кольцо) будет трансфинитно-нильпотентно слева (справа) и, если τ' (соответственно τ) есть нижний левый (правый) индекс кольца S, то $\overleftarrow{S}^{\tau'+1}=0$ ($\overrightarrow{S}^{\tau+1}=0$). В. А. Андрунакиевич

2408. Несчетные нормальные локально конечные алгебры с делением. Барсотти (Noncountable normally locally finite division algebras. Barsotti Iacopo), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1101—1103 (англ.)

Регулярным автор называет поле F, обладающее следующими свойствами: 1) F бесконечно; 2) тензорное произведение двух конечных нормальных алгебр с делением A и B над F может быть алгеброй с делением только тогда, если ранги A и B над F взаимно просты. Поля алгебраических чисел и p-адические поля регулярны. В дальнейшем F — регулярное поле. Алгебра с делением A над F называется нормально локально конечной, если каждое конечное подмножество в A порождает конечную нормальную алгебру над F. Автором (Rend. di mat. 1948, 7, 1) было доказано, что над всяким несчетным регулярным полем F существует нормально локально конечная алгебра с делением нечетного ранга над F. В настоящей работе дается новое, упрощенное доказательство этого факта. Л. А. Калужнин

2409. 103-я проблема Биркгофа. Лендерс (Birkhoff's problem 103. Leenders J. H.), Simon Stevin, 1958, 32, № 1, 1—22 (англ.)

Указанная проблема формулируется следующим образом: можно ли в двумерном вещественном арифметическом пространстве K, упорядоченном лексикографически, задать умножение так, чтобы K стало упорядоченным ассоциативным кольцом? Найдены все кольца, дающие положительное решение проблемы. Рассматриваются простые алгебраические свойства этих колец. Е. Н. Кузьмин

2410. Теоремы о перенесении некоторых свойств кольца $A[\Theta]$, представляющего простое целое расширение кольца A. Мори (Théorèmes de transfert de certaines propriétés de l'anneau $A[\Theta]$, extension simple entière de A. Maury Guy), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 3, 265—267 (франц.)

Приводятся краткие формулировки условий, при которых свойства кольца A остаются верными и для кольца $A[\theta]$, где θ — целый элемент над кольцом A.

Пусть P — максимальный идеал кольца A. Тогда если A локально, то для локальности кольца $A[\theta]$ необходимо и достаточно, чтобы образ $\bar{\varphi}$ в A/P многочлена $f(x)$ из $A[x]$ наименьшей степени, имеющего корень θ, представлялся как $\bar{\varphi}=[\bar{\varphi}'(x)]^\lambda$, $\lambda\geqslant 1$, где $\bar{\varphi}'(x)$ — неприводимый многочлен кольца $(A/P)[x]$. Далее рассматриваются аналогичные условия того, чтобы $A[\theta]$ было регулярно локальным, если только A регулярно локально, и условия целозамкнутости кольца $A[\theta]$ без делителей нуля, если A целозамкнуто и без делителей нуля. Б. М. Уразбаев

2411. О расщеплении бесконечных алгебр. Лю Шаосюэ, Матем. сб., 1957, 42, № 3, 327—352

Продолжение исследований автора (РЖМат, 1957, 6888), касающихся перенесения теоремы Веддербарна—Мальцева о расщеплении со случая локально конечных алгебр на случай некоторых бесконечных алгебр. Рассматриваются алгебры с топологией (R-топологией), определенной последовательностью идеалов $R=R_1\supseteq R_2\supseteq\ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} R=0$.

Две подалгебры P и P' такой топологической алгебры называются сопряженными относительно идеала R, если существует такой автоморфизм $\sigma=1+f(R_{x_i}, L_{y_j})$, $i, j=1, 2, \ldots$ (где R_{x_i} — умножение справа на x_i, а L_{y_i} — слева на y_i, а f — некоммутативный полином без свободного члена от R_{x_i}, L_{y_j}, причем в каждый его член входит по крайней мере одно R_{x_i} или L_{y_j}), что $P\sigma=P'$. Вводится еще некоторое ослабление этого понятия, так называемая слабая сопряженность. Алгебра A называется расщепляемой относительно идеала R, если $A=P+R$, где P — подалгебра, и $P\cap R=0$.

Через C условимся обозначать для ассоциативных алгебр сепарабельность, а для лиевых, альтернативных и йордановых алгебр полупростоту в смысле их классических радикалов. Через R обозначим локально N-радикал алгебры A (РЖМат, 1957, 6888). Этот радикал всегда существует. Доказывается, что если A — йорданова алгебра характеристики нуль и A/R — конечная прямая сумма любого числа конечных C-алгебр, то A расщепляема относительно R. Пусть $A=P+R=P'+R$. Если, кроме того, радикал конечен, то подалгебры P и P' сопряжены. Если же только A/R есть сумма любого числа локально C-алгебр и радикал R конечен, то алгебра A расщепляема и ее подалгебры P и P' и слабо сопряжены. Лиева алгебра называется алгебраичной, если для всяких ее элементов x и a существует такое натуральное число k, что элементы x, xa, $xa^2=(xa)a, \ldots, xa^k=(xa^{k-1})a$ линейно зависимы. Доказывается, что если A — ассоциативная над полем любой характеристики, альтернативная, йорданоза или алгебраическая лиева (над полем характеристики нуль) алгебра, полная в R-топологии, и A/R — локально C-алгебра не более чем счетного ранга, то алгебра A расщепляема. Кроме того, локально C-подалгебра θ алгебры A слабо сопряжена с некоторой подалгеброй θ' алгебры P. Если вместо R-полноты предположить $R^{[n]}=0$ для некоторого n (где для ассоциативного, альтернативного и лиева случаев $R^{[1]}=R$, $R^{[k]}=\{RR^{[k-1]}, R^{[k-1]}R\}$, а для йорданова случая $R^{[k]}=\{R^{[k-1]}R^2, (R^{[k-1]}R)R\}$), и условие минимальности для идеалов алгебры A, содержащихся в R, и если A/R — прямая сумма любого числа конечных C-алгебр, то получается расщепляемость алгебры A и слабая сопряженность подалгебр P и P'. A. Sulinski

2412. О коммутаторном подкольце. Мак-Лауд (On the commutator subring. McLeod J. B.), Quart. J. Math., 1958, 9, № 35, 207—209 (англ.)

Доказывается, что в ассоциативной алгебре с двумя образующими над полем без характеристики подалгебра, порождаемая всевозможными коммутаторами $ab-ba$, является идеалом. Строятся примеры, показывающие, что ограничения на характеристику и число образующих существенны. А. И. Ширшов

2413. Комплексные четырехмерные алгебры Ли. Уолес (Complex four-dimensional Lie algebras. Wallace E. W.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957—1958, A65, № 1, 72—83 (англ.)

Перечисляются все четырехмерные комплексные алгебры Ли. Для каждой из них указывается базис, в котором структурные константы имеют простейший вид. Вводится набор чисел, характеризующий четырехмерную алгебру однозначно, с точностью до изоморфизма. А. Л. Онищик

2414. О кольцах Ли, удовлетворяющих условию Энгеля. Кострикин А. И., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 4, 580—582

Кольцо Ли L удовлетворяет условию $E_{n,p}$ (p — простое или 0), если оно 1) имеет характеристику p, 2) удовлетворяет n-му условию Энгеля $[\ldots,[[u,v],v]\ldots v]=0$ для любых $u, v\in L$, если число множителей v равно n и 3) $n<p$ при $p\neq 0$.

Доказывается, что кольца Ли, удовлетворяющие условиям $E_{4,p}$ и $E_{5,p}$, локально нильпотентны. Отсюда вы-

водится, что в приведенной свободной группе $B_{q,5}$ с q образующими и соотношением $x^5 = 1$ пересечение всех членов убывающего центрального ряда имеет конечный индекс (ограниченная проблема Бернсайда для показателя 5).

При доказательстве используется понятие радикала кольца Ли, который определяется как сумма всех локально нильпотентных идеалов. В предположении, что L удовлетворяет условию $E_{n,p}$, доказывается, что 1) радикал $N(L)$ кольца L является локально нильпотентным идеалом и 2) радикал $L/N(L)$ равен нулю.

И. Р. Шафаревич

2415. Йордановы дифференцирования первичных колец. Херстейн (Jordan derivations of prime rings. Herstein I. N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1104—1110 (англ.)

Пусть A — ассоциативное первичное кольцо, не являющееся коммутативной областью целостности. Доказывается, что всякое отображение $x \to x'$ кольца A в себя, удовлетворяющее условиям: $(a+b)' = a' + b'$; $(a^2)' = aa' + a'a$; $(aba)' = a'ba + ab'a + aba'$, является дифференцированием кольца A.

А. И. Ширшов

2416. Примеры гипералгебр. Картье (Exemples d'hyperalgèbres. Cartier P.), Sémin. «Sophus Lie». Fac. sci. Paris, 1955—1956 (1957), 2, № 3, 1—15 (франц.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Линад кольцом K, $U(\mathfrak{G})$ — ее обертывающая алгебра. Гомоморфизм $x \to (x, x)$ алгебры $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ и нулевой гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \{0\}$ индуцируют гомоморфизмы $U(\mathfrak{G}) \to U(\mathfrak{G}) \otimes U(\mathfrak{G})$ и $U(\mathfrak{G}) \to K$, которые определяют в $U(\mathfrak{G})$ структуру гипералгебры. Пусть характеристика кольца K равна $p \neq 0$. Доказывается, что многочлен $(x+y)^p - x^p - y^p$ над K выражается через коммутаторы; это выражение обозначается $\Lambda_p(x, y)$. Автор называет p-алгеброй алгебру Ли $\mathfrak{G}$ над кольцом K, снабженную отображением $x \to x^{[p]}$ в себя, которое удовлетворяет следующим условиям: $adx^{[p]} = (adx)^p$, $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Lambda_p(x, y)$ ($x, y \in \mathfrak{G}$, $\lambda \in K$). Отождествляя в $U(\mathfrak{G})$ элементы x^p и $x^{[p]}$ ($x \in \mathfrak{G}$), получим алгебру $\tilde{U}(\mathfrak{G})$, которая также снабжается структурой гипералгебры. Доказывается, что если U — гипералгебра над полем K, то множество $\mathfrak{G}$ ее примитивных элементов является алгеброй Ли (p-алгеброй, если характеристика K равна $p \neq 0$) относительно операции $[x, y] = xy - yx$ ($x^{[p]} = x^p$ соответственно), причем вложение $\mathfrak{G} \to U$ продолжается в мономорфизм гипералгебр $U(\mathfrak{G}) \to U$ ($\tilde{U}(\mathfrak{G}) \to U$ соответственно). Третьим примером гипералгебры является алгебра $\Gamma(M)$, где M — унитарный K-модуль, определенная образующими $m^{(h)}$ ($m \in M$, h — целое неотрицательное число) и соотношениями: $(m+m)^{(h)} = \sum_{i+j=h} m^{(i)} m^{(j)}$, $(\lambda m)^{(h)} = \lambda^h m^{(h)}$,

$h!\, k! m^{(h)} m^{(k)} = (h+k)! m^{(h+k)}$ ($m, m' \in M, \lambda \in K$). А. Л. Онищик

2417. Система независимых аксиом для величин. Беренд (A system of independent axioms for magnitudes. Behrend F. A.), J. Proc. Roy. Soc. New South Wales, 1953, 87, 27—30 (англ.)

Следуя Гёльдеру (Hölder O., Ber. Verhandl. Sächsisch. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-phys. Kl., 1901, 53, 1 — 64), автор дает систему независимых аксиом для положительных „величин" при $+, >$. Аксиомами являются закон трихотомии для порядка, ассоциативный закон для сложения, разрешимость уравнения $a + x = b$ тогда и только тогда, когда $a < b$, а также закон Архимеда.

G. Birkhoff

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 498.

2418. Обобщение классов транзитивности конечных проективных плоскостей. Дембовский (Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Dembowski Peter), Math. Z., 1958, 69, № 1, 59—89 (нем.)

Назовем I-множеством совокупность множества точек $\mathfrak{P}$ и множества прямых $\mathfrak{L}$, связанных соотношением инцидентности. Если каждая точка инцидентна с r прямыми, а каждая прямая — с k точками, то I-множество называется тактическим. Частным случаем тактического I-множества является (v, k, λ)-система (РЖМат, 1956, 4070). Тактическим разложением I-множества G называется такое разбиение на классы множеств $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{L}$, что при естественном определении инцидентности этих классов возникает тактическое I-множество $\Gamma(G)$. Частным случаем тактического разложения (v, k, λ)-системы (в частности, проективной плоскости) является разбиение ее на классы транзитивности относительно подгруппы группы коллинеаций. Устанавливается, однако, что разложениями такого рода не исчерпываются все тактические разложения. Доказывается, что число классов и число классов точек при тактическом разложении одно и то же. Этим обобщаются результаты Хьюза (РЖМат, 1959, 1920) и Паркера (РЖМат, 1959, 1919). Доказывается также, что если G является (v, k, λ)-системой, то при наличии в $\Gamma(G)$ хотя бы трех различных классов последняя может быть (v', k', λ')-системой лишь при $\lambda' = 1$. С тактическим разложением связываются целочисленные матрицы. Это позволяет применить теорию Хассе-Минковского об эквивалентности квадратичных форм над рациональным полем. Отметим некоторые из полученных этим способом результатов: 1. Если (v, k, λ)-система G обладает симметрическим тактическим разложением $\Gamma(G)$ (т. е. точки и прямые системы $\Gamma(G)$ можно перенумеровать так, что элементы с одинаковыми номерами инцидентны с одинаковым числом элементов другого рода) с четным числом классов, то v является квадратом; 2. Пусть (v, k, λ)-система G допускает тактическое разложение $\Gamma(G)$, содержащее t классов, причем каждый класс содержит $s = v/t$ элементов. Тогда, если t четное, то v является квадратом, если же t нечетное, то для нечетных простых множителей p и q, входящих в разложение свободных от квадратов частей λs и v, соответственно справедливо: $v \equiv 0 \pmod p$ или $(v|p) = 1$, $\lambda s \equiv 0 \pmod q$ или $(\lambda s|q) = (-1)^{(t-1)(q-1)/4}$ ($(a|b)$ — символ Лежандра; см., например, Арнольд И. В. Теория чисел, М., 1939, стр. 170).

Л. А. Скорняков

2419. Замечания о структурно упорядоченных группах и векторных структурах. 1. Функция Каратеодори. Гофман (Remarks on lattice ordered groups and vector lattices. 1. Carathéodory functions. Goffman Casper), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 1, 107—120 (англ.)

Для дистрибутивной структуры L с минимальным элементом 0 определяется понятие носителя, которое для случая структуры положительных элементов структурно упорядоченной группы совпадает с понятием нити в смысле Жаффара (РЖМат, 1955, 3635). Именно в структуре L автор вводит отношение эквивалентности, полагая $x \sim y$, если $x \cap z = 0$ тогда и только тогда, когда $y \cap z = 0$, $z \in L$; через L^* обозначается множество всех классов эквивалентных элементов и каждый класс называется носителем (нитью). Для носителей определяется отношение частичной упорядоченности, так же как для нитей. L^* становится дистрибутивной структурой с минимальным элементом.

Будем далее исходить от дистрибутивной структуры L с относительными дополнениями. Для каждого конечного множества попарно дизъюнктных элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из L и действительных отличных от нуля чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуем форму $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k$. Две формы $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k$ и $g = \sum_{k=1}^{m} b_k \beta_k$ считаются равными, если $\bigcup_{k=1}^{n} \alpha_k = \bigcup_{k=1}^{m} \beta_k$ и если $\alpha_i \cap \beta_j \neq 0$ влечет $a_i = b_j$. Для форм определяется сложение правилу

$$f+g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)(\alpha_i\cap\beta_j)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha_i-\cup_{j=1}^{m}\beta_j)+\sum_{j=1}^{m}b_j(\beta_j-\cup_{i=1}^{n}\alpha_i),$$

где суммы $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)$ $(\alpha_i\cap\beta_j)$ распространяются только на те члены, для которых $a_i+b_j\neq 0$. Форма f умножается на скаляр a по закону $af=\sum_{i=1}^{n}aa_i\alpha_i$. Если множество $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ является пустым, т. е. $n=0$, то в этом случае имеем нулевую форму. Форма $f=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$ называется положительной, если $a_i>0$ для $i=1,2,\ldots,n$. Множество E всех этих форм является относительно указанных правил архимедовой векторной структурой. Соответствующая ей структура E^* носителей совпадает с L.

Расширяя структуру E до условно полной структуры, получим структуру B. Тогда структура B^* носителей, соответствующая структуре B, будет расширением структуры L до условно полной структуры. Для $f=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\in E$ и $\alpha\in B^*$ определяется ограничение f через α как $f^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha_i\cap\alpha)$. Если же $f\in B$ и $\alpha\in B^*$, то пусть $A\subset E$ будет нижним сегментом дедекиндова сечения, определенного с помощью формы f и пусть A^{α} будет множество ограничений элементов из A через α, тогда ограничение f^{α} формы f через α определяется как наименьшая верхняя грань множества A^{α} в структуре B. Носитель $\alpha\in B^*$ можно представить так, что $\alpha=\cup_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\alpha_n\cap\alpha_m=0$ при $n\neq m$. Для каждого n пусть $f_n\in B$ имеет носителем α_n. Через f обозначим теперь формальную сумму $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$. Две формы $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ с носителем $\alpha=\cup_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $g=\sum_{m=1}^{\infty}g_m$ с носителем $\beta=\cup_{m=1}^{\infty}\beta_m$ рассматриваются как равные, если $\alpha=\beta$ и если $\alpha_i\cap\beta_j\neq 0$ влечет $f_i^{\alpha_i\cap\beta_j}=g_j^{\alpha_i\cap\beta_j}$. Для форм f и g определяется сумма:

$$f+g=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(f_i^{\alpha_i\cap\beta_j}+g_j^{\alpha_i\cap\beta_j})+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}f_i^{\alpha_i-\cup_{j=1}^{\infty}\beta_j}+\sum_{j=1}^{\infty}g^{\beta_j-\cup_{i=1}^{\infty}\alpha_i}.$$

Полагаем $f\geqslant g$, если $f_j^{\alpha_i\cap\beta_j}\geqslant g_j^{\alpha_i\cap\beta_j}$ для каждых i, j. Наконец, определяется умножение формы f на действительное число по правилу: $af=\sum_{n=1}^{\infty}af_n$. Полученное таким образом множество C форм f с операциями сложения и умножения на число и отношением частичного упорядочения является условно полной векторной структурой, названной автором векторной структурой всех функций Каратеодори, порожденной структурой L.

Совокупность положительных элементов G^+ структурно упорядоченной группы G является дистрибутивной структурой с нулевым элементом. Если G есть условно полная структурно упорядоченная группа, то структура $(G^+)^*$ носителей структуры G^+ будет также условно полной и дистрибутивной структурой с относительными дополнениями.

Основным результатом статьи является доказательство теоремы о том, что каждая условно полная структурно упорядоченная группа G изоморфна, как структурно упорядоченная группа, подгруппе аддитивной группы векторной структуры C функций Каратеодори, порожденной структурой $(G^+)^*$. Отсюда, в частности, следует, что каждая архимедова структурно упорядоченная группа представима в пространстве функций Каротеодори и что найдено еще одно доказательство теоремы о коммутативности архимедовой структурно упорядоченной группы.

Рассматриваются также некоторые вопросы нормирования архимедовых векторных структур и некоторые свойства структуры носителей нормированной векторной структуры, являющейся пространством Банаха.

А. А. Виноградов

2420. Погружение частично упорядоченных множеств в бесконечно дистрибутивные полные структуры. Фунаяма (Imbedding partly ordered sets into infinitely distributive complete lattices. Funayama Nenosuke), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 1, 54—62 (англ.)

Погружение (т. е. изоморфное отображение в) частично упорядоченного множества P в полную структуру L называется J-плотным, если всякий элемент из L является объединением некоторого множества образов элементов из P. Отображение φ множества всех подмножеств частично упорядоченного множества P в себя называется погружающим оператором на P, если а) $\varphi(A)\supseteq A$, б) из $A\supseteq B$ следует $\varphi(A)\supseteq\varphi(B)$, в) $\varphi(\varphi(A))=\varphi(A)$, г) $\varphi(\{a\})=(a]$, где $\{a\}$ — одноэлементное подмножество, а $(a]=\{x: x\in P,\ x\leqslant a\}$.

Совокупность P_{φ} всех таких подмножеств A из P, что $\varphi(A)=A$, является полной структурой, в которую множество P погружается J-плотно. Обратно, в какая полная структура, в которую множество P погружается J-плотно, вполне изоморфна P_{φ} для некоторого φ.

Приводится условие, накладываемое на погружающий оператор φ, необходимое и достаточное для бесконечной дистрибутивности P_{φ}. Это условие обобщает соответствующее условие Дилуорса и Мак-Лафлина (Dilworth R. P., McLaughlin J. E., Duke Math. J., 1952, 19, 683 — 693).

Слабо погружающим оператором на P называется отображение ω множества всех подмножеств частично упорядоченного множества P в себя, если: а) $\omega(A)\supseteq A$, б) из $A\supseteq B$ следует $\omega(A)\supseteq\omega(B)$ и в) $\omega(\{a\})=\omega((a])=(a]$.

Всякий слабо погружающий оператор ω индуцирует на P некоторый погружающий оператор $\bar{\omega}$.

Дано условие на оператор ω, необходимое и достаточное для бесконечной дистрибутивности $P_{\bar{\omega}}$.

Доказывается, что всякое частично упорядоченное множество P может быть погружено в бесконечно дистрибутивную полную структуру с сохранением всех дистрибутивных (и только дистрибутивных) объединений. (Под дистрибутивным объединением в частично упорядоченном множестве P понимается такой элемент $a=\cup a_{\lambda}$, что всякое $b\leqslant a$ имеет вид $b=\cup b_{\mu}$, где каждое $b_{\mu}\leqslant a_{\lambda}$ для некоторого λ. Когда P — структура, это понятие превращается в обычное понятие дистрибутивного элемента. Указанный результат применяется к случаям, когда P является а) произвольной структурой, б) бесконечно дистрибутивной, но не обязательно полной, структурой, в) непрерывной сверху (не обязательно полной) структурой. Имеются опечатки.

И. В. Стеллецкий

2421. Замечания о связях Галуа. Ауман (Bemerkung über Galois-Verbindungen. Aumann Georg), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1955. München, 1956, 281—284 (нем.)

$(P',*,Q',+)$ называется сужением связи Галуа $(P,*,Q,+)$ между частично упорядоченными множествами P и Q, если $Q'^{+}\subset P'\subset P$ и $P'^{*}\subset Q'\subset Q$. Доказывается, что всякая связь Галуа изоморфна сужению некоторой полярности в смысле Биркгофа. Приводится пример связи Галуа, не изоморфной никакой полярности, а также метод получения всех сужений произвольной связи Галуа.

И. В. Стеллецкий

2422. Несократимая нелинейная геометрия симплексов и булева геометрия гиперкуба. Андреоли (Geometrie riducibili non lineari di un simplesso e geometria booleana di un ipercubo. Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1955, 83, № 1, 13—40 (итал.)

Исследуются конечные булевы алгебры из геометрических объектов: элементов симплексов и гиперкуба. Рассматривается тернарная операция — медиана, а также интервалы в булевой алгебре, и затем все это иллюстрируется на группах симметрий. Ю. И. Соркин

2423. К теории косых структур. Иордан (Beiträge zur Theorie der Schrägverbände. Jordan Pascual. Abhandl. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1956, № 2, 16 S.) (нем.)

Продолжается изучение косых структур (РЖМат, 1954, 3263; 1955, 2140; 1956, 5137). Вводится f, F-конструкция для построения по заданной косой структуре $\mathfrak{W}$ новой косой структуры $\tilde{\mathfrak{W}}$. Эта конструкция является обобщением конструкции, введенной ранее (РЖМат, 1955, 2140) для случая, когда $\mathfrak{W}$ является структурой. В случае, когда $\mathfrak{W}$ — косая структура, в которой выполняются тождества

$$\begin{cases} (b \cap a) \cup (c \cap a) = (b \cup c) \cap a, \\ (a \cup b) \cap (a \cup c) = a \cup (b \cap c), \end{cases} \quad (1)$$

функции указанной конструкции можно определить, например, посредством $fa = a \cap \varepsilon$, $Fa = \varepsilon' \cup a$, где $\varepsilon, \varepsilon'$ — произвольные закрепленные элементы из $\mathfrak{W}$.

Затем указанная конструкция обобщается следующим образом. Пусть f и F — такие функции, отображающие косую структуру $\mathfrak{W}$ в себя, что

$$f(fa \cup b) = fa \cup fb, \quad (2)$$

$$fa \cup a = a, \quad (3)$$

$$F(a \cap Fb) = Fa \cap Fb, \quad (4)$$

$$a \cap Fa = a, \quad (5)$$

тогда совокупность элементов из $\mathfrak{W}$ образует новую косую структуру $\tilde{\tilde{\mathfrak{W}}}$ относительно операций $\wedge$ и $\vee$, определенных посредством $a \wedge b = a \cap Fb$, $b \vee a = fb \cup a$.

Находятся условия, которым должны удовлетворять функции f и F, чтобы из справедливости в косой структуре $\mathfrak{W}$ тождества $[(b \cap c) \cup a] \cap (b \cup c) = (b \cap c) \cup [a \cap (b \cup c)]$ (аксиома модулярности) следовала его справедливость в $\tilde{\mathfrak{W}}$ и $\tilde{\tilde{\mathfrak{W}}}$. Находятся также условия на функции f и F, необходимые и достаточные, чтобы из справедливости в косой структуре $\mathfrak{W}$ тождества $(b \cap a) \cup a = a \cap (a \cup b) = a$ вытекала его справедливость в $\tilde{\mathfrak{W}}$ и $\tilde{\tilde{\mathfrak{W}}}$.

Функции f, удовлетворяющие условиям (2) и (3), образуют косую полуструктуру (т. е. множество с одной бинарной ассоциативной и идемпотентной операцией) относительно операции последовательного применения функций $(f_1 f_2 a = (f_2 \wedge f_1) a)$. В этой косой полуструктуре функции, удовлетворяющие дополнительно условию $f(a \cup b) = fa \cup fb$, образуют косую подполуструктуру.

Косая структура, в которой дополнительно определена одна монарная операция $\bar{a}$, называется коссй структурой с дополнением (Schrägverband mit Zuordnung), если $\bar{\bar{a}} = a$ и $\overline{a \cap b} = \bar{b} \cup \bar{a}$.

Если в косой полуструктуре, в которой определена дополнительная монарная операция $\bar{a}$, удовлетворяющая условиям $\bar{\bar{a}} = a$ и $\bar{a} \cap \overline{a \cap c} = \bar{a}$, определить операцию $\cup$ посредством $a \cup c = c \cap \bar{\bar{a}}$, то получается косая структура с дополнением.

Если в косой структуре с дополнением для любой функции f, удовлетворяющей условиям (2) и (3), определить функцию F посредством $Fa = \overline{f\bar{a}}$, то в результате обобщенной f, F-конструкции получается косая структура с дополнением.

Далее рассматриваются различные обобщения на косые структуры аксиомы дистрибутивности обычных (коммутативных) структур.

Косые структуры, в которых выполняются тождества (1), называются наддистрибутивными. Ставится проблема выделения класса дистрибутивных косых структур, подчиненного следующим требованиям: 1) каждая коммутативная и дистрибутивная косая структура является дистрибутивной структурой, и наоборот; 2) каждая наддистрибутивная косая структура дистрибутивна; 3) каждая дистрибутивная косая структура модулярна; 4) композиция сцепления двух косых структур (РЖМат, 1956, 5137) не выводит из класса дистрибутивных косых структур; 5) аксиома дистрибутивности должна быть двойственна себе; 6) класс дистрибутивных косых структур не должен быть слишком мал.

Аксиома

$$\begin{cases} c \cap (b \cup a) = c \cap [b \cup (c \cap a)], \\ [(a \cup c) \cap b] \cup c = (a \cap b) \cup c \end{cases}$$

удовлетворяет всем требованиям, за исключением (3). При этом во всех косых структурах, которые получаются из дистрибутивных структур при помощи f, F-конструкции (в ее первоначальной форме), эта аксиома выполнена.

И. В. Стеллецкий

2424. О сдвигах полуструктур. Сас, Сендреи (Über die Translationen der Halbverbände. Szász G., Szendrei J.), Acta scient. math., 1957, 18, № 1-2, 44—47 (нем.)

Для того чтобы однозначное отображение λ полуструктуры H (РЖМат, 1957, 6868) в себя было сдвигом (РЖМат, 1957, 6176), необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: 1) $\lambda(x)\, y = \lambda(x) \cdot \lambda(y)$ для любых $x, y \in H$, 2) λ переместимо с любым внутренним сдвигом H (РЖМат, 1957, 6176). Рассмотрены некоторые другие свойства сдвигов полуструктур.

Примечание референта. Теорема 3 является частным случаем результатов Тамура (РЖМат, 1957, 6176; 1958, 7506). Л. М. Глускин

2425. О теореме Крулля — Шмидта с приложением к связкам. Атия (On the Krull—Schmidt theorem with application to sheaves. Atiyah M.), Bull. Soc. math. France, 1956, 84, № 3, 307—317 (англ.)

Перенесение теоремы Крулля — Шмидта об изоморфизмах прямых разложений операторных абелевых групп с обрывом возрастающих и убывающих цепей в теорию абстрактных точных категорий (РЖМат, 1959, 1302). Эта теорема освобождается таким путем не только от понятия элемента, что дает уже теория структур, но и от понятия подгруппы. На языке точных категорий формулируются понятия прямого разложения, неразложимости, изоморфизма двух разложений и т. д. Условия обрыва цепей заменяются более слабым условием обрыва всех бицепей. При этом бицепью называется последовательность $\{A_n, i_n, p_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, где A_n — элементы рассматриваемой точной категории, i_n — мономорфизм $A_n \to A_{n-1}$, p_n — эпиморфизм $A_{n-1} \to A_n$. Доказательство теоремы в основном следует обычной схеме.

Полученный результат применяется к теории алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем и к теории компактных комплексных многообразий, а именно к некоторым точным категориям связок, введенным Серром (РЖМат, 1957, 5147). А. Г. Курош

2426. О методе исключения в любых множествах с наиболее общими операциями. Дёрге, Шуфф (Über Elimination in beliebigen Mengen mit allgemeinsten

Operationen. Dörge Karl, Schuff Hans Konrad), Math. Nachr., 1953, **10**, № 5-6, 315—330 (нем.)

Обобщение результатов Дёрге (Math. Nachr., 1951, 4, 282 — 297) для случая абстрактных алгебр с мультинормированными операциями, не обязательно везде определенными. D. Zelinsky

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 498.

2427. Локальные исследования в алгебре AW. Оно, Сугаку, 1955, 6, № 4, 219—223 (японск.)

2428. О группе единиц и числе классов вещественного абелева поля алгебраических чисел. Леопольдт (Über Einheitengruppe und Klassenzahl Reeller abelscher Zahlkörper. Leopoldt H. W.), Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, KL. Math. und allgem. Naturwiss., 1953 (1954), № 2, 48 (нем.)

Рассматривается вещественное поле алгебраических чисел K с абелевой группой Галуа G над полем рациональных чисел. Выводится формула для числа классов идеалов h_k этого поля. Для этого автор сопоставляет каждому отделу $\bar{\chi}$ характеров группы G единицу $H_{\bar{\chi}}$ поля K. Эта единица выражается явным образом через корни степени $2f_{\bar{\chi}}$ из 1, где $f_{\bar{\chi}}$ — ведущий модуль характеров из $\bar{\chi}$, которые в силу теории полей классов являются характерами рациональных чисел. Единица $H_{\bar{\chi}}$ содержится в подполе $K_{\bar{\chi}}$ поля K, которое принадлежит общему ядру всех характеров из $\bar{\chi}$. Подгруппа, порожденная единицей $H_{\bar{\chi}}$ и всеми ее сопряжениями, обозначается через $\mathfrak{H}_{\bar{\chi}}$. Произведение $\mathfrak{H}^K = \Pi_{\bar{\chi}} \mathfrak{H}_{\bar{\chi}}$ является прямым в фактор-группе по подгруппе, состоящей из 1 и — 1. Доказывается, что индекс $\mathfrak{H}^K$ в группе E_K всех единиц поля K конечен. Основным результатом является формула

$$Q(G)\, h_K = (E_K : \mathfrak{H}^K).$$

Здесь $Q(G)$ есть целое число, определенное только группой G следующим образом. Пусть A — рациональное групповое кольцо группы G, I — его максимальный порядок (единственный ввиду коммутативности G) и Γ — целочисленное групповое кольцо. Тогда $Q(G) = (I : \Gamma)$. Автор, сверх того, показывает, что

$$Q(G) = g^{g/2-1} \Pi_{\bar{\chi}} d_{\bar{\chi}}^{\frac{1}{2}},$$

где g — порядок группы G, $d_{\bar{\chi}}$ — дискриминант поля деления круга на $g_{\bar{\chi}}$ частей и $g_{\bar{\chi}}$ — порядок характеров из $\bar{\chi}$.

В заключение автор доказывает следующую формулу разложения для числа классов:

$$h_K = \frac{Q(K)}{Q(G)} \Pi_{\bar{\chi}} h_{\bar{\chi}},$$

где $h_{\bar{\chi}}$ — целые числа, являющиеся нормами целых идеалов в полях деления круга на $g_{\bar{\chi}}$ частей, а инвариант $Q(K)$ есть индекс в E_K подгруппы E^K, определяемой ниже.

Целочисленный G-модуль $\mathfrak{m}$ называется полным, если в A-модуле $\mathfrak{m} \otimes Q$ (Q — поле рациональных чисел) образ $\mathfrak{m}$ инвариантен относительно I. Группа E_K естественно является G-модулем и E^K определяется как максимальный полный подмодуль E_K. Доказывается, что $Q(K) \mid Q(G)$.

Работа содержит также ряд фактов о строении группы E_K как G-модуля. И. Р. Шафаревич

2429 К. Теория полей классов. Шевалле (Class field theory. Chevalley C., Nagoya University, 1954, II + 104 pp.) (англ.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

2430. Матричный метод синтеза многотактных релейно-контактных схем связи и управления. Цетлин М. Л., Эйдус Г. С., Электросвязь, 1958, № 4, 41—48

Излагается матричный метод синтеза релейно-контактных схем, содержащих s электромагнитных реле $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, n органов управления (кнопок, переключающих контактов) $X_1, \ldots, X_n$ и p выходных шин $f_1, \ldots, f_p$.

Состояния схемы нумеруются по правилу, выражаемому формулой $k = \sum_{i=1}^{s} 2^{i-1} \beta_i$, где $\beta_i = 1$ соответствует реле Φ_i, находящемуся под током, а $\beta_i = 0$ — обесточенному состоянию того же реле. Условия перехода схемы из k-го состояния в l-е характеризуются булевой функцией

$$a_{k;l}(x_1, \ldots, x_n) = a_{\alpha_s, \ldots, \alpha_1; \beta_s, \ldots, \beta_1}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_i = 1$, если кнопка X_i нажата, и $x_i = 0$, если эта кнопка отпущена ($i = 1, 2, \ldots, n$). Совокупность всех таких функций записывается в виде матрицы $A = (a_{k;l})$, которую автор называет матрицей состояний схемы. Матрицы A, удовлетворяющие требованиям:

1) $\mathrm{V}_l a_{k;l} = \mathrm{V}_{\beta_s, \ldots, \beta_1} a_{\alpha_s, \ldots, \alpha_1; \beta_s, \ldots, \beta_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1$,

где V — знак логической (булевой) суммы, и

2) $a_{k;l_1} a_{k;l_2} = 0$, если $l_1 \neq l_2$,

— называются простыми. Утверждается, что матрицы любых релейно-контактных схем являются простыми. Элементы матрицы состояний определяются из функций $\Phi_i(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_s)$, характеризующих условия включения реле Φ_i, посредством формулы

$$a_{\alpha_s, \ldots, \alpha_1; \beta_s, \ldots, \beta_1}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{s} [\Phi_i(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)]^{\beta_i},$$

где $[\Phi_i]^1 = \Phi_i$, $[\Phi_i]^0 = \bar{\Phi}_i$ — отрицание (инверсия) Φ_i. Состояния выходных шин схемы характеризуются булевыми функциями

$$f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_s).$$

Анализом релейно-контактной схемы называется составление матрицы состояний схемы по ее чертежу. Приведены два примера анализа релейно-контактных схем. Задача синтеза релейно-контактной схемы сводится к составлению матрицы состояний, по которой определяются функции включения реле с помощью формулы

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_s) = \mathrm{V}_{\alpha_s, \ldots, \alpha_1; \beta_s, \ldots, \beta_1} a_{\alpha_s, \ldots, \alpha_1; \beta_s, \ldots, \beta_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot [\varphi_1]^{\alpha_1} \ldots [\varphi_s]^{\alpha_s}.$$

Рассмотрены два примера синтеза релейно-контактных схем. В. И. Шестаков

2431. Составление многотактной схемы электропривода, работающего по автоматическому циклу. Разыграев А. М., Электричество, 1956, № 11, 15—20

Рассматриваются некоторые виды циклов работы автоматизированного электропривода. Даются рекомендации по выбору аппаратов релейного действия, задающих программу цикла. Излагается общая методика составления релейной схемы, обеспечивающей цикл; переход от циклограммы к схеме производится без составления таблицы включения. Описан порядок введения приемных и промежуточных элементов. Для выявления условий включения и отключения вводимого промежуточного элемента предлагается делить период цикла на зоны: необходимого включения, запретную, возможного включения, отключения. Ю. Л. Томфельд

2432. **Об одном семействе классов функций алгебры логики и их реализации в классе П-схем. Фиников Б. И.**, Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 2, 247—248

Через $L_k(n)$ обозначается минимальное число такое, что любую функцию алгебры логики, принимающую значение 1 в точности k раз, можно реализовать контактной П-схемой, насчитывающей $\leqslant L_k(n)$ контактов.

Теорема. $L_k(n) \leqslant 2n$.

Следствие. Если для последовательности $\{k_n\}$ имеет место 1) $k_n \leqslant \lg_2 n - \lg_2 \lg_2 n - \varphi(n)$, где $\varphi(n) \to \infty$, или 2) $\overline{\lim} \frac{k_n}{\lg_2 n} < N$, или 3) $\frac{k_n}{\lg_2 n} \to \infty$, то соответственно: 1) $L_k(n) \sim 2n$; 2) $L_{k_n}(n) < 2Nn$; 3) $L_k(n) \leqslant \leqslant \frac{2k_n \cdot n}{\lg_2 n}(1 + O(1))$.

Доказательство теоремы приводится. Б. Н. Трахтенброт

2433. **Обнаружение и опознание симметрических переключательных функций с помощью таблиц комбинаций. Маркус** (The detection and identification of symmetric switching functions with the use of tables of combinations. Marcus M. P.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, **5**, № 4, 237—239 (англ.)

2434. **Метод построения безопорных переключающих схем. Шебештьен** (A design technique for pedestal-free switching circuits. Sebestyen George), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 3, 162—166 (англ.)

Булева алгебра в ее идеальной форме не применима к электронным переключателям, так как она не в состоянии обеспечить ту же точность, какую она дает при применении к электромеханическим устройствам. Электронный переключатель должен не только передавать состояние „включено" — „выключен", но и в состоянии „включено" должен обеспечить передачу потока определенной информации, при наличии которой появляется переключающий сигнал. Для электронных переключателей вводятся два оператора: ( ) Ψ^+ и ( ) Ψ^-, которые символически представляют соответственно слова „наиболее положительный сигнал" (или „наибольший сигнал") и „наиболее отрицательный" (или „наименьший сигнал"). Эти операторы выбирают соответственно наибольший и наименьший сигналы из ряда сигналов, фигурирующих в виде аргументов этих операторов. Обычно прямоугольные сигналы фигурируют в качестве переключающих или клапанирующих сигналов, а синусоидальные сигналы — в качестве переключаемых сигналов, несущих информацию. При этом пиковая величина амплитуды информационного сигнала должна быть всегда меньше, чем клапанирующий сигнал.

Оператор ( ) Ψ^+ соответствует логическому ИЛИ, т. е. булеву сложению, и оператор ( ) Ψ^- соответствует логическому И, т. е. булеву произведению, ибо

$$(A + B + C \ldots) = (A, B, C \ldots)\Psi^+,$$
$$(A \times B \times C \ldots) = (A, B, C \ldots)\Psi^-.$$

Эти два уравнения действительны не только для значений аргумента 0 или 1, но и для высоких положительных или высоких отрицательных величин. На основе предложенной теории производится анализ схемы электронного переключателя. Г. К. Новик

2435. **Схемы совпадения и триггеры. Чандлер** (Gates and trigger circuits. Chandler W. W.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 181—184. Discuss., 184—186 (англ.)

Кратко рассматриваются общие вопросы построения схем совпадения и триггеров. Приводится вывод булевых уравнений для одноразрядного двоичного сумматора на три входа с целью построения такого сумматора на схемах И и ИЛИ. Приводится схема триггера на электронных лампах, примененная в машине МОЗАИК. При обсуждении вопросов, затронутых в статье, рассматриваются схема триггера, требующая меньше оборудования, и некоторые схемы совпадения. А. Н. Чуйкин

2436. **Основные магнитные логические схемы вычислительных машин. Ганцхорн** (Magnetische logische Grundschaltungen in Rechenanlagen. Ganzhorn K.), Elektron. Rundschau, 1957, **11**, № 8, 229—234 (нем.; рез. англ., франц.)

Дается описание принципа действия и приводятся принципиальные схемы логических элементов на магнитных сердечниках: схема совпадений (схема И) на 2 входа $(x \cdot y)$, схема И на несколько входов $(x \cdot y \cdot z)$, схема ИЛИ на несколько входов $(x+y+z+\ldots)$, схема инвертора кода $(\bar{x})$, схема „не-И" $(\overline{x \cdot y})$, схема „не-ИЛИ" $(\overline{x+y+z})$.

Указанные логические элементы даются в трех схемных вариантах: 1) в варианте, где логические функции элемента осуществляются при записи в магнитный сердечник и, таким образом, в сердечнике записывается уже результат логической операции; 2) в варианте, при котором информация, подлежащая логической обработке, записывается в сердечниках, а логические операции осуществляются при считывании информации; 3) в схемном варианте, при котором логические операции над информацией производятся без временного сохранения ее в памяти.

Обсуждаются особенности действия логических элементов на магнитных сердечниках и требования, предъявляемые некоторыми из них к временным и амплитудным соотношениям сигналов. На нескольких примерах показывается осуществление более сложных логических схем из описанных элементов, например: запись при совпадении двух сигналов и отсутствии запрещающего сигнала $w = x_s y_c \bar{h}$; осуществление схемы совпадений путем использования схемы двойного отрицания $x \cdot y \cdot z = \overline{\overline{(x+y+z)}} = \overline{\overline{(x \cdot y \cdot z)}}$; схемы полусумматора и сумматора на магнитных сердечниках. Излагаются некоторые соображения по проектированию логических схем на магнитных элементах.

При изложении автор пользуется элементами алгебры логики (булевой алгебры). Г. Г. Рабинович

2437. **Одно приложение алгебраической топологии к численному анализу: доказательство существования решения проблемы электрических цепей. Рот** (An application of algebraic topology to numerical analysis: on the existence of a solution to the network problem. Roth J. P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 7, 518—521 (англ.)

Доказывается существование и единственность стационарного режима работы электрической цепи с положительно определенным рассеянием мощности.

Рассматривается одномерный комплекс K (электрическая цепь), цепи на нем с группой комплексных чисел в качестве группы коэффициентов (коэффициент на ребре — это ток, идущий по нему; коэффициент в точке — это ток, входящий в нее) и коцепи с той же группой коэффициентов (разности потенциалов и потенциалы — соот-

ветственно на ребрах и в вершинах). Связь токов и напряжений на отрезках задается некоторой комплексной матрицей L (рассмотрение комплексных токов, напряжений и сопротивлений эквивалентно введению в сеть индуктивностей и емкостей).

Задача ставится следующим образом. В некоторой электрической цепи с матрицей L на некоторых отрезках заданы разности потенциалов (т. е. задан элемент $e' \in H_1(K)$; так же заданы токи, выходящие из вершин, причем их сумма равна нулю (ограничивающий нульмерный цикл I' на K). Спрашивается, существует ли стационарный режим с заданными так токами и напряжениями (т. е. существует ли цепь J и коцепь V, удовлетворяющие условиям: 1) $V = LJ$; 2) класс когомологий коцепи V есть e'; 3) $\partial J = I'$).

Оказывается, в случае, когда $L + \overline{L_t}$ — положительно определенная матрица, решение задачи существует и единственно (здесь L_t — транспонированная сопряженная матрица к матрице L). Дана история вопроса и библ.

С. С. Рышков

2438. Геометрия схем. Техника получения схем, изоморфных геометрическим фигурам. I. Линейная геометрия. Гонсалес-дель-Валье (Geometría de redes: técnica de la obtención de redes isomorfas con figuras geométricas. 1. Geometría lineal. Gonzalez del Valle A.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1957, 6, № 17, 1—16 (исп., англ.)

Обзор основных понятий и свойств геометрии схем. Предлагается метод, позволяющий строить схемы, изоморфные фигурам, образованным из линейно расположенных точек. Отмечаются некоторые свойства и теоремы, а также возможность применения этой методики при автоматизации вычислений. Резюме автора

2439. Замечания о применении матричного исчисления для исследования электрических сетей. Преда (Considerații asupra aplicării calculului matricial în studiul rețelelor electrice. Preda M.), Electrotehnica, 1957, 5, № 5, 134—138 (рум.; рез. русск., нем., франц., англ.)

На основе законов Кирхгофа выводятся матричные уравнения Крона.

См. также: 2232, 2234, 2235, 2512, 2606, 2863, 2876, 2893, 3113, 3140, 3143, 3244, 3246—3248, 3252

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

2440. О некоторых проблемах наглядной топологии. Борсук (Über einige Probleme der anschaulichen Topologie. Borsuk Karol), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, 60, № 3, 101—114 (нем.)

Автор приводит ряд проблем, относящихся главным образом к созданной им теории ретрактов, а также к теории топологических произведений и непрерывных отображений на сферы. П. С. Александров

2441. Доказательство последней теоремы Пуанкаре. Скорца-Драгони (Una dimostrazione dell' ultimo teorema geometrico di Poincaré. Scorza Dragoni Giuseppe), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 1—104 (итал.)

Автор дает весьма сложное доказательство теоремы, сравнительно просто и изящно доказанной Биркгофом (Birkhoff, Acta math., 1926, 47, 297—311). Ссылок на работы Биркгофа не имеется. В. В. Немыцкий

2442. О 7-м симпозиуме по топологии (5—7 сентября 1957 г., г. Мацуяма, Япония). Тода Хироси, Накаока Минору, Сугаку, 1957, 9, № 2, 115—116 (японск.)

Отчет о 7-м симпозиуме в Японии по топологии, происходившем 5—7 сентября 1957 г. в городе Мацуяма. Приводится список и краткое содержание докладов, сделанных на симпозиуме. В. К. Белов

2443. Группы сопроводительных узлов. Кондо (On knotgroups of parallelknots. Kondo Koiti), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, 9, № 2, 67—68 (англ.)

Фундаментальную группу дополнительного пространства сопроводительного узла можно получить из фундаментальной группы дополнительного пространства основного узла прибавлением одной образующей и одного соотношения специального, указанного в работе вида.

В. К. Белов

2444. Новые результаты, относящиеся к проблеме четырех красок. Яглом И. М., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 265—266

Излагаются результаты Рингеля (J. reine und angew. Math., 1952, 190, 129—147; РЖМат, 1956, 273) о числе красок, необходимом для правильной раскраски замкнутой поверхности, отличной от сферы. А. С. Шварц

2445. О W-базах и ориентированных графах. Фидлер, Седлачек (O W-basích orientovaných grafů. Fiedler Miroslav, Sedláček Jiří), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 2, 214—225 (чешск.; рез. русск., нем.)

Связанный ориентированный граф с одним-единственным источником (вершина, которая не является концевой ни для какого ребра графа G) назовем W-графом. W-база — подграф графа G, каждая составляющая которого является W-деревом и который содержит все вершины графа G. Рассматриваются W-базы в ациклических и хорошо ориентированных графах. Приводим наиболее важные результаты: 1. Если для каждой вершины w конечного ориентированного графа G существует W-база графа с одним-единственным источником w, то G является хорошо ориентированным графом. 2. Граф G хорошо ориентирован тогда и только тогда, если для каждого непустого подмножества P множества вершин графа существует W-база графа G, источниками которой являются все вершины P. Пусть $1,2,\cdots,n$ — вершины графа. К каждому ребру $\overrightarrow{ik}$ поставим в соответствие действительное число u_{ik} и определим матрицу (a, k) следующим образом: если $i \neq k$, то положим $a_{ik} = -u_{ik}$ тогда и только тогда, если существует ребро $\overrightarrow{ik}$ и $a_{ik} = 0$ в противном случае; и положим $a_{kk} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} u_{ik}$. Даются элементарные приложения различных характеристик так определенной матрицы к характеристикам графа. Р. Е. Кричевский

2446. О понятии топологического пространства. II, III. Часар (A topologikus tér fogalmáról. II, III. Csász ár Ákos), Mat lapok, 1957, 8, № 3-4, 211—231; 1958, 9, № 1-2, 37—63 (венг.; рез. русск., франц.)

Две части (I часть см. РЖМат, 1958, 1906) популярной статьи. Благодаря одновременному рассмотрению топологических близостных, равномерных и псевдометрических структур удается получить соотношения между ними проще обычного. Из резюме автора

2447. Некоторые конечномерные аффинные топологические пространства. Кли (Some finite-dimensional affine topological spaces. Klee V. L., Jr), Portugal. Math., 1955, 14, 27—30 (англ.)

Описаны две топологии m-мерном действительном евклидовом пространстве E^m ($m \geqslant 2$), в каждой из которых E^m является аффинным топологическим пространством в

смысле Фреше (Fréchet M., Les espaces abstraits, Gauthier-Villars, Paris, 1928), но не является линейным топологическим пространством. Одна из этих топологий была рассмотрена автором ранее (Duke Math. J., 1951, 18, 443 — 466). Рассматриваются различные топологические свойства этих пространств. Вот один из типичных результатов: в одной из топологий пространство E^n не являясь регулярным, в другой оно вполне регулярно, но не нормально. J. H. Williamson

2448. О сходимости сетей множеств. Мрувка (On the convergence of nets of sets. Mrówka S.), Fundam. math., 1958, 45, № 3, 237—246 (англ.)

Неупотребительный на русском языке термин „сеть множеств" мы в данном реферате заменяем „направленное семейство множеств". Сходимость направленного семейства множеств $\{M_\alpha\}$, $\alpha\in\Theta$ определяется так. Говорим, что точка X принадлежит верхнему топологическому пределу $\overline{lt}_{\alpha\in\Theta} M_\alpha$ (нижнему топологическому пределу $\underline{lt}_{\alpha\in\Theta} M_\alpha$) семейства $\{M_\alpha\}$, если для любой окрестности Ox точки X найдется такое $\alpha_0\in\Theta$, что для некоторых $\alpha>\alpha_0$ (соответственно для всех $\alpha>\alpha_0$), $\alpha\in\Theta$ множества $Ox\cap M_\alpha$ непусты. И верхний и нижний топологический пределы замкнуты; если они совпадают, то семейство $\{M_\alpha\}$ называется сходящимся, а множество $\Phi=\overline{lt}_{\alpha\in\Theta} M_\alpha=\underline{lt}_{\alpha\in\Theta} M_\alpha$ называется топологическим пределом семейства $\{M_\alpha\}$. Доказываются следующие теоремы: 1. Обобщенная теорема Урысона—Хаусдорфа: Направленное семейство замкнутых множеств $\{\Phi_\alpha\}$ в бикомпакте X сходится к множеству Φ_0 в X тогда и только тогда, когда в обычном пространстве ψ^X замкнутых множеств пространства X точки Φ_α сходятся к точке Φ_0. 2. Это утверждение перестает быть верным, если X локально бикомпактно, но не бикомпактно; оно вновь становится верным, если в пространстве замкнутых множеств ψ^X изменить топологию следующим образом: чтобы определить элемент открытого базиса пространства $\psi' X$ в X задается конечное число открытых множеств $U_1,\cdots,U_p$; $V_1,\cdots,Vq$ с бикомпактными замыканиями, тогда соответствующий элемент открытого базиса $\psi' X$ есть

$E(\Phi,\Phi\cap U_i\neq\Lambda,\ \Phi\cap[V_j]=\Lambda,)\ i=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,q.$

В случае, если X бикомпактно, то только что определенная топология совпадает с классической топологией в ψX. 3. Если X не локально бикомпактно, то утверждение 1 теряет силу, как бы мы ни определяли топологию в пространстве замкнутых множеств. П. С. Александров

2449. Продолжение функций с плотных подпространств. Мак-Дауэлл (Extension of functions from dense subspaces. McDowell Robert H.), Duke Math. J., 1958, 25, № 2, 297—304 (англ.)

Обозначения: X и Y — топологические пространства, φ — непрерывное отображение пространства X в Y; E есть расширение пространства X (т. е. пространство, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства). Для каждой точки $y\in Y$ определяется

$$E_y=\cap[\varphi^{-1}V]_E\subseteq E,$$

где V пробегает множество всех окрестностей точки y в Y и квадратные скобки обозначают замыкание. Далее: $E_Y=\bigcup_{y\in Y} E_y\supseteq E$; для каждого $e\in E$ полагаем

$$Y^e=\cap[\varphi(X\cap U)]_Y\subseteq Y,$$

где U пробегает множество всех окрестностей точки e в E.

Доказываются автоматически предложения:

1. Утверждения $e\in E_y$ и $y\in Y^e$ эквивалентны.

2. При данных X, Y, E, φ пространство E_Y содержит всякое подпространство X', $X\subseteq X'\subseteq E$, для которого существует непрерывное продолжение φ' отображения φ. При этом отображение φ' полностью определяется (при хаусдорфовом Y) равенством $\varphi'^{-1}y=X'\cap E_y$.

3. Если X' и Y хаусдорфовы и φ—топологическое отображение пространства X в Y, то продолженное на X' отображение φ переводит нарост $X'\setminus X$ в нарост $Y\setminus\varphi X$.

4. Если Y бикомпактно, то $E_Y=E$.

Из этих замечаний легко выводится теорема Чеха-Стона о том, что всякое бикомпактное расширение в X вполне регулярного пространства X, в котором любые два функционально отделимые замкнутые в X множества имеют (в X) дизъюнктные замыкания, есть максимальное расширение βX и что всякое непрерывное отображение пространства X в бикомпакт Y непрерывно продолжается в отображение βX в Y.

Весьма существенны теоремы:

5. При вполне регулярных X и E расширение E тогда и только тогда содержится в βX, когда функционально отделимые замкнутые в X множества имеют в E непересекающиеся замыкания. В этом случае всякое φ может быть продолжено до непрерывного отображения φ' пространства E в Y по правилу $\varphi'^{-1}y=E_y$. Через τ автор обозначает непрерывное отображение βX на βE, являющееся продолжением тождественного отображения X в E.

6. Пусть X, Y, E вполне регулярны и $e\in E$; отображение φ тогда и только тогда может быть продолжено в непрерывное отображение φ_e пространства $X\cup e\subseteq E$ в Y, если существует такое $y\in Y$, что $\tau^{-1}e\subseteq(\beta X)_y$. В этом случае $\varphi_e(e)=y$.

Это условие эквивалентно совокупности двух следующих:

1) $e\in E_y$ E_y лишь для единственного $y\in Y$,

2) $\tau^{-1}e\subseteq(\beta X)_y$.

Отсюда следует:

7. Отображение φ может быть продолжено на все E_Y тогда и только тогда, когда различным точкам $y_1\in Y$, $y_2\in Y$ соответствуют непересекающиеся E_{y_1} и E_{y_2} и $\tau^{-1}E_Y\subseteq(\beta X)_Y$. Если Y — бикомпакт, то φ может быть продолжено на множество тех и только тех точек $e\in E$, которые принадлежат лишь одному E_y.

Теорема 8. Пространства X, Y, E вполне регулярны. Положим

$$E'_y=\cap J[\varphi^{-1}V]_E,\qquad E'_Y=\bigcap_{J\subseteq Y} E'_y,$$

где J означает открытое ядро в пространстве E.

Отображение φ продолжаемо в непрерывное отображение φ' пространства E'_Y в Y по правилу $\varphi'^{-1}y=E'_y$.

При этом E'_Y есть наибольшее подпространство пространства E, на которое φ может быть непрерывно продолжено. П. С. Александров

2450. Ограниченность полунепрерывных действительных функций. Касахара (Boundedness of semicontinuous finite real functions. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 4, 183—186 (англ.)

Для топологического T_1 пространства E дается характеристика его компактности через ограниченные (сверху, снизу) полунепрерывные (соответственно, снизу, сверху) функции. Далее рассматриваются замкнутые покрытия (покрытия замкнутыми множествами) и даются характеристики теми же функциями его свойства: из каждого счетного замкнутого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Доказывается, что хаусдорфово пространство и G_δ-пространство, обладающее этим свойством, состоит из конечного множества точек. Автор ставит вопрос о существовании топологического пространства с бесконечным числом точек, обладающего этим свойством. И. В. Проскуряков

2451. Пространство с отрицательной аксиомой и a-абсолютно замкнутое пространство. Хан Хён Гон, Хакпо, 1956, № 2, 53—63 (кор.)

Пользуясь приемом Ю. М. Смирнова (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1950, 14, 64—79), автор 1) находит в пространстве T некоторые условия, эквивалентные отрицательной аксиоме мощности, меньшей a, 2) устанавливает связь понятий абсолютной замкнутости и a-абсолютной замкнутости. Выясняются соотношения между пространством T с отрицательной аксиомой мощности и a-абсолютно замкнутыми пространствами. Лю Чун Хо

2452. AU-свойство и компактность. Исеки (On AU-property and countably compactness. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 7, 357 (англ.)

Указывается на примеры некомпактных пространств, обладающих AU-свойством (РЖМат, 1958, 5595) по отношению к некоторым системам покрытий. Ю. М. Смирнов

2453. Пример не нормального вполне регулярного пространства. (An example of a non-normal completely regular space. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 3, 161—163, XIII (англ.; рез. русск.)

Взяв в известном пространстве Немыцкого в верхней полуплоскости лишь точки с рациональными координатами, автор получает тоже не нормальное, вполне регулярное пространство, которое обладает помимо этого следующими свойствами: оно псевдокомпактно, непаракомпактно, хотя и является суммой двух паракомпактных пространств. В. И. Пономарев

2454. Замечание, касающееся вполне регулярных G_δ-пространств. Хейдер (A note concerning completely regular G_δ-spaces. Heider L. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1060—1066 (англ.)

Неизолированная G_δ-точка p вполне регулярного пространства X (т. е. точка, являющаяся пересечением счетного числа открытых множеств) обладает тем свойством, что среди функций, непрерывных на множестве $X \setminus p$, имеются такие, которые не могут быть непрерывно продолжены на все X. Точки, обладающие этим последним свойством, могут и не быть G_δ-точками; они называются обобщенными G_δ-точками.

Вполне регулярное пространство, все точки которого суть обобщенные G_δ-точки, называется обобщенным G_δ-пространством.

Основным результатом работы является:

Теорема 2. Пусть X и Y суть обобщенные G_δ-пространства, для которых кольца непрерывных функций $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны в любом смысле (как кольца, структуры или мультипликативные полугруппы). Тогда пространства X и Y гомеоморфны.

Пусть vX есть хьюиттовское расширение пространства X. Всякое плотное в vX подпространство пространства vX называется хорошо вложенным в это пространство, если всякая непрерывная на нем функция может быть непрерывно продолжена на все vX. Доказательство основной теоремы 2 опирается на следующее предложение:

Теорема 1. Обобщенные G_δ-точки пространства vX и только они принадлежат всякому хорошо вложенному в пространство vX подпространству этого пространства. G_δ-точки пространства vX и только они являются G_δ-точками всякого хорошо вложенного подпространства пространства vX; такое же утверждение имеет место и для обобщенных G_δ-точек. П. С. Александров

2455. Вложение метрических комплексов. Даукер (Imbedding of metric complexes. Dowker C. H.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 239—242 (англ.)

Из работ автора (Arkiv mat., 1952, 2, 307—313; Amer. J. Math., 1952, 74, 555—577) и Ханнера (Arkiv mat., 1952, 2, 315—360) известно, что для метрического пространства всякий метрический комплекс является ANR (абсолютный окрестностный ретракт) и что для нормальных пространств метрический комплекс является ANR тогда и только тогда, когда он является абсолютным G_δ. Автор доказывает, что метрический комплекс является абсолютным F_σ и абсолютным G_δ тогда и только тогда, когда выполнено условие обрыва возрастающих цепей клеток. И. А. Шведов

2456. Пространства Моора и равномерные пространства. Джонс (Moore spaces and uniform spaces. Jones F. Burton), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 483—486 (англ.)

Автор сравнивает аксиоматику равномерных пространств в терминах покрытий с аналогичной аксиоматикой так называемых пространств Моора (Мура), понимая под последними регулярные пространства, в которых имеется счетная последовательность открытых покрытий, удовлетворяющих следующему требованию: для любой точки p и ее окрестности Op найдется такое покрытие из данной последовательности, что звезда точки p относительно этого покрытия содержится в Op.

В работе строится пример не вполне регулярного пространства Моора. П. С. Александров

2457. О бикомпактных расширениях топологических пространств. Александров П., Пономарев Вл., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 4, 575—578

Для построения бикомпактных расширений топологического пространства авторы применяют метод, основанный на понятии подчинения или усиленного включения $A<B$ одного множества в другое, впервые примененный первым из авторов (Матем. сб., 1939, 5 (47), 403). Авторы дают аксиоматику понятия подчинения, фактически эквивалентную аксиоматике пространств близости, и получают таким образом в новой формулировке теорему Ю. М. Смирнова (Матем. сб., 1952, 31, 543), дающую построение всех бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства.

Рассматривается вопрос о возможном таком сокращении запаса множеств F, H, чтобы подчинение $F'<H'$, определенное для множеств этого запаса продолжалось на все X: $F<H$, если $F \subset F' < H' \subset H$. Таким запасом оказывается совокупность канонических открытых и замкнутых множеств в X. Если $\mathfrak{B}$ — полная база пространства X (т. е. из $H \in \mathfrak{B}$ следует $X/[H] \in \mathfrak{B}$ и из $H_1, H_2 \in \mathfrak{B}$ следует $H_1 \cup H_2 \in \mathfrak{B}$) и если на множествах базы и их замыканиях можно ввести подчинение, то оно продолжается на все пространство. Если полная база $\mathfrak{B}$ является большой базой (т. е. для любого замкнутого множества F и его окрестности OF найдется $H \in \mathfrak{B}, F \subseteq H \subseteq [H] \subset OF$), то любое подчинение в X есть продолжение некоторого подчинения, определенного в $\mathfrak{B}$.

Множество N нульмерно лежит в бикомпакте B, если существует такая база $\mathfrak{B}=\{\Gamma\}$ бикомпакта B, что $N \cap \text{гр}\,\Gamma = \Lambda$ для всех $\Gamma \in \mathfrak{B}$. Введение этого понятия позволяет авторам доказать следующую теорему, исправляющую результат Фрёйденталя (реф. 2458): Для того чтобы пространство X имело бикомпактное расширение с нульмерно лежащим в нем наростом, необходимо и достаточно, чтобы X было периферически-бикомпактным. Тогда каждое такое бикомпактное расширение можно получить посредством продолжения на все X элементарного подчинения, определенного в некоторой полной периферически-бикомпактной базе пространства X.

Множество N называется сильно нульмерно лежащим в бикомпакте B, если в B существует такая база $\mathfrak{B}^*=\{\Gamma\}$, что $N \cap \text{гр}\,\Gamma = \Lambda$ для всех $\Gamma \in \mathfrak{B}^*$ и система $\{N \cap \Gamma\}$ есть большая база в N. Оказывается, что если N сильно нульмерно лежит в каком-нибудь бикомпакте, то $\text{Ind}\, N = 0$. Доказывается усиленное обращение этого утверждения.

Если $\text{Ind}\, X = 0$, то X сильно нульмерно лежит во всяком своем бикомпактном расширении. Е. Г. Скляренко

2458. Пример вполне регулярного пространства с нульмерным чеховским наростом, не обладающего свойством семибикомпактности. Смирнов Ю., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1204—1206

Во исправление утверждения Фрёйденталя (Ind. Math. Amst., 1951, **13**, 2, 184) автор строит пример, указанный в заглавии. Размерность понимается в смысле малой индуктивной, т. е. ind. При выводе необходимости Фрёйденталь воспользовался утверждением: нульмерное пространство остается нульмерным после добавления одной точки. Автор показывает справедливость этого утверждения для регулярных пространств со счетной базой (даже независимо от выполнения аксиомы счетности в прибавляемой точке) и строит пример одномерного нормального пространства P, которое после выбрасывания некоторой точки A становится нульмерным. Автор строит затем пример несемибикомпактного пространства W, чеховский нарост для которого гомеоморфен $P \setminus A$. Е. Г. Скляренко

2459. Бикомпактные расширения семибикомпактных пространств. Скляренко Е., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1200

Автор улучшает теорию Фрёйденталя о построении бикомпактных расширений $\widetilde{R}$ вполне регулярных пространств R с нульмерным наростом $\widetilde{R} \setminus R$.

Для каждого семибикомпактного (реф. 2458) пространства R и для любой его базы n, замкнутой относительно операций конечного сложения и операции дополнения к замыканию, определяется близость R_n в пространстве R, задающая бикомпактное расширение $\widetilde{R} = uR_n$ (Матем. сб., 1952, **31**, № 3, гл. 2) с нульмерным наростом. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми бикомпактными расширениями $\widetilde{R}$ с $\operatorname{ind}(\widetilde{R} \setminus R) = 0$ семибикомпактного пространства R и всеми, в некотором смысле, максимальными его базами.

Доказывается, что неверная в общем случае вполне регулярных пространств теорема Фрёйденталя (реф. 2458) верна для пространств, обладающих следующим свойством: σ) Каждый бикомпакт $\Phi \subseteq R$ имеет в R счетный характер, т. е. существует такая счетная система окрестностей $U_i\Phi$, что в любой окрестности $O\Phi$ содержится хотя бы одна из окрестностей $U_i\Phi$. Причем результат получается более сильным, так как в этом случае нарост $\widetilde{R} \setminus R$ финально-компактен и поэтому утверждение $\operatorname{ind} = 0$ можно заменить утверждением $\dim = 0$.

Примечание референта. Условие σ) можно заменить более слабым условием: *s*) Каждый бикомпакт $\Phi \subseteq R$ содержится в бикомпакте $\Phi' \subseteq R$, счетного характера в R. Ю. М. Смирнов

2460. Определяющие свойства александровского расширения топологического пространства. Бауэр (Kennzeichnende Eigenschaften der Alexandroffschen Erweiterung αE eines topologischen Raumes. Bauer Heinz), Дельтион тис матиматикис этериас, Bull. Soc. math. Grèce, 1956, **30**, № 1-3, 47—53 (нем.; рез. греч.)

Центрированная система $\sigma = \{H\}$ открытых множеств (регулярного) пространства E называется регулярной системой, если для любого $H_1 \in \sigma$ существует $H_2 \in \sigma$ такое, что $[H_2] \subseteq H_1$. Центрированная регулярная система $\{H\}$, максимальная по отношению к этим двум свойствам, называется регулярным концом $\xi = \{H\}$. П. С. Александров определяет свое расширение αE как множество регулярных концов $\xi = \{H\}$ с открытым базисом из множеств вида $O_{H_0} = E(\xi, H_0 \in \xi)$. Пространство αE есть хаусдорфово расширение пространства E; в нем множества вида $[F]_{\alpha E}$, где F пробегает все замкнутые множества из E, образуют замкнутый базис. Кроме того, для каждой окрестности $O\xi$ любой точки $\xi \in \alpha E$ существует окрестность $O'\xi$ этой же точки такая, что $[O'\xi] \cap E \subseteq O\xi$; к каждой регулярной центрированной системе $\sigma = \{H\}$ существует точка $\xi \in \alpha E$ такая, что для любого $H \in \sigma$ имеется окрестность $O\xi$ этой точки, для которой $H = O\xi \cap E$. В работе доказано, что совокупностью этих свойств пространство αE полностью определяется. В. И. Пономарев

2461. Одноточечные расширения топологических пространств. Хаяси (One point expansion of topological spaces. Hayashi Eiichi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 2, 73—75 (англ.)

В топологическом пространстве X рассматривается семейство множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если $A \in \mathfrak{M}$ и $B \subset A$, то $B \in \mathfrak{M}$ (наследственность).
2. Если $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$, то и $A \cup B \in \mathfrak{M}$ (конечная аддитивность).

Каждое такое семейство $\mathfrak{M}$ дает возможность пополнить пространство X новой точкой ξ следующим образом:

Пусть M — произвольное множество в X. Если замыкание $[M]_X$ множества M в X есть элемент семейства $\mathfrak{M}$, то замыкание $[M]_{X \cup \xi}$ в пополненном пространстве $X \cup \xi$ считаем совпадающим с $[M]_X$. Если же $[M]$ не содержится в $\mathfrak{M}$, то полагаем $[M]_{X \cup \xi} = [M] \cup \xi$. Кроме того, полагаем $[M \cup \xi]_{X \cup \xi} = [M] \cup \xi$.

Множество $X \cup \xi$ с только что определенной в нем топологией есть топологическое пространство, называемое одноточечным расширением пространства X, соответствующим семейству $\mathfrak{M}$. Если X локально бикомпактно, и $\mathfrak{M}$ — семейство множеств $M \subseteq X$, имеющих в X бикомпактное замыкание, то соответствующее этому семейству расширение есть известное расширение в смысле референта. П. С. Александров

2462. Некоторые свойства бикомпактных расширений. Хенриксен, Исбелл (Some properties of compactifications. Henriksen Melvin, Isbell J. R.), Duke Math. J., 1958, **25**, № 1, 83—105 (англ.)

Изучаются некоторые интересные классы непрерывных отображений, а также те топологические свойства, которые сохраняются при этих отображениях не только в прямую сторону (от прообраза к образу), но и в обратную.

Замкнутое отображение пространства X на пространство Y, для которого полный прообраз каждой точки бикомпактен, называется F-отображением (или совершенным отображением). Отображение пространства X на пространство Y называется M-отображением, если его можно продолжить в непрерывное отображение некоторого расширения $\widetilde{X}$ на некоторое расширение $\widetilde{Y}$ так, что оно гомеоморфно переводит нарост $\widetilde{X} \setminus X$ на нарост $\widetilde{Y} \setminus Y$ (пространства рассматриваются только вполне регулярные, а расширения — только бикомпактные). Свойства, сохраняющиеся при таких отображениях в обоих направлениях, называются F- и соответственно, M-свойствами. Каждое M-отображение является F-отображением. Для K-пространств в смысле Кэли (пространства, в которых каждое множество, пересекающееся с любым бикомпактом по замкнутому множеству, само замкнуто), каждый из данных классов отображений совпадает с классом собственных отображений Лерэ (отображение называется собственным, если полный прообраз каждого бикомпакта — бикомпактен). Имеются F-отображения, не являющиеся M-отображениями, например, проектирование произведения не локально бикомпактного пространства с бикомпактным пространством (содержащим более одной точки) на бикомпактное пространство. Даются следующие необходимые и достаточные условия: 1) F-отображение пространства X на нормальное пространство Y тогда и только тогда является M-отображением, когда для любой пары различных точек пространства X существуют такие их замкнутые окрестности, образы которых имеют биком-

пактное пересечение. 2) Отображение является F-отображением тогда и только тогда, когда его продолженное отображение чеховского расширения βX на некоторое расширение $\widetilde{Y}$ пространства Y (согласно Чеху такое продолжение всегда существует) переводит нарост на нарост или тогда и только тогда, когда продолженное отображение является F-отображением нароста $\beta\widetilde{X}\setminus X$ на нарост $\widetilde{Y}\setminus Y$.

Переходя к свойствам, заметим, что каждое F-свойство является M-свойством. Свойства бикомпактности, локальной бикомпактности, компактности, финальной компактности, полноты по Чеху, паракомпактности и многие другие аналогичные свойства являются F-свойствами, а свойства нормальности, метризуемости и псевдокомпактности такими не являются. Приведен пример M-свойства, не являющегося F-свойством.

M-свойства интересны еще и с той стороны, что они и только они, будучи выполненными для некоторого нароста какого-либо пространства, выполнены и для всякого нароста того же пространства. Поэтому для M-свойств имеются двойственные им свойства в том смысле, что если одно из них выполнено для данного пространства, то второе выполнено для любого его нароста. Легко видеть, что бикомпактность и локальная бикомпактность двойственны, так же как полнота по Чеху и свойство быть суммой счетного (но не конечного) числа бикомпактов. Финальной компактности двойственно свойство удовлетворять следующей аксиоме счетности: каждый бикомпакт Φ пространства R содержится в бикомпакте Φ' счетного характера в R (т.е. существует счетная система окрестностей $U_n\Phi'$ такая, что в любой окрестности $O\Phi'$ содержится некоторая окрестность $U_n\Phi'$). В связи с этим для каждого свойства P определяется свойство P^∞: пространство R обладает свойством P^∞, если некоторый (а значит и всякий) его нарост обладает свойством P. Если P есть M-свойство, то P^∞ M-свойство. Свойство P является F-свойством тогда и только тогда, когда P^∞ является таковым.

Наконец, в приложении доказано, что в классе H-пространств регулярность является F-свойством, а вполне регулярность — нет. Ю. М. Смирнов

2463. Инвариантные метрики в однородных пространствах. Гёц (Invariante Metriken in homogenen Räumen. Goetz A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 2, 139—140, XII (нем.; рез. русск.)

Пусть G — топологическая группа, транзитивно действующая на пространство M так, что естественное отображение $G\to M$ открыто. Сформулирована без доказательства следующая теорема: Для того чтобы в пространстве M существовала метрика, инвариантная относительно G, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $P\in M$ обладала полной системой окрестностей, инвариантных относительно преобразований их стационарной подгруппы точки P, и чтобы в M была выполнена первая аксиома счетности. Первое из этих условий необходимо и достаточно для того, чтобы в M существовала равномерная структура, относительно которой все преобразования из G равностепенно непрерывны. А. Л. Онищик

2464. О некоторых пространствах рядов с метрикой Бэра, Шалат (O istých priestoroch radov s bairovskou metrikou. Šalát Tibor), Mat.-fyz. čas. SAV, 1957, 7, № 4, 193—206 (словацк.; рез. русск., нем.)

Если $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_n$ — бесконечный ряд с положительными членами, через X обозначим множество всех рядов $\sum_{\mu=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$, где $\varepsilon_n=\pm 1$ для $n=1,2,3,\ldots$. Пусть ρ — метрика Бера на X, т. е. $\rho\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\varepsilon_n^{(1)}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{(2)}a_n\right)=\frac{1}{k}$, где k — наименьшее натуральное число, для которого $\varepsilon_k^{(1)}\neq\varepsilon_k^{(2)}$. Пусть R_k означает $\sum_{\mu=k+1}^{\infty}a_n$ и $S_k(x)=\sum_{n=1}^{k}a_n$.

В первой части работы автор доказывает, что в случае сходящегося бесконечного ряда $\sum_{\mu=1}^{\infty}a_n$ отображение S, при котором каждому $x\in X$ соответствует его сумма, является гомеоморфизмом в том случае, если для любого k справедливо неравенство $a_k>R_k$.

Во второй и третьей части дается обобщение основного результата предыдущих работ автора (РЖМат, 1956, 521, 5941).

Пусть $\sum_{\mu=1}^{\infty}a_n$ — расходящийся бесконечный ряд с положительными членами, для которого $\lim_{n\to\infty}a_k=0$. Тогда множество всех тех $x\in X$, для которых последовательность $\{S_n(x)\}_{\mu=1}^{\infty}$ неограничена сверху или снизу, является множеством первой категории. Отсюда вытекает, что множество всех тех $x\in X$, для которых $\liminf S_n(x)=-\infty$ и $\limsup_{n\to\infty}S_n(x)=\infty$, является множеством $B(x,\rho)$ второй категории в метрическом пространстве M с метрикой ρ. L. Misik

2465. Общее решение некоторой проблемы Сикорского. Медушевский (Solution générale d'un problème de Sikorski. Mioduszewski J.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 3, 169—173, XIII (франц., рез. русск.)

Доказана следующая теорема: Если $n>1$ вещественных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, определенных на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, непрерывны на нем и ни в каком промежутке не постоянны, то всякая компонента множества $A_n=E_{(x_1x_2\ldots x_n)}\{f_1x_1=f_2(x)_2=\ldots=f_n(x_n)\}$ является регулярной кривой не выше 2-го порядка в строгом смысле, т. е. в смысле существования для любой точки $p\in C$ строго монотонного семейства открытых областей вида $G_\varepsilon=\operatorname{int}(\overline{G}_\varepsilon)$, причем ε пробегает весь промежуток $0<\varepsilon<t$ для некоторого $t>0$, а $(p)=\pi_{\varepsilon\to 0}\overline{G}_\varepsilon$ и пересечение $F_r(\overline{G}_\varepsilon)l$ состоит не более чем из 2^n точек для каждого из этих значений. А. С. Пархоменко

2466. Одномерные непрерывные кривые и теорема однородности. Андерсон (One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem. Anderson R. D.), Ann. Math., 1958, 68, № 1, 1—16 (англ.)

Под одномерной непрерывной кривой автор понимает локально связные одномерные континуумы. Мы будем их называть л. с. линиями. Л. с. линию называем однородной, если топологическим отображением ее на себя можно любую точку линии перевести в любую.

Точка p линии C называется разбивающей, если $C\setminus p$ несвязно.

Основной результат работы: Среди всех л. с. линий имеются с точностью до гомеоморфизма лишь две однородные окружность и менгеровская универсальная кривая. Второй основной результат: Универсальная менгеровская кривая вполне характеризуется среди всех л. с. линий без разбивающих точек тем, что никакое ее непустое открытое подмножество не гомеоморфно плоскому множеству. Следствия: кривая, известная под названием ковра Серпинского (универсальная кривая для плоских одномерных континуумов) не гомеоморфна менгеров-

ской универсальной кривой, а кривая Колмогорова (для которой им построено открытое отображена на двумерный континуум) — гомеоморфна менгеровской универсальной кривой. П. С. Александров

2467. Топологическая характеристика кривой Серпинского. Уайберн (Topological characterization of the Sierpiński curve. Whyburn G. T.), Fundam. math., 1958, **45**, № 3, 320—324 (англ.)

Под S-кривой понимается плоский локально связный одномерный континуум S такой, что граница каждой дополнительной области континуума S есть простая замкнутая линия и две границы этих дополнительных областей не пересекаются.

Доказывается, что всякая S-кривая гомеоморфна универсальной кривой Серпинского.

Точка p называется локально разбивающей точкой локально связного континуума M, если она является разрезающей точкой некоторого открытого связного подмножества континуума M. Для того чтобы плоский одномерный локально связный континуум M был S-кривой, необходимо и достаточно, чтобы он не имел локально разбивающих точек. А. С. Пархоменко

2468. Об операции сужения отображений. Сикорский (On the operation of cutting off mappings. Sikorski R.), Prace Mat., 1955, **1**, 136—140 (англ.)

Пусть X — метрическое пространство, Y — замкнутое метрическое пространство и Y^X — пространство всех непрерывных отображений $f: X \to Y$ с обычной метрикой. Если $F \subset X$, тогда $\Phi(f): F \to Y$ обозначает ограничение $f|F$. Автор доказывает, что если F — замкнуто и Y абсолютный окрестностный ретракт, то отображение $\Phi: Y^X \to Y^F$ открыто. S. Eilenberg

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 69.

2469. Атомистическое разложение континуума в апосиндетичный континуум. Мак-Оли (An atomic decomposition of continua into aposyndetic continua. McAuley Louis F.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 1, 1—11 (англ.)

В работе обобщаются результаты Моора и Уайберна по полунепрерывным разложениям компактов и монотонным непрерывным отображениям (Whyburn G. T., Amer. Math. Soc. **28**, Coll. Publ. 1942). Джонс (Jones F., Amer. J. Math. 1941, **63**, 545—553) ввел понятие апосиндетичности (определения см. РЖМат, 1957, 1240), которое является обобщением локальной связности, а в случае метрического континуума эквивалентно понятию полулокальной связности.

Пусть M — континуум, $p \in M$ и Y — некоторое теоретико-множественное свойство. $M(p)$ — множество всех точек $x \in M$, для которых не существует семейства $K(p, x, Y)$ замкнутых множеств, разделяющих M, каждое из которых обладает свойством Y и такое, что 1) существует элемент из K, разделяющий p от x в M и 2) для $g \in K$, $M \setminus g = A \cup B$, континуум N, лежащий в A, $b \in B$, существует континуум $C \supset D \supset N$, D — открытое множество и три непересекающихся множества $g_1, g_2, g_3 \in K$, каждое из которых отделяет C от b в M, и g_2 отделяет g_1 от g_3 в M.

Совокупность H всех множеств $M(p)$, p пробегает M — верхняя полунепрерывная совокупность замкнутых множеств. Атомистическим элементом разбиения M в апосиндетичный континуум является компонента множества $M(p)$.

Множество компонент также обозначается через H и вводится топология: $U \subset H$ называется открытым, если $\cup_{u \in U} u$ — открыто в M (u-континуум в U). Топологическое пространство H назовем гиперпространством (пространством разложения). Тогда, если свойство Y — свойство быть точечным множеством, а M — метрический компактный континуум, то гиперпространство H — апосиндетичный компактный метрический континуум, $M(\overline{p})$ — континуум. Если при тех же условиях M также апосиндетично, то $M(p) = p$ и H идентично с M.

Если свойство Y — свойство быть локально связным, M — компактный метрический континуум, то гиперпространство — компактная метрическая кривая.

Если свойство Y — свойство состоять из одной точки, то гиперпространство — компактная метрическая непрерывная кривая.

Если свойство Y — свойство быть суммой конечного числа континуумов, а M — континуум, лежащий в плоскости, то гиперпространство — компактная метрическая непрерывная кривая. Получен также ряд теорем, где требования метричности и компактности опускается. Доказательства теорем существенно опираются на более раннюю работу автора (РЖМат, 1957, 1240).

М. Я. Антоновский

2470. Разрезающие множества во вполне неапосиндетичных континуумах. Грейс (Cut sets in totally nonaposyndetic continua. Grace Edward E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 98—104 (англ.)

Обобщается понятие апосиндетичности (реф. 2469). Если A и B — непересекающиеся подмножества топологического континуума T и не существует никакого континуума T' и открытого множества $U \subset T$ таких, что $[T \setminus A] \supset T' \supset U \supset B$, то скажем, что T неапосиндетичен в B по отношению к A. Если даны $A \subset T$ и G — некоторое множество подмножеств T, то очевидным образом определяется вполне неапосиндетичность A по отношению к G. Если $A = T$ и $G = \{\{x\} \mid x \in T\}$, то T вполне неапосиндетично.

Если T — топологический континуум, а Z — вес T, $A \subset T$ ($A \neq \Lambda$) и A — пересечение Z открытых подмножеств T, то A назовем областью пересечения в T. Если пересекающиеся множества были плотны в T, то A — плотная область пересечения в T. Если $Z' \geqslant Z$ и T не представимо в виде суммы $Z'' \leqslant Z'$ нигде не плотных в T замкнутых множеств, то T назовем бэровским топологическим континуумом.

Если $P \subset T$, то $p(1), p(2), \ldots, p(i), \ldots$ — определенные, вполне упорядоченные множества P. Пусть $A \subset T$ и $P \setminus A$, тогда $F(A)$ — первый член из P в $T \setminus A$.

Доказывается ряд теорем, например:

(1) Пусть T содержит плотную область пересечения I такую, что если $x \in I$ и T неапосиндетично в x по отношению к множеству $g \in G$ (G — определенным образом выбранное семейство подмножеств I), то g разделяет x и $F(g)$ в T.

(2) Пересечение $Z' \leqslant Z$ плотных областей пересечения в T есть плотная область пересечения.

Как следствие общей теории приводятся следующие предложения:

Если M — вполне неапосиндетичный, компактный метрический континуум, то M содержит слабо разрезающую точку.

Если M вполне неапосиндетично по отношению к некоторому множеству H замкнутых подмножеств T, то H содержит некоторый элемент, слабо разрезающий M.

Указывается, что доказанные теоремы существенно зависят от бэровского топологического условия; приводится соответствующий пример. М. Я. Антоновский

2471. О соотношении между метрической и топологической размерностью. Катетов Мирослав, Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 2, 163—166

Обозначая метрическую размерность метрического пространства (РЖМат, 1957, 7745) через $\mu\dim X$, автор доказывает, что

$$\mu\dim X \leqslant \dim X \leqslant 2\mu\dim X.$$

Ввиду известных примеров Ситникова эта оценка является окончательной. П. С. Александров

2472. Пример одномерного нормального пространства, не содержащегося ни в каком одномерном бикомпакте. **Смирнов Ю.**, Докл. АН СССР, 1957, 117, № 6, 939—942

Строится упоминаемый в заглавии пример, причем одномерность понимается в смысле малой индуктивной размерности ind, а содержание — в смысле топологического содержания. При построении существенную роль играет вспомогательное пространство, являющееся видоизменением пространства, построенного А. Лунцем (Докл. АН СССР, 1949, 66, 801). П. С. Александров

2473. Теорема о неподвижной точке. **Вард** (A fixed point theorem. Ward L. E., Jr), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 4, 271—272 (англ.)

Рассматриваются многозначные, сильно непрерывные (по терминологии В. Пономарева, реф. 2474) отображения так называемых змееподобных континуумов (т. е. континуумов, допускающих сколь угодно мелкие неприводимые открытые покрытия $\gamma = \{\Gamma_i\}$, в которых $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ непусто тогда и лишь тогда, когда $|i-j| \leqslant 1$). Доказывается, что сильно непрерывное отображение змееподобного континуума всегда имеет неподвижную точку.

П. С. Александров

2474. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные отображения бикомпактов. **Пономарев В.**, Докл. АН СССР, 1958, 118, № 6, 1081—1084

Работа содержит основы общей теории многозначных непрерывных отображений главным образом бикомпактных хаусдорфовых пространств, причем в качестве средства для изучения этих отображений привлекается новое пространство замкнутых множеств пространства X, называемое автором пространством $\varkappa X$.

Точки пространства $\varkappa X$ суть, как обычно, непустые замкнутые множества пространства X. Однако топология вводится по-новому: для определения произвольной окрестности точки $(F) \in \varkappa X$ берется произвольная окрестность OF множества F в X, и рассматривается множество $O(F)$ всех лежащих в OF замкнутых множеств пространства X. Полученное таким образом окрестностное пространство $\varkappa X$ есть T_0-пространство и никогда (кроме тривиального случая одноточечного X), не оказывающееся T_1-пространством. Пространство $\varkappa X$ всегда бикомпактно и связно и содержит X в качестве подпространства, причем в отличие от обычного пространства замкнутых множеств ψX точки $\varkappa \in X$ топологически инвариантно характеризуются среди всех точек пространства $\varkappa X$. Среди установленных в работе свойств пространства $\varkappa X$ отметим два: 1°. При всяком непрерывном отображении пространства $\varkappa X$ в себя имеется неподвижная точка. 2°. Если D^τ есть обобщенный канторов дисконтинуум веса τ (т. е. топологическое произведение τ простых двоеточий), то пространство $\varkappa D^\tau$ топологически содержит всякое T_0-пространство веса $\leqslant \tau$.

В работе рассматриваются многозначные отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y, при которых образом каждой точки $x \in Y$ является замкнутое множество fx пространства Y. Непрерывность определяется по Коши: ко всякой окрестности Ofx множества fx существует такая окрестность Ox точки x, что ее образ fOx (т. е. соединение образов всех $x' \in Ox$) содержится в Ofx. Ко всякому отображению f пространства X на пространство Y определяется обратное отображение f' пространства Y на X: для произвольной точки $y_0 \in Y$ множество $f'y_0$, по определению, состоит из всех тех $x \in X$, для которых $y_0 \in fx$. При этом оказывается, что $(f')' = f$. Замкнутость отображения f' равносильна непрерывности отображения f. Всякое непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y оказывается замкнутым, поэтому в этом случае f' всегда непрерывно. Для того, чтобы отображение бикомпакта X на бикомпакт Y было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и чтобы все множества $f'y$ были замкнуты в X.

Рассматривая множества $f(x)$ как точки пространства $\varkappa Y$ видим, что всякое замкнутое отображение f пространства X на пространство Y порождает однозначное отображение $\overline{f}$ пространства $\varkappa X$ в $\varkappa Y$, причем $\overline{f}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение f. Оказывается, что отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y тогда и только тогда непрерывно, когда множества $f'y$ замкнуты для всех $y \in Y$ и каково бы ни было замкнутое множество $B \subseteq Y$, множество всех $f'y$ для $y \in B$ бикомпактно в топологии пространства $\varkappa X$. Непрерывность многозначного отображения бикомпакта X на бикомпакт Y легко характеризуется также посредством рассмотрения сходящихся последовательностей по любому направленному множеству: из сходимости любой последовательности точек x_α (где α пробегает направленное множество θ) к точке x_0 должна следовать сходимость множеств fx_α к множеству fx_0. Характеризуется непрерывность многозначного отображения бикомпакта X на бикомпакт Y также и замкнутостью естественно определяемого „графика“ этого отображения в топологическом произведении X на Y. Наряду с обычным „большим“ образом множества $A \subseteq X$ в работе определяется „малый“ образ этого множества, как множества всех тех y, для которых $f'y \subseteq A$. Большой образ $f'B$ множества $B \subseteq y$ при отображении f' называется большим прообразом этого множества при отображении f, а малый образ при отображении f' — малым прообразом при отображении f. При этих определениях непрерывные отображения характеризуются как такие, при которых большой прообраз любого замкнутого (малый прообраз открытого) в Y множества замкнут (открыт) в X. Если, кроме непрерывности, потребовать, чтобы малый прообраз замкнутого (большой прообраз открытого) в Y множества был замкнут (открыт) в X, получим сильно непрерывные отображения, рассматривавшиеся ранее Стротером под названием непрерывных. Для них автор устанавливает следующие новые предложения:

(а) Пусть f — сильно непрерывное отображение связного пространства X на пространство Y. Если, по крайней мере, для одной точки $x \in X$ множество fx связно, то связно и все пространство Y. (б) Пусть f — многозначное открытое непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Пусть B — связное замкнутое множество в Y и K — любая компонента множества $f'B$. Тогда $fK \supseteq B$. (в) Пусть f в обе стороны сильно непрерывное (и, значит, в обе стороны открытое) отображение локально связного бикомпакта X на бикомпакт Y и B — связное, замкнутое в Y множество, содержащее внутренние точки. Тогда множество $f'B$ состоит из конечного числа компонент. Эти предложения являются обобщением известных свойств однозначных отображений бикомпактов.

П. С. Александров

2475. Открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный куб. **Келдыш Л. В.**, Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 259—264

Указывается, что трехмерный куб можно открыто и монотонно отобразить на четырехмерный (РЖМат, 1958, 3609). Намечается путь построения соответствующего примера. А. С. Шварц

2476. Гомологии и существование неподвижной точки компактного плоского множества. **Цзян Бо-цзюй** (Chiang Pe-chu), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжанькэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, 3, № 4, 423—430 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\{G, \pi\}$ — прямая система групп вполне упорядоченного множества M. Если: 1) для $\alpha \in M$ G^α — сво-

бодная группа, 2) для $\alpha < \beta$ $\mathrm{Im}\pi_\alpha^\beta$ есть замкнутая подгруппа G^β, тогда G^∞ есть свободная группа. С помощью этого доказывается, что для всякого компактного плоского множества X когомологическая группа $H^r(X, J)$ есть свободная группа. Если X к тому же не разделяет плоскости, в которой оно лежит, то каждое периодическое отображение X в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку. Из резюме автора

2477. Неподвижные точки отображений в симметрическое произведение. Максуэлл (Fixed points of symmetric product mappings. Maxwell Charles N.), Proc Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 808—815 (англ.)

Пусть X—полиэдр, X^n—топологическое произведение n экземпляров пространства X, G — группа перестановок чисел $[1, 2, \ldots, n]$. Группа G действует на пространстве X^n (именно, если $g \in G$ и $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, полагаем $g(x_1, \ldots, x_n) = (x_{g(1)}, \ldots, x_{g(n)})$). Пространство, получающееся из X^n отождествлением точек, эквивалентных относительно группы G, обозначаем через X^n/G.

Автор указывает достаточное условие для того, чтобы непрерывное отображение $f: X \to X^n/G$ имело неподвижные точки (точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения $f: X \to X^n/G$, если точка x является одной из координат точки $f(x)$). Для каждого отображения $f: X \to X^n/G$ автор следующим образом определяет его число Лефшеца $L(f)$. Обозначим ν_* отображение $H_p(X^n/G) \to H_p(X^n)$, фигурирующее в теории Смита, и через π-проекцию пространства X^n на один из сомножителей. Через l_p обозначим след отображения $\pi_* \nu_* f_*: H_p(X) \to H_p(X)$ (группы гомологий берутся с коэффициентами в поле рациональных чисел). Число $L(f)$ определим с помощью формулы $L(f) = \sum_p (-1)^p l_p$. Следующая теорема является основной в работе: Если число Лефшеца $L(f)$ непрерывного отображения $f: X \to X^n/G$ отлично от нуля, то отображение f имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Указываются некоторые приложения этой теоремы.

Примечание референта. Определение числа $L(f)$ в работе излишне усложнено, так как автор не рассматривает отображение ν_*, а сразу строит отображение $\mu_* = \pi_* \nu_*$. А. С. Шварц

2478. Об однозначности некоторых комбинаторных инвариантов конечных комплексов. Ли Кэ-цюнь (Über die Eindeutigkeit von einigen kombinatorichen Invarianten endliches Komplexes. Lee Ke-chun), Sci. Rec., 1957, **1**, № 5, 279—281 (нем.)

Пусть K — конечный n-мерный комплекс. Обозначим через $a^i(K)$ число i- мерных симплексов комплекса K и через $a_{ij,k}(K)$ — число упорядоченных пар (τ^i, τ^j), где τ^i, τ^j — симплексы комплекса размерностей соответственно i и j и $\dim(\bar{\tau}^i \cap \bar{\tau}^j) = k$.

Автор рассматривает комбинаторные инварианты вида

$$\delta(K) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i(K) \text{ и } \theta(K) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ -1 \leqslant k}}^{n} \alpha_{ij,k} a_{ij,k}(K),$$

где числа α_i и $\alpha_{ij,k}$ не зависят от комплекса K. Доказывается, что всякий инвариант вида $\delta(K)$ пропорционален эйлеровой характеристике $\chi(K)$ (этот факт был известен ранее), а всякий инвариант вида $\theta(K)$ может быть представлен в виде $\lambda\chi(K) + \mu[\chi(K)]^2 + \nu\chi^+(K)$, где $\chi^+(K)$ — построенный У Вень-цзюнем (РЖМат, 1955, 1130) инвариант $\chi^+(K) = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij,-1}(K)$. Доказательство проводится с помощью индукции по n. А. С. Шварц

2479. Спектральные последовательности для пространств непрерывных отображений. Берштейн (Suites spectrales pour les espaces des applications continues. Berstein Israël), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 9, 880—882 (франц.)

Пусть X и Y — топологические пространства, A — замкнутое подмножество пространства X, y_0 — некоторая точка пространства Y и $\langle X, A \rangle$ — пространство отображений $(X, A) \to (Y, y_0)$ (в компактно-открытой топологии). Утверждается, что при некоторых естественных условиях (которым должны удовлетворять пространства X, A и Y) существует такая спектральная последовательность $\{E^r_{n,p}\}$, начинающаяся с членов $E^2_{n,p} = H^p(X, A; \pi_{n+p}(Y))$ (имеются в виду группы спектральных когомологий), что группа $\sum_p E^\infty_{n,p}$ присоединена соответствующим образом к профильтрованной группе $\pi_n(\langle X, A \rangle)$. При некоторых более сильных ограничениях на пространства X, A и Y это утверждение остается справедливым и при замене гомотопических групп группами сингулярных гомологий. (Однако в этом случае группы $E^r_{n,p}$ определены лишь для $n < N$, где N — некоторое число, зависящее от размерности дополнения $X \setminus A$ и номера первой нетривиальной гомотопической группы пространства Y; таким образом, в этом случае получается лишь "частичная" спектральная последовательность.)

Из этих результатов легко получаются некоторые известные результаты Мардешича (РЖМат, 1956, 4398, 8680; 1957, 5145; 1958, 199) и Мура (Fundam. math., 1956, 43, №2, 195—201), а также классификационные теоремы Хопфа—Даукера и Стинрода. Легко доказывается также следующий новый результат: Пусть $\langle X \rangle$ —пространство всех непрерывных отображений полиэдра X в пространство типа $K(B, m)$. Тогда $\pi_n(\langle X \rangle) \approx H^{m-n}(X, B)$. М. М. Постников

Примечание редакции. Результаты этой работы сильно перекрываются результатами Федерера (РЖМат, 1957, 3883).

2480. Произведение Уайтхеда и векторные поля на сферах. Джеймс (Whitehead products and vector-fields on spheres. James I. M.), Proc. Camridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 4, 817—820 (англ.)

Автор исследует вопрос, в каких случаях на n-мерной сфере S^n существует r-поле (т. е. r линейно независимых векторных полей). Формулируются некоторые известные результаты. Доказывается следующая лемма: Если на сфере S^n существует r-поле $(0 < r < n)$ и группа $\pi_{n-1}(S^{n-r-1})$ не содержит элементов четного порядка, то на сфере S^n существует $(r+1)$-поле. Из этой леммы выводится справедливость следующей гипотезы Серра: для бесконечного числа значений q стабильные гомотопические группы сфер $G_q = \pi_{n+q}(S^n)$ $(n > q+1)$ содержат элементы четного порядка.

Далее автор рассматривает элемент $w_n = [\iota_n, \iota_n] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ (через ι_n обозначен образующий элемент группы $\pi_n(S^n)$) и доказывает следующую теорему: Пусть $r < n$. Если на сфере S^n существует r-поле, то элемент w_n является r-кратной надстройкой. Обратно, если w_n является r-кратной надстройкой и $n > 2r$, то на сфере S^n существует r-поле. Приводятся некоторые следствия этой теоремы (в частности, доказывается, что на S^{15} не существует 9-поля). А. С. Шварц

2481. Квазирасслоения и бесконечные симметрические произведения. Дольд, Том (Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. Dold Albrecht, Thom Rene), Ann. Math., 1958, **67**, № 2, 239—281 (нем.)

Подробное изложение результатов заметки авторов (РЖМат, 1957, 7763). Указываются некоторые обобщения этих результатов. А. С. Шварц

2482. О гомоморфизме Уайтхеда J. Милнор (On the Whitehead homomorphism J. Milnor John), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 3, Part 1, 79—82 (англ.)

Автор рассматривает гомоморфизм Уайтхеда $J: \pi_{r-1}(SO(n)) \to \pi_{n+r-1}(S^n)$ (Whitehead G. W., Ann. Math., 1942, **43**, 634—640).

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{B}$ — главное косое произведение с базой S^r и группой $SO(n)$, соответствующее элементу $\lambda \in \pi_{r-1}(SO(n))$. Если $J\lambda = 0$, то можно таким образом подобрать ориентируемое (быть может, не связное) многообразие M^r, гладко вложенное в сферу S^{n+r} и допустимое отображение f нормального косого произведения многообразия $M^r \subset S^{n+r}$ в косое произведение $\mathfrak{B}$, что индуцируемое отображением f отображение M^r на S^r имеет степень 1.

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 $J\lambda = 0$, $r = 4k$ и p_k ($\mathfrak{B}$) — $4k$-мерный класс Понтрягина расслоения $\mathfrak{B}$. Тогда класс $s_k \cdot p_k$ ($\mathfrak{B}$) является целочисленным классом когомологий (здесь $s_k = \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k$, B_k — k-е число Бернулли).

Это следствие вытекает из теоремы 1 с помощью результатов Хирцебруха о связи понтрягинских классов гладкого многообразия с его сигнатурой (см. стр. 85 работы Хирцебруха — РЖМат, 1956, 6491).

Следствие 2. В группе $\pi_{4k-1}(SO(n))$, $n > 4k$, существует такой элемент λ_0, что порядок элемента $J\lambda_0 \in \pi_{n+4k-1}(S^n)$ кратен знаменателю рационального числа $2^{2k}(2^{2k}-2)B_k/2k$, представленного в виде несократимой дроби.

Из следствия 2 и известных теорем и теоретико-числовых свойств чисел Бернулли автор получает следующее предложение:

Теорема 2. Пусть p — нечетное простое число и r делится на $2(p-1)p^i$ ($i \geqslant 0$). Тогда при $n > r$ группа $J\pi_{r-1}(SO(n))$ содержит циклическую подгруппу порядка p^{i+1}. А. С. Шварц

2483. О параллелизуемости сфер. Ботт, Милнор (On the parallelizability of the spheres. Bott R., Milnor J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 3, Part 1, 87—89 (англ.)

Заметка состоит из писем Милнора к Ботту и Ботта к Милнору. Ботт доказывает в своем письме следующее предложение. Пусть $\mathfrak{B}$ — косое произведение, базой которого является сфера S^{4k}, а группой — ортогональная группа $O(m)$. Если k четно, то $4k$-мерный класс Понтрягина p_{4k} косого произведения $\mathfrak{B}$ делится на $(2k-1)!$, если k нечетно, то класс p_{4k} делится на $(2k-1)!\cdot 2$. (Эта оценка точная.)

Исходя из этого предложения, Милнор доказывает, что у косого произведения, базой которого служит сфера S^n размерности, не равной 1, 2, 4 или 8, а группой—ортогональная группа $O(m)$, n-мерный класс Штифеля w_n равен нулю. Отсюда мгновенно вытекает, что в векторном пространстве E^n билинейное умножение без делителей нуля существует лишь при $n = 1, 2, 4$ или 8 и что сфера S^n параллелизуема лишь при $n = 1, 3$ или 7. Последнее утверждение было доказано одновременно Кервером с помощью одного из следствий приведенной выше теоремы Ботта. А. С. Шварц

2484. Однопараметрические группы преобразований плоскости. Мостерт (One-parameter transformation groups in the plane. Mostert Paul S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 462—463 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть группа всех действительных чисел R действует на плоскости E^2. Если на плоскости не существует точки, неподвижной при всех преобразованиях группы R, и пространство E^2/R (т. е. пространство траекторий группы R) хаусдорфово, то группа R эквивалентна однопараметрической группе параллельных переносов плоскости E^2 (иначе говоря, отображение $E^2 \to E^2/R$ является расслоением, и это расслоение имеет секущую поверхность). А. С. Шварц

2485. Инвариантные римановы метрики в однородных пространствах. Гец (Invariante Riemannsche Metriken in homogenen Räumen. Goetz A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 5, 475—478 (нем.; рез. русск.)

Пусть M — аналитическое многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли G. Доказывается, что инвариантная относительно G риманова метрика существует в M тогда и только тогда, когда в алгебре Ли g группы G существует окрестность нуля, инвариантная относительно всех внутренних автоморфизмов алгебры g, порожденных элементами стационарной подгруппы некоторой точки. А. Л. Онищик

2486. О теореме Монтгомери и Замельсона. Коннер (On a theorem of Montgomery and Samelson. Conner P. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 464—466 (англ.)

Доказываются следующие предложения: Теорема 1. Пусть связная компактная группа Ли G действует на компактном односвязном абсолютном окрестностном ретракте X. Если эйлерова характеристика пространства X отлична от нуля и все траектории группы G имеют одну и ту же размерность, то стационарные подгруппы во всех точках пространства X связны и сопряжены между собой. Теорема 2. Пусть связная компактная группа Ли G действует на замкнутом односвязном многообразии M^n и точка $x \in M^n$ неподвижна при всех преобразованиях группы G. Тогда среди траекторий группы G в множестве $M^n \setminus x$ найдутся две, имеющие различную размерность.

Теорема 2 была ранее известна в случае, когда группа G дифференцируемо действует на n-мерной сфере S^n (Montgomery D., Samelson, H., Duke Math. J., 1946, **13**, 51—56). А. С. Шварц

2487. Заметка о теореме Мостова. Коннер (A note on a theorem of Mostow. Conner P. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 467—471 (англ.)

Пусть G—односвязная группа Ли, H—ее замкнутая подгруппа, H^c—связная компонента единицы в группе H, L, L'—максимальные компактные подгруппы групп G, H^c. Тогда $G = L \times E^s$, $H^c = L' \times E^t$, где E^r — r-мерное евклидово пространство. Доказывается, что если группа $\pi_1(G/H)$ разрешима, то ее ранг r в смысле Мостова (РЖМат, 1958, 5523) равен $r = s - t + k - n$, где $n = \dim G/H$, k — наибольшее целое число такое, что $H^k(G/H, Z_2) \neq 0$. В частности, $r = s - t$ тогда и только тогда, когда G/H компактно. Тем самым усилен результат, полученный в указанной работе Мостова. А. Л. Онищик

2488. Соотношение между характеристическими классами четырехмерного многообразия. Рохлин В. А., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-т, 1958, **2**, 3—17

Автор доказываетс ледующую теорему, опубликованную им ранее без подробного доказательства (Докл. АН СССР, 1952, **84**, № 2, 221—224): Если двумерный штифелевский класс четырехмерного гладкого замкнутого ориентируемого многообразия M^4 равен нулю, то четырехмерный класс Понтрягина многообразия M^4 делится на 48. А. С. Шварц

2489. Внутренние гомологии. Рохлин В. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 876—879

В заметке полностью описывается несколькими способами образ естественного гомоморфизма группы Ω^k внутренних гомологий в группу $\mathfrak{N}^k$ внутренних гомологий mod 2 (РЖМат, 1953, 1123). Вот одна из форм основной теоремы заметки: для того чтобы k-мерное гладкое многообразие было внутренне гомологично ориентируемому многообразию, необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль любой k-мерный класс когомологий вида $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \ldots w_{k-1}^{r_{k-1}}$, где w_i — i-мерный штифелевский класс, $r_i \geqslant 0$ и $r_1 > 0$.

Из основной теоремы выводится следующее утверждение: в Ω^k нет элементов порядка 4. А. С. Шварц

2490 К. Элементы топологии. I. Буоно (Elementi di topologia. Vol. 1. 3-a ed. Buono Ugo dal Reggio di Calabria, Ed. mat., 1957, 412 p., ill., 4000 L.) (итал.)

2491 Д. О комплексных аналитических многообразиях. Бланшар (Sur les variétés analytiques complexes. Blanchard André.—Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris. Paris, Gauthier-Villars, 1956, 48 p.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 19, 517 (франц.)
См. РЖМат, 1958, 3260.

2492 Д. Неабелевы когомологии и расслоенные пространства. Френкель (Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. Frenkel Jean.—Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris. Paris, Gauthier-Villars, 1957, p. 135—222), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 19, 518 (франц.)
См. РЖМат, 1956, 8682.

См. также: 2149, 2411, 3199

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

2493. Об одном обобщении понятия интеграла Лебега. I. Маттес (Über eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen Integralbegriffes. I. Mitt. Matthes Klaus), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—1956, **5**, № 4, 287—295 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Пусть E—локально бикомпактное хаусдорфово пространство, $\mathfrak{L}_0(E)$—множество непрерывных вещественных на E функций, обращающихся в нуль вне некоторого бикомпактного подмножества E, которое линеаризируется, нормируется и полуупорядочивается обычным образом, и V — линейное полуупорядоченное K-пространство. Множество всех регулярных отображений $\mathfrak{L}_0(E)$ в V обозначается $\mathfrak{R}(E, V)$, элементы из $\mathfrak{R}(E, V)$ автор называет V-функционалами Радона над E. Элемент $I \in \mathfrak{R}(E, V)$ называется ограниченным, если $\| I \| = \bigcup_{\|f\| \leq 1} | I(f) | < \infty$.

Для открытого подмножества $G \subset E$ рассматривается $\mathfrak{L}_0(G)$, состоящее из тех функций $f \in \mathfrak{L}_0(E)$, для которых

$$\{p \in E, \ | f | (p) \neq 0\} \subset G.$$

Часть I на $\mathfrak{L}_0(G)$ обозначается I^G. Предполагая, что $I > 0$, автор рассматривает $\| I^G \|$ как функцию множеств $G \subset E$, со значениями в полуупорядоченном пространстве V. Для произвольных $M \subset E$ вводится внешняя мера $\tilde{\mu}(M) = \bigcap_{G \supseteq M} \| I^G \|$ и доказывается, что она обладает многими свойствами обычной числовой меры Лебега. Множество $M \subset E$ называется измеримым, если оно удовлетворяет условию Каратеодори

$$\tilde{\mu}(N) = \tilde{\mu}(N \cap M) + \tilde{\mu}(N \cap CM)$$

для любого подмножества $N \subset E$. Показывается, что класс измеримых множеств содержит борелевское тело над E и что $\mu(M) = \bigcup_{B \subseteq M} \mu(B)$, где B—бикомпактное подмножество пространства E. Доказывается, что $M \subset E$ тогда и только тогда измеримо, когда для каждой точки $p \in E$ существует окрестность U_p такая, что $U_p \cap M$ измеримо.

Результаты работы являются продолжением и расширением исследований референта по теории полуупорядоченной меры. В. И. Соболев

2494. О регуляризации мер и теореме Рисса. Оническу, Ионеску-Тулча (Regularizarea măsurilor si teorema lui Riesz. Onicescu O., Ionescu Tulcea C. T.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» si Politehn. Bucuresti. Ser. stiint. natur., 1955, № 6-7, 35—38 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть I — замкнутый интервал в R^n, μ — определенная в I аддитивная функция интервала конечной вариации, $C(I)$ — банахово пространство всех непрерывных функций, определенных на I; μ называется непрерывной плотностью, если имеется такая функция $\varphi \in C(I)$, что для каждого замкнутого подынтервала $I' \subset I$ выполняется соотношение $\mu(I') = \int_{I'} \varphi(Q) dQ$.

Теорема. Для каждой μ существует последовательность $\{\mu_n\}$ аддитивных функций интервала конечной вариации, являющихся непрерывными плотностями, такая, что для всех $f \in C(I)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f(Q) d\mu_n(Q) = \int_I f(Q) d\mu(Q).$$

Из этой теоремы автор выводит теорему Рисса о представлении в виде интеграла Лебега-Стилтьеса линейного непрерывного функционала, определенного в $C(I)$. Gy. Alexits

2495. Теоремы единственности и проблема интегрирования. Безикович (A uniqueness theorem and a problem on integration. Besicovitch A. S.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 82—84 (англ.)

Доказываются теоремы:

I. Пусть: 1) $f(x)$ суммируема на любом интервале $(0, a)$, $a < \infty$ и существует интеграл $\int_0^\infty f(t) dt$; 2) $\varphi(x,t)$ определена для всех $x > t > 0$ и $\varphi(x,t) \neq 0$; для каждого t она монотонная и абсолютно непрерывная в интервале $t' < x < h$ при любых $t' > t$ и $h > t'$; $\lim_{x \to \infty} \varphi(x,t) = 0$; 3) $f(x)\varphi(x,t)$ суммируема относительно x на (t, t') для любого $t' > t$ и при любом $t > 0$ существует интеграл $\int_t^\infty f(x)\varphi(x,t)\,dx = 0$. Тогда $f(x) = 0$ почти для всех x.

II. Если 1) $f(x,y)$ измерима,

2) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} | f(x,y) | dy < \infty$,

3) для любой линии L $\int_L f(x,y) ds = 0$, то почти для всех (x,y) $f(x,y) = 0$. А. Г. Джваршейшвили

2496. О существовании среднего σ-интеграла Стилтьеса. Порчелли (On the existence of the Stieltjes mean σ-integral. Porcelli Pasquale), Illinois J. Math., 1958, 2, № 1, 124—128 (англ.)

Устанавливается необходимое и достаточное условие существования σ-интеграла $\int_a^b f dg$, являющегося пределом суммы

$$\sum_{i=0}^{m} 2^{-1} [f(y_{i+1}) + f(y_i)][g(y_{i+1}) - g(y_i)].$$

Н. А. Столяров

2497. О множествах точек, где производная равна соответственно $+\infty$ и $-\infty$. Содыкс В. М., Матем. сб., 1957, **43**, № 4, 429—450

Доказывается следующая теорема: Для того чтобы множества E_1 и E_2 точек оси Ox были множествами всех точек, где производная некоторой конечной в каждой точке функции $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, существует и равна соответственно $+\infty$ и $-\infty$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $| E_1 | = | E_2 | = 0$ и оба множества E_1 и E_2 были типа $F_{\sigma\delta}$; 2) существовали множества H_1 и H_2 оба типа F_σ и такие, что $E_1 \subset H_1$, $E_2 \subset H_2$, $H_1 \cap H_2 = 0$. А. Г. Джваршейшвили

2498. О множествах $\{f'(x)>a\}$. Липинский (Sur les ensembles $\{f'(x)>a\}$. Lipiński J. S.), Fundam. math., 1958, **45**, № 3, 254—260 (франц.)

Продолжаются исследования Загорского и автора свойств множеств типа $\{f'(x)>a\}$, т.е. множеств тех точек, в которых производная больше заданного числа a.

Доказывается теорема: Если непрерывная функция $f(x)$ обладает во всех точках конечной или бесконечной производной, то для любого непустого множества $E=\{f'(x)>a\}$ существуют множество A меры нуль и функция $\varphi(x)$, дифференцируемая и удовлетворяющая условию Липшица, такие, что 1) $A\subset E$, 2) A — пересечение множеств классов F_σ и G_δ, 3) $E\setminus\overline{A}=\overline{E}$, 4) в любой односторонней окрестности точки $x\in\overline{A}\cap E$ существуют точки множества $E\setminus\overline{A}$, 5) $E\setminus A=\{\varphi'(x)>0\}$. S. Paszkowski

2499. О полной непрерывности оператора вложения. Гарбер Е. Д., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 169—173

Приводится новое доказательство теоремы В. И. Кондрашова о полной непрерывности оператора вложения (пространств функций). О. В. Бесов

2500. Максимум модуля. Редхеффер (The maximum modulus. Redheffer Raymond M.), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 1, 76—83 (англ.)

Пусть R — неограниченное связное множество в k-мерном евклидовом пространстве E_k, $\{S_r\}$ — семейство таких ограниченных множеств, что $S_r\subset S_t$ для $r<t$ и $R\subset\lim_{r\to\infty} S_r$ (т. е. каждая точка $P\in R$ принадлежит некоторому S_r). Пусть $u(P)$ — вещественная функция, определенная на R; B_r — граница S_r. Тогда число $m(r)\equiv\sup u(P)$, $P\in R\cap B_r$ названо максимумом модуля. Изучается поведение $m(r)$, когда $r\to\infty$, при основном предположении, что $u(P)$ удовлетворяет слабому принципу максимума: для всякого компакта $S\subset R$ и любого числа m из $u(P)\leqslant m$ на границе S следует $u(P)\leqslant m$ всюду в S. Будем говорить, что $u(P)\leqslant m$ на границе, если для каждого $a>0$ существует последовательность таких замкнутых множеств R_n $\left(R_n\subset R_{n+1}\subset R,\ \lim_{n\to\infty} R_n=R\right)$, что $u<m+\frac{1}{n}$ на части границы R_n, лежащей внутри сферы $s_a\{|P|<a\}$. Будем говорить, что $u(P)\leqslant m$ на границе вне s_a, если для всякого $b>a$ существует последовательность таких замкнутых множеств R_n $(R_n\subset R_{n+1}\subset R\cup s_a$, $\lim R_n\supset R$, $s_a\{|P|\leqslant a\})$, что $u<m+\frac{1}{n}$ на части границы R_n, лежащей в слое между s_a и s_b. Будем писать «для $r>r_0$» вместо «для достаточно больших r».

Доказываются теоремы:

1. Если $u\leqslant m$ на границе, $u>m$ в некоторой точке множества R, то $m(r)$ — неубывающая функция для $r>r_0$ и $\lim_{r\to\infty} m(r)=M$, $m<M\leqslant\infty$, где M не зависит от выбора семейства $\{S_r\}$.

2. Пусть R — открытое, $\varepsilon>0$, $u(P)$ — непрерывная и выполнены предположения теоремы 1. Тогда в R существует простая полигональная линия C, уходящая в бесконечность, такая, что $M-\varepsilon<u(P)\leqslant M$, $P\in C$, если $M<\infty$, и $u(P)>1/\varepsilon$ для $M=\infty$.

3. Пусть $u\leqslant m$ на границе вне s_a и пусть для некоторого r $S_r\supset s_a$. Тогда либо $m(r)$ — не убывающая для $r>r_0$, либо $m(r)$ — не возрастающая для $r>r_0$, либо $m(r)\leqslant m$ для $r>r_0$.

4. Пусть семейство $\{S_r\}$ таково, что для любого $b>0$ найдется такое r, что $S_r\supset s_b$, и пусть $u\leqslant m$ на границе вне s_a. Тогда для достаточно больших r имеет место не зависящее от выбора $\{S_r\}$ одно из следующих четырех утверждений: а) $m(r)\leqslant m$, б) $m(r)$ — неубывающая, непостоянная и $u>m$, в) $m(r)$ — невозрастающая, непостоянная и $u>m$, г) $m(r)$ — постоянная $>m$.

5. Пусть $u(P)$ непрерывна, дополнение R ограничено и пусть $m(r)=\sup u(P)$, $|P|=r$ — не возрастающая функция для $r>r_0$. Тогда в R существует такая простая полигональная линия C, уходящая в бесконечность, что $\lim_{P\to\infty}|u(P)|=\lim_{r\to\infty} m(r)$, $P\in C$.

6. Заключение теоремы 5 имеет место для каждой связной области R в предположении, что условие ограниченности дополнения к R заменено на $u\leqslant m<\lim m(r)$ на границе вне некоторой сферы s_a.

В заключение строятся примеры, показывающие существенность некоторых условий теорем 1—6.

Х. Л. Смолицкий

2501. О некоторых классах непрерывных функций. Юза (O jistých třídách funkcí spojitých. Jůza Miloslav), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 83—90 (чешск.; рез. русск., франц.)

Пусть $0<\sigma<\tau\leqslant 1$. Дается прямое построение функции $f(x)$, которая удовлетворяет условию Липшица порядка σ, но для которой

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\tau}=+\infty \qquad (1)$$

в каждой точке x_0. Существование такой функции было впервые доказано методом категорий Ауэрбахом и Банахом (Auerbach H., Banach S., Studia math., 1931, **3**, 180—184).

Следствие. Пусть m — натуральное число. Тогда существует функция $f(x)$, имеющая следующие свойства: 1) если P — любой непостоянный полином степени меньше m, то $P(f(t))$ не обладает конечной производной ни в одной точке; 2) существуют полином Q степени m и точка t такие, что $\frac{d}{dt}Q(f(t))=0$. V. Jarník

Примечание редакции. Другим методом прямое построение функции $f\in\mathrm{Lip}\sigma$, для которой всюду имеет место (1), дано в работе Тарнавского (РЖМат, 1957, 290).

2502. Чисто циклические элементы поверхности типа ν. Чезари (Fine-cyclic elements of surfaces of the type ν. Cesari Lamberto), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, **7**, № 3-5, 149—185 (англ.)

Изучается структура поверхностей типа ν, задаваемых соотношением $S=(T,A)$, где T — взаимно однозначное и непрерывное отображение допустимого плоского множества $A\subset E_2$ в E_3. При этом в качестве допустимого множества A рассматривается замкнутая конечносвязная жорданова область связности ν, $0\leqslant\nu\leqslant+\infty$. Р. С. Гутер

2503. Новый процесс стягивания и определение циклических элементов для поверхности типа ν. Чезари (A new process of retraction and the definition of fine-cyclic elements. Cesari Lamberto), Anais Acad. brasil. ciênc., 1957, **29**, № 1, 1—7 (англ.)

Изучается особый процесс стягивания для непрерывной поверхности типа ν, определенной в виде непрерывного отображения замкнутой жордановой конечносвязной плоской области, где ν — связность этой области, $0\leqslant\nu<+\infty$. Затем с помощью этого процесса стягивания определяются циклические элементы указанной поверхности, являющиеся также поверхностями. Приведена теорема: Для каждой непрерывной поверхности S_0 типа ν существует самое большее счетная система циклических элементов $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ такая, что выполняется равенство $L(S_0)=\sum_{i=1}^{\infty} L(S_i)$, где $L(S_j)$ — площадь в смысле Лебега поверхности S_j, $j=0,1,2,\ldots$ Эта теорема представляет собою обобщение теоремы о циклической аддитивности (Radó T., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1948, 30).

И. Я. Верченко

2504. **Свойства гладкости поверхностей Фреше. Эглстон** (Tangential properties of Fréchet surfaces. Eggleston H. G.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 187—196 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Рейфенберга (Reifenberg E. R., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, 687 — 698; 1952, **48**, 46 — 69) о существовании асимптотической касательной плоскости для параметрических поверхностей. Р. С. Гутер

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

2505. **Характеристика и классификация взаимно однозначных отображений множества в себя. Девиде** (Eine Charakterisierung und Klassifikation der umkehrbar eindeutigen Abbildungen einer Menge in sich. Devidé Vladimir), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, **2**, № 3, 228—232 (нем.)

Доказываются следующие теоремы:

Теорема I. Для того чтобы однозначное отображение f непустого множества A в себя было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы существовало разложение A на непустые непересекающиеся подмножества A_λ ($\lambda \in \Lambda$) такие, что для каждого λ выполняются следующие условия: 1) $fA_\lambda \subseteq A_\lambda$; 2) если $P \subseteq A_\lambda$ и $fP = P$, то $P = \varnothing$ или $P = A_\lambda$; 3) $k(A_\lambda \setminus fA_\lambda) \leqslant 1$, где kM — кардинальное число множества M.

Теорема II. Разложение $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, о котором говорится в теореме I, является однозначным. Множество индексов Λ распадается при этом на непересекающиеся подмножества Λ_α, Λ_β, Λ_{γ_n} ($n = 1,2, \ldots$), которые характеризуются тем, что: 1) Λ_α содержит в точности те λ, для которых $k(A_\lambda \setminus fA_\lambda) = 1$; 2) Λ_β состоит из тех λ, для которых $k(A_\lambda \setminus fA_\lambda) = 0$ и A_λ бесконечно; 3) Λ_{γ_n} состоит из тех λ, для которых $k(A_\lambda \setminus fA_\lambda) = 0$ и $kA_\lambda = n$. Для $\lambda \in \Lambda_\alpha \cup \Lambda_\beta$ $kA_\lambda = \aleph_0$, так что $\aleph_0(k\Lambda_\alpha + k\Lambda_\beta) + \sum_n n \cdot k\Lambda_{\gamma_n} = kA$. Равенством $U_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \setminus fA_\lambda$ характеризуется то подмножество A, элементы которого не имеют прообраза в A.

Из них следует

Теорема III. Абстрактная структура взаимно однозначных отображений f полностью характеризуется мощностями подмножеств Λ_α, Λ_β, Λ_{γ_n}, т. е. если f_1 и f_2 — два взаимно однозначных отображения A в A такие, что

$$(k\Lambda_\alpha)_1 = (k\Lambda_\alpha)_2,\ k(\Lambda_\beta)_1 = k(\Lambda_\beta)_2,\ (k\Lambda_{\gamma_n})_1 = k(\Lambda_{\gamma_n})_2, \quad (1)$$

то эти отображения изоморфны, так что существует взаимно однозначное отображение pA на A такое, что $f_2 = pf_1p^{-1}$. Обратно, если k_α, k_β, k_{γ_n} ($n = 1,2, \ldots$) — кардинальные числа, удовлетворяющие условию

$$\aleph_0(k_\alpha + k_\beta) + \sum_n n k_{\gamma_n} = kA, \quad (2)$$

то существует взаимно однозначное отображение fA в A, для которого $k\Lambda_\alpha = k_\alpha$, $k\Lambda_\beta = k_\beta$, $k\Lambda_{\gamma_n} = k_{\gamma_n}$. Абстрактно неизоморфным взаимно однозначным отображениям f_1, f_2 соответствуют Λ-разложения, для которых не все равенства (1) имеют место, так что имеется столько неизоморфных взаимно однозначных отображений множества A мощности $kA = k$ в себя, сколько имеется последовательностей кардинальных чисел k_α, k_β, k_{γ_n}, для которых (2) удовлетворяется с $kA = k$. Н. М. Нагорный

2506. **Остановки в трансфинитах. Бахман** (Stationen im Transfiniten. Bachmann Heinz), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, **2**, № 2, 107—116 (нем.)

Дается элементарное изложение понятий и результатов, касающихся недостижимых порядковых чисел. Материал, содержащийся в реферируемой статье, почти совпадает с материалом, имеющимся в книге автора (РЖМат, 1958, 4626К). Статья не содержит доказательств, по поводу доказательств автор отсылает читателя к своей книге.

Содержание статьи следующее. Пусть F — операция, сопоставляющая порядковые числа последовательностям $\{\alpha_\xi\}$ порядковых чисел. Если $F\{\alpha_\xi\}_{\xi<\lambda} < \mu$ для каждой последовательности $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\lambda}$ такой, что $\lambda < \mu$ и $\alpha_\xi < \mu$ для $\xi < \mu$, то μ является недостижимым числом для операции F. Примерами таких чисел оказываются: 1) предельные порядковые числа (для операции $F\alpha = \alpha + 1$); 2) главные порядковые числа относительно сложения, умножения и возведения в степень (т. е. порядковые числа вида ω^ξ, ω^{ω^ξ} и ε-числа); 3) регулярные предельные порядковые числа (для операции $\sup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi$).

Основываясь на наивной теории множеств, автор обсуждает роль аксиом как принципов построения некоторого множества; существование чисел, не достижимых для операций, определенных посредством этих принципов, доказывает невозможность аксиоматической трактовки наивной теории множеств. Автор замечает далее, что для некоторых операций существуют формально различные последовательности недостижимых чисел и для доказательства того, что эти последовательности на самом деле идентичны, возможно требуется аксиома выбора или обобщенная континуум-гипотеза.

Примерами являются последовательность «начальных кардинальных чисел» (т. е. таких порядковых чисел μ, что из $\alpha < \mu$ следует, что мощность α меньше мощности μ) и последовательность «порядковых начальных чисел» (т. е. таких порядковых чисел Ω_ξ, что $\Omega_0 = \omega$, $\Omega_\lambda = \lim_{\xi<\lambda} \Omega_\xi$ для предельных чисел λ и $\Omega_{\xi+1}$ есть наименьшее число, не конфинальное с Ω_ξ).

В связи с этим автор упоминает различные предположения (предполагаемые непротиворечивыми), которые можно использовать для замены аксиомы выбора (ср. Church A., Trans. Amer. Math. Soc., 1927, 29, 178 и § 39 указанной выше книги автора). Наконец, автор сравнивает недостижимые числа Хаусдорфа, Куратовского и Тарского, повторяя содержание § 41 своей книги. A. Mostowski

2507. **Об одной теореме о порядковых числах и некоторых ее следствиях. Ионеску** (O teoremă asupra numerelor ordinale si cîteva consecinte. Ionescu Har. P.), Bul. Inst. politehn. Bucuresti, 1956, **18**, № 3-4, 35—39 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается следующая теорема: Если α и β — трансфинитные порядковые числа одинаковой мощности ($|\alpha| = |\beta|$), то порядковые числа 2^α и 2^β также будут одинаковой мощности.

Согласно одному из следствий теоремы $|\alpha| = |2^\alpha|$ для любого трансфинитного порядкового числа α. Далее для любых трансфинитных порядковых чисел α, β имеем $|\alpha^\beta| = |\alpha\beta|$. Для трансфинитных порядковых чисел α, β, ν, μ имеем $|\alpha^\nu| = |\beta^\mu|$, если $|\max(\alpha, \nu)| = |\max(\beta, \mu)|$.

По резюме автора

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2508. **Обобщение одной теоремы С. Н. Бернштейна. Кахан** (Généralisation d'un théorème de S. Bernstein. Kahane Jean-Pierre), Bull. Soc. math. France, 1957, **85**, № 2, 221—229 (франц.)

С. Н. Бернштейн доказал, что если $f(x)$ — периодическая с периодом 2π и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, то ее ряд Фурье абсолютно сходится; если же $\alpha \leqslant 1/2$, то существуют функции, удовлетворяющие условию $\mathrm{Lip}\alpha$, ряды Фурье которых не являются абсолютно сходящимися.

Пусть E — замкнутое множество; обозначим через $A(E)$ класс функций, определенных на E и таких, что их можно так продолжить, чтобы получились функции класса A, т. е. имеющие абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Пусть $\mathrm{Lip}\alpha(E)$ есть класс функций, определенных на E и таких, что $|f(x') - f(x)| \leqslant K|x' - x|^{\alpha}$, где $x \in E$, $x' \in E$ и K — постоянное. Наконец, если E_h — множество сегментов длины $2h$ с центрами в точках E, обозначим через $\mu(E)$ нижнюю грань тех ν, для которых $mE_h = O(h^{1-\nu})$ при $h \to 0$.

Автор доказывает, что если $\alpha > \mu/2$, то $\mathrm{Lip}\alpha(E) \subset A(E)$; с другой стороны, можно построить такое E и такую $f(x)$, которая не принадлежит $A(E)$, хотя принадлежит $\mathrm{Lip}\alpha(E)$ при любом $\alpha < \mu/2$. Н. К. Бари

2509. Явление Гиббса в теории рядов Фурье. Ганя (Fenomenul Gibbs în teoria seriilor Fourier. Ganea Tudor), Gaz. mat. si fiz., 1956, **A7**, № 1, 10—18 (рум.)

Работа обзорного характера с проведенными доказательствами. Gy. Alexits

2510. О расходимости рядов Фурье. Ульянов П. Л., Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 2, 198—248 (кит.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1958, 4629).

2511. О расходимости рядов Фурье. Ульянов (A külföldi szakirodalomból Fouriersorok divergenciája. Uljanov P. L.), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1958, **8**, № 2, 259—324 (венг.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1958, 4629).

2512. (γ, k)-суммируемость рядов. Гуха (γ, k-summability of series. Guha U. C.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1593—1602 (англ.)

Пусть $\gamma_k(x)$ — (C,k)-среднее от $\cos x$, так что

$$\gamma_0(x) = \cos x,$$

$$\gamma_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x (x-u)^{k-1}\cos u\,du \quad (k>0).$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем (γ, k) к конечному числу S, если

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_k(nt)$ сходится для $0 < t < A$ и

2) $\lim\limits_{t\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_k(nt) = S$.

Доказывается:

1. Если $k \geqslant 2$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_k(nt)$ сходится для $\alpha < t < \beta$, то $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}a_n$ сходится.

2. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем (γ, k), $k \geqslant 0$ — целое, то он суммируем $(C, k+\delta)$, $\delta > 0$.

3. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем (γ, k), $k \geqslant 1$, и пусть

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{[k]-1}}\cos nx$ (если $[k]$ — нечетное) или

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{[k]-1}}\sin nx$ (если $[k]$ — четное) есть ряд Фурье.

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем $(C, k+\delta)$, $\delta > 0$.

4. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем (γ, k), $k \geqslant 4$, то он суммируем $(C, k+\delta)$, $\delta > 0$. М. Д. Калашников

2513. Класс насыщения процессов суммирования Гёльдера и Рисса. Алянчич (Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz. Aljančić Slobodan), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 18, 2567—2569 (франц.)

Следуя идеям Фавара (РЖМат, 1958, 9720), автор устанавливает несколько теорем о процессах Гёльдера и Рисса суммирования числовых рядов и затем применяет их к определению классов насыщения при суммировании этими методами рядов Фурье.

Пусть $S = \sum u_\nu$ — ряд, в котором u_ν — элементы пространства Банаха, Γ — процесс суммирования, определенный треугольной матрицей $\|\gamma_{\nu,n}\|$:

$$\Gamma_n(S) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{\nu,n} u_\nu .$$

Для процесса Рисса $R^{(k,\lambda)}$:

$$\gamma_{\nu,n} = (1-\lambda_\nu/\lambda_n)(1-\lambda_\nu/\lambda_{n+1})\ldots(1-\lambda_\nu/\lambda_{n+k-1}),$$

$\lambda_0 = 0$, $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \to \infty$ (при $\lambda_n = n$ — процесс Чезаро $C^{(k)}$);

для процесса Гёльдера $H^{(k)}$:

$$\gamma_{\nu,n} = 1 - \frac{\nu}{n}\left(1 + \sum\nolimits_{\nu,n}^{(1)} + \ldots + \sum\nolimits_{n,n}^{(k-1)}\right),$$

для процесса $\mathfrak{H}^{(k)}$:

$$\gamma_{\nu,n} = \frac{(k-1)!}{(\log n)^{k-1}}\left[\sum\nolimits_{\nu,n}^{(k-1)} - \ldots + (-1)^{k-2}\sum\nolimits_{\nu,n}^{(1)} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1}\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\right],$$

где $\sum_{\nu,n}^{(m)} = \sum_{i_m=\nu+1}^{n} {}^{1}/_{i_m} \sum_{i_{m-1}=\nu+1}^{i_m} {}^{1}/_{i_{m-1}} \cdots$

$$\cdots \sum_{i_1=\nu+1}^{i_2} {}^{1}/_{i_1} .$$

Пусть s — обобщенная сумма ряда S, $T = \sum \nu u_\nu$, $T_\lambda = \sum \lambda_\nu u_\nu$.

Без доказательства приводятся следующие теоремы:

1. Если $-1 < \alpha < k$, то

$$C_n^{(k)}(S) - s = O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right) \Leftrightarrow C_n^{(k)}(T) = O\left(\frac{\log^\beta n}{n^\alpha}\right).$$

2. Если $-1 < \alpha < 1$, то

$$H_n^{(k)}(S) - s = O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right) \Leftrightarrow \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) = O\left(\frac{\log^{\beta-k+1} n}{n^\alpha}\right).$$

3. Если $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$, то

$$R_n^{(k,\lambda)}(S) - s = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \Leftrightarrow R_n^{(k,\lambda)}(T\lambda) = O(1).$$

4. Класс насыщения процесса $H^{(k)}$ — это множество функций f, у которых сопряженная функция $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}\,1$; приближение насыщения порядка $n^{-1}\log^{k-1} n$.

5. Если $\{\lambda_n\}$ есть (сверх вышесказанного) выпуклая последовательность, то класс насыщения процесса $R^{(k,\lambda)}$ — это множество функций f таких, что $\lambda_n a_n$ и $\lambda_n b_n$ суть коэффициенты Фурье почти всюду ограниченной функции; приближение насыщения порядка $1/\lambda_n$. А. Х. Турецкий

2514. **О локальном свойстве абсолютной суммируемости $|C,\alpha|$ для рядов Фурье. Киёхара** (On the local property of the absolute summability $|C,\alpha|$ for Fourier series. Kiyohara Mineo), J. Math. Soc. Japan, 1958, 10, № 1, 55—63 (англ.)

Доказана теорема (которая является обобщением теоремы Винера об абсолютной сходимости рядов Фурье):

Пусть функция $f(x)$ суммируема по Лебегу на интервале $(-\pi,\pi)$ и периодична с периодом 2π. Если для каждой точки y сегмента $[-\pi,\pi]$ найдутся функция $g_y(x)$ и число $\delta>0$ такие, что 1) $g_y(x)=f(x)$ для $|x-y|<\delta$ и 2) ряд Фурье для функции $g_y(x)$ абсолютно суммируем $|C,\alpha|$, то ряд Фурье для функции $f(x)$ также абсолютно суммируем $|C,\alpha|$ при $\alpha\geqslant 0$.

Для случая $\alpha=1$ теорема была ранее доказана Рандельсом. Для $\alpha\geqslant 0$ теорема была доказана референтом при дополнительном условии абсолютной суммируемости $|C,\alpha|$ сопряженного ряда Фурье для функции $g_y(x)$.

Автор снял это последнее дополнительное предположение, заметив при этом, что для $\alpha>1$ теорема немедленно следует из теоремы локализации Бозанке. В. А. Магарик

2515. **О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами. Стечкин С. Б.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, 20, № 5, 643—648

Вводятся в рассмотрение при каждом фиксированном $r>0$ и произвольном $\alpha\in(-\infty,\infty)$ классы $W^{(r)}(\alpha)$ и $W_1^{(r)}(\alpha)$ периодических непрерывных (соответственно суммируемых) функций $f(x)$, допускающих представление

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_r(x-t,\alpha)\,\varphi(t)\,dt,\qquad \text{где}\quad \Psi_r(x,\alpha)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kx-\frac{\alpha\pi}{2}\right),\quad \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0,\ \|\varphi\|_M=$$

$$=\sup \operatorname{ess}_t|\varphi(t)|\leqslant 1\ \text{(соответственно } \|\varphi\|_L=\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|\,dt\leqslant 1),$$

и решается задача отыскания точных верхних граней наилучших приближений на каждом из таких классов. Согласно результатам Фавара, Надя и С. М. Никольского, для того чтобы сформулированная задача имела полное решение, достаточно, например, чтобы для ядра $\Psi_r(t,\alpha)$ при каждом натуральном n нашелся тригонометрический полином $T_{n-1}(t,\Psi_r)$ такой, чтобы для всех $t\in[0,2\pi]$ при некотором $\tau=\text{const}$ выполнялось условие $\operatorname{sgn}\{\Psi_r(t,\alpha)-T_{n-1}(t,\Psi_r)\}=\operatorname{sgn}\sin(nt+\tau)$. Доказательство того факта, что ядра $\Psi_r(t,\alpha)$ обладают таким свойством для случаев $\alpha=0$, $\alpha=1$ и $\alpha=r<1$, получено Надем (Nagy B., Ber. math.-phys. Kl. Akad. Wiss. Leipzig., 1938, 90, 103—134) и референтом (РЖМат, 1953, 662).

Пользуясь этим обстоятельством, автор доказывает, что ядра $\Psi_r(t,\alpha)$ обладают указанным свойством также в случае $0<r<1$ и $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$.

Затем, пользуясь результатами С. М. Никольского (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, 10, 207—256), автор немедленно получает, что при $0<r<1$ и $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$

$$\sup_{f\in W^{(r)}(\alpha)}E_n(f)_C=\sup_{f\in W_1^{(r)}(\alpha)}E_n(f)_L=\frac{4}{\pi}K_r\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-r},$$

$$K_r=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^{r+1}}$$ и др. В качестве следствия найдено, что на классах функций $\widetilde{f}$, тригонометрически сопряженных с функциями f, имеющими ограниченную (числом 1) r-ю производную при $0<r\leqslant 1/2$, точная верхняя грань наилучших приближений в метриках M и L равна

$$\frac{4}{\pi}K_r\cos\frac{r\pi}{2}\cdot n^{-r}.$$ В. К. Дзядык

2516. **О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. Ефимов А. В.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 5, 930—933

Краткое изложение результатов работы автора (реф. 2518).

2517. **О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. Ефимов А. В.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 228—231

Тезисы сообщения о результатах работы автора (реф. 2518).

2518. **О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и Фейера. Ефимов А. В.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 1, 81—116

Пусть $f(x)$ — непрерывная периода 2π функция,

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— частная сумма её ряда Фурье и

$$\sigma_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n+1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— соответствующая сумма Фейера.

Устанавливается, что

$$f(x)-\sigma_{n-1}(f,x)=-\frac{1}{2\pi}\int_1^{\infty}\frac{f(x+\frac{2t}{n})-2f(x)+f(x-\frac{2t}{n})}{t^2}\,dt+$$

$$+O\left[\omega_2\left(f,\tfrac{1}{n}\right)\right],\qquad (1)$$

где

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\sup_x|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|.$$

Если $\widetilde{f}(x)$ — функция, тригонометрически сопряженная к $f(x)$ и $\omega_2(f,\delta)\leqslant\delta$, то равномерно по всем таким функциям

$$\widetilde{f}(x)-\widetilde{\sigma}_{n-1}(f,x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{a_1}\left[f(x+\frac{t}{n})-f(x-\frac{t}{n})\right]\frac{\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где a_1 — наименьший положительный корень уравнения $\int_0^x t^{-1}\sin t\,dt=\pi/2$. Специально рассматриваются классы $MW_\beta^rH_2^\alpha$ периодических периода 2π функций $f(x)$, представимых в форме

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,\qquad (2)$$

где $r>0$, $\beta>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, $\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=0$ и

$$\omega_2(\varphi,\delta)\leqslant M\delta^\alpha,\qquad (3)$$

а также классы MH_2^α периодических периода 2π функций, удовлетворяющих условию (3).

Устанавливается, что равномерно относительно всех функций $f(x)\in MW_\beta^rH_2^\alpha$ имеет место оценка

$$f(x)-S_n(f,x)=\frac{r_{n,\beta}(\varphi,x)}{(n+1)^r}+O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

где

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Получена также асимптотическая формула для $r_{n,\beta}(\varphi, x)$ на классе функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию (3).

Из этих оценок автор получает асимптотические формулы

$$\sup_{\varphi \in MH_2^\alpha} \left| r_{n,\beta}(\varphi, x) \right| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{\ln \ln n}{n^\alpha}\right),$$

$$\sup_{f \in MW_\beta^r H_2^\alpha} \left| f(x) - S_n(f, x) \right| = \frac{C_2(\alpha)}{\pi} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} + O\left(\frac{\ln \ln n}{n^{r+\alpha}}\right),$$

где $C_2(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in MH_2^\alpha} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx \right|$.

Отметим также формулу

$$\sup_{f \in MH_2^1} \left| \tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n(f, x) \right| = \frac{M}{2 \ln (\sqrt{2}+1)} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Оценка (1) обобщает один результат Заманского (Zamansky M., Ann. scient. École norm. super., 1949, **66**, 19—93), рассматривавшего случай, когда $\omega_2(f, \delta) = O(\delta)$.

Асимптотическую оценку для верхних граней уклонений от частных сумм ряда Фурье на классах функций, допускающих представление (2), где $\beta = r$ и $|\varphi(x)| \leqslant M$, в случае, когда r является целым, получил А. Н. Колмогоров (Ann. Math., 1935, **36**, 521—526), а для остальных значений $r > 0$ В. Т. Пинкевич (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, **4**, 521—528).

Для любых $r > 0$ при $\beta = r$ и $\beta = r + 1$ асимптотические оценки верхних граней этих уклонений с более точным остаточным членом в случае, когда $|\varphi(x) - \varphi(x + \delta)| \leqslant M \delta^\alpha$, получил С. М. Никольский (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1945, **15**). А. Ф. Тиман

2519. Исправления. Бугров Я. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 234

К РЖМат, 1959 260.

2520. О некоторых свойствах функций класса L_p. Геронимус Я. Л., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 24—32

Для $f(\theta) \in L_p$ $(p > 1)$ обозначим:

$$\| f \|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta \right\}^{1/p} < \infty, \quad \omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| < \delta} \| f(\theta + h) - f(\theta) \|_p.$$

Основная теорема: Если $f(\theta) \in L_p$, $p > 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/p'} \, \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

то функция $f(\theta)$ эквивалентна вещественной части граничных значений $\varphi(e^{i\theta})$ некоторой аналитической функции $\varphi(z)$, регулярной в области $|z| < 1$ и непрерывной в замкнутой области $|z| \leqslant 1$, причем при $|z| \leqslant 1$ функция $\varphi(z)$ допускает приближение посредством некоторой системы многочленов $\{R_n(z)\}$ со следующей оценкой погрешности:

$$|\varphi(z) - R_n(z)| \leqslant C \sum_{k=\left[\frac{n}{4}\right]}^{\infty} k^{-1/p'} \, \omega_p\left(\frac{1}{k}, f\right).$$

Имеются также теоремы, устанавливающие зависимость между $\| f(r, \theta) \|_p$ ($f(r, \theta)$ — гармоническая функция с граничными значениями $f(\theta)$) и $\omega_p(\delta, F)$, где $F(\theta)$ — первообразная для $f(\theta)$. О. В. Бесов

2521. Обобщение неравенства Сивина о производной дробного порядка тригонометрического полинома на случай пространства L_p. Огиевецкий (Узагальнення нерівності Сайвіна про похідну дробового порядку тригонометричного многочлена на випадок простору L_p. Огієвецький І. І.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 5, 486—488 (укр.; рез русск., англ.)

Получена оценка нормы в L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ дробной производной порядка $\alpha > 0$ тригонометрического полинома через норму самого полинома

$$\left\| T_n^\alpha \right\|_p \leqslant C(\alpha) \, n^\alpha \left\| T_n \right\|_p.$$

Доказательство проводится методом свертки и базируется на имеющейся аналогичной оценке Сивина в равномерной метрике. О. В. Бесов

2522. Обобщение неравенства Сивина о производной дробного порядка тригонометрического полинома на случай пространства L_p. Огиевецкий (Generalization of the inequality of P. Civin for the fractional derivative of a trigonometrical polynomial to L_p space. Ogiewetzki I. I.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 1-2, 133—135 (англ.; рез. русск.)

Перевод заметки автора (реф. 2521).

2523. Одна экстремальная задача для многочленов. Стечкин С. Б., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, **20**, № 6, 765—774

Пусть $D = \{d_n\}$ — произвольная последовательность неотрицательных чисел и

$$M_n^{(p)}[D] = \sup_{\|p_n(z)\| \leqslant 1} \sum_{k=0}^{n} d_k^{2-p} |c_k|^p, \quad \text{где}$$

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad \|p_n(z)\| = \max_{|z| \leqslant 1} |p_n(z)|, \quad 0 < p < 2.$$

Теорема 1. Существуют абсолютные положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \left\{ \sum_0^n d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}} \leqslant M_n^{(p)}[D] \leqslant C_2 \left\{ \sum_0^n d_k^2 \right\}^{1-\frac{p}{2}}.$$

Теорема 2. Если $\sum_0^\infty d_k^2 = \infty$, то найдется функция

$F(z) = \sum_0^\infty c_k z^k$, регулярная в круге $|z| < 1$ и непрерывная при $|z| \leqslant 1$, для которой

$$\sum_0^\infty d_k^{2-p} |c_k|^p = \infty.$$

Результаты теорем 1 и 2 распространяются соответственно на тригонометрические полиномы и на периодические функции.

Частные случаи этих теорем, когда $p = 1$ и $d_n \equiv 1$ или же $d_n \downarrow$, удовлетворяя еще некоторым условиям правильности убывания, были ранее изучены Харди и Литлвудом, Салемом, автором и др. В. К. Дзядык

2524. О коэффициентах Фурье непрерывных функций. Стечкин С. Б., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, **21**, № 1, 93—116

Рассматриваются непрерывные периодические функции вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n), \qquad (1)$$

а также аналитические в круге $|z| < 1$ и непрерывные в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ функции

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \qquad (2)$$

Карлеман показал (Carleman T., Acta math., 1918, **41**, 377—384), что для любого $\varepsilon > 0$ существуют непрерывные функции $f(x)$ вида (1), для которых $\sum_1^\infty \rho_n^{2-\varepsilon} = \infty$.

Эти исследования были продолжены многими авторами.

Обобщая задачу, автор исследует вопрос, при каких ограничениях на функции некоторой последовательности $\{\Phi_n(u)\}$ найдется функция вида (1) или (2) такая, что $\sum_1^\infty \Phi_n(\rho_n) = \infty$ или соответственно $\sum_1^\infty \Phi_n(|c_n|) = \infty$.

Доказывается, что если функции $\Phi_n(u)$ ведут себя достаточно правильно, то искомая функция существует в том и только в том случае, если найдется числовая последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям

$$r_n \geqslant 0, \quad \sum_1^\infty r_n^2 < \infty, \quad \sum_1^\infty \Phi_n(r_n) = \infty. \qquad (3)$$

Основные результаты работы:

Теорема 1. Пусть каждая из функций последовательности $\{\Phi_n(u)\}$ при $u \to \infty$, $u \geqslant 0$ удовлетворяет условиям

$$\Phi_n(u) \geqslant 0, \ \Phi_n(u) \uparrow, \ u^{-2}\Phi_n(u) \downarrow \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Для того чтобы существовала последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям (3), необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\Phi_n(u)\}$ удовлетворяла следующему условию (A): для любого $\xi > 0$ расходится ряд $\sum_1^\infty u_n^2(\xi)$, где $u_n(\xi)$ есть наибольший корень уравнения $\Phi_n[u_n(\xi)] = \xi u_n^2(\xi)$.

Теорема 5 (основная). Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и система функций $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяет следующим условиям: существует число p $(0 < p < 2)$ такое, что для каждого k либо

$$\Phi_k(u) \geqslant 0 \ (u \geqslant 0), \ \Phi_k(u) \uparrow, \ u^{-p}\Phi_k(u) \downarrow,$$

либо

$$\Phi_k(u) \geqslant 0 \ (u \geqslant 0), \ u^{-p}\Phi_k(u) \uparrow,$$

$$u^{-2}\Phi_k(u) \downarrow, \ u^{-2}\Phi_k(u) \to \infty \quad \text{при } u \to 0.$$

Для того чтобы существовала функция вида (2), для которой $\sum_{k=1}^\infty \Phi_k(|c_{n_k}|) = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{\Phi_k(u)\}$ удовлетворяла условию (A).

Пользуясь приведенными результатами, автор получает в виде частных случаев теорему Гронвалля (Gronwall T. H., Bull. Amer. Math Soc., 1921, **27**, 320—321), теорему Пейли — Сидона (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, §9, 604), теорему Пейли (Paley R. E. A. C., J. London Math. Soc., 1932, **7**, 122—130), теорему Банаха (Banach S., Studia math., 1930, **2**, 207—220, 251) и др., а также ряд теорем вида.

Теорема 6. Пусть $0 < \varepsilon_k < 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Для того чтобы существовала функция вида (2), для которой $\sum_{k=1}^\infty |c_{n_k}|^{2-\varepsilon_k} = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\eta > 0$ расходился ряд $\sum_{k=1}^\infty \eta^{1/\varepsilon_k}$.

В. К. Дзядык

2525. **Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов. Ибрагимов И. И.**, АзэрбССР Элмляр Акад. хябярляри. Физ.-техн. вя кимя элмляри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и хим. н., 1958, № 2, 3—17 (рез. азерб.)

Рассматривается функционал

$$I_k(T_{n_1,\ldots,n_k}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} T_{n_1,\ldots,n_k}(t_1 \ldots t_k) K(t_1,\ldots,t_k)\, dt_1 \ldots dt_k.$$

Основная теорема: Если $T_{n_1,\ldots,n_k}(x_1,\ldots,x_k)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $(n_1,\ldots,n_k)$ и $K(x_1,\ldots,x_k)$ — интегрируемая функция внутри k-мерного куба $\{0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, \ 1 \leqslant j \leqslant k\}$ с коэффициентами Фурье $b_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ $(\nu_j = 0, \pm 1, \ldots; \ 1 \leqslant j \leqslant k)$, то для функционала $I_k(T_{n_1,\ldots,n_k})$ имеет место неравенство

$$|I_k(T_{n_1,\ldots,n_k})| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-k/p} \| T_{n_1,\ldots,n_k} \|_p \left(\sum_{-n_1}^{n_1} \ldots \sum_{-n_k}^{n_k} \left|b_{\nu_1,\ldots,\nu_k}\right|^p\right)^{1/p}$$

при любом p, удовлетворяющем условию $1 \leqslant p \leqslant 2$. Ряд приведенных следствий касается оценок норм полиномов.

О. В. Бесов

2526. **Обобщение неравенств В. А. Маркова. Виденский В. С.**, Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 447—449

Пусть $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени $\leqslant n$ и пусть

$$|P_n(x)| \leqslant |\alpha x + i\sqrt{1 - x^2}| \quad (0 < \alpha, x \in [-1,1]).$$

Для указанного класса алгебраических многочленов автор получает точную верхнюю грань производных $P_n^{(k)}(x)$ на отрезке $[-1,1]$:

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant M_n^{(k)}(1) \ (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где

$$M_n(x) = \frac{\alpha + 1}{2} T_n(x) +$$

$$+ \frac{\alpha - 1}{2} T_{n-2}(x), \ T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Равенство в (1) достигается только для многочленов $P_n(x) = \gamma M_n(x)$, где $|\gamma| = 1$.

Полученный результат обобщает неравенство В. А. Маркова ($\alpha = 1$) и некоторые, ранее полученные, результаты автора.

Г. К. Лебедь

2527. **Неравенства для многочленов и их производных. Лебедь Г. К.**, Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 4, 570—572

Пусть $T_n(\theta)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n $(n = 0, 1, \ldots)$. Формулируются без доказательства следующие предложения.

1) Существует абсолютная константа A, обладающая следующим свойством: если $|T_n(\theta)| \leqslant t_n(\theta)$ и $\omega_0(h)$, $\omega_1(h)$ — модули непрерывности соответственно $t_n(\theta)$ и $t_n'(\theta)$, то

$$|T_n^{(k)}(\theta)| \leqslant (An)^k \left[t_n(\theta) + \kappa \frac{\omega_r(1/n)}{n^r}\right] (r = 0, 1;$$

$$n, k = 0, 1, \ldots).$$

(В статье это неравенство приведено с опечаткой: вместо n^r напечатано n^2. *Реф.*). При этом отмечается, что это неравенство, вообще говоря, неверно при $r > 1$.

2) Если $|T_n(\theta)| \leqslant \omega\left(\frac{|\sin\theta|}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)=\omega_1(\theta)$ $(0\leqslant\alpha)$, то $|T_n^{(k)}(\theta)| \leqslant (An)^k\omega_1(\theta)$, где $\omega(\theta)$ удовлетворяет условию A_α^β:

$$0<\omega(t_1)<c\,\omega(t_2),\ \frac{\omega(t_2)}{t_2^\beta}<c\,\frac{\omega(t_1)}{t_1^\beta}$$

$\left(0<t_1<t_2<\frac{2}{n^\alpha};\ 0\leqslant\alpha,\beta\right)$ и A — константа, зависящая от c.

3) Пусть далее $P_n(x)=\sum_0^n c_k x^k$, где c_k — постоянные, и $\|f\|_{L_p(a,b)}=\left(\int_a^b|f|^p\,dx\right)^{1/p}$.

Имеет место неравенство

$$\left\|\frac{P_n(x)\,\delta^{r-1/p'}(x,n)}{\omega[\delta(x,n)/n]}\right\|_{L_{p'}(a,b)}\leqslant A\left(\frac{2n}{b-a}\right)^{1/p-1/p'}\times$$

$$\times\left\|\frac{P_n(x)\,\delta^{r-1/p}(x,n)}{\omega[\delta(x,n)/n]}\right\|_{L_p(a,b)},$$

где $\delta(u,v)=\frac{2\sqrt{(b-u)(u-a)}}{b-a}+\frac{1}{v}$, $1\leqslant p\leqslant p'\leqslant\infty$, r — произвольное действительное число, A — константа, зависящая только от r, и $\omega(t)$ удовлетворяет условию A_α^β при $\alpha=1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$.

Это неравенство является аналогом соответствующего неравенства референта для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 244).

В частном случае $\omega(t)=1$, $r=1/p$, $p'=\infty$ оно является усилением соответствующего неравенства Джексона.

4) Наконец, утверждается справедливость неравенства

$$\left\|\frac{P_n^{(k)}\,\delta^{k+r}(x,n)}{\omega[\delta(x,n)/n]}\right\|_{L_p(a,b)}<\left(A\,\frac{2n}{b-a}\right)^k\times$$

$$\times\left\|\frac{P_n(x)\,\delta^r(x,n)}{\omega[\delta(x,n)/n]}\right\|_{L_p[a,b)},$$

где $A=A(r)$, $n,k=1,2,\ldots$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Оно содержит в себе (при $k=1$, $\omega(t)\equiv1$, $r=-\rho$, $p=\infty$) уже известное в литературе неравенство В. К. Дзядыка (РЖМат, 1957, 6969) и является при $\omega(t)\equiv1$, $r=0$ усилением соответствующего неравенства Н. К. Бари.

С. М. Никольский

2528. Некоторые вопросы приближения функций одной переменной алгебраическими многочленами. Лебедь Г. К., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 2, 239—242

Пользуясь неравенствами, сформулированными в предыдущей заметке (реф. 2527), автор формулирует ряд прямых и обратных теорем теории приближения непериодических функций алгебраическими многочленами в метрике $L_p(-1,1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Приведем только одну прямую и обратную теорему.

По определению, функция $f(x)$, заданная на отрезке $(-1,1)$, называется принадлежащей к классу $\overline{H}_p^{(r)}(M)$, если она вместе со своими производными до порядка $\bar r$ включительно ($r=\bar r+\alpha$, $\bar r$ — целое, $0<\alpha\leqslant1$) принадлежит к $L_p(-1,1)$ и при $\alpha<1$ выполняется неравенство

$$\left\|\frac{f^{(\bar r)}\left(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2}\right)-f^{(\bar r)}(x)}{|h|\sqrt{1-x^2}\,g(x,n)}\right\|_{L_p(-1,1)}\leqslant M,$$

а при $\alpha=1$ неравенство

$$\left\|\frac{\dfrac{f^{(\bar r)}\left(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2}\right)+}{g(x,n)}}{\dfrac{+f^{(\bar r)}\left(x\sqrt{1-h^2}+h\sqrt{1-x^2}\right)-2f^{(\bar r)}(x)}{g(x,n)}}\right\|_{L_p(-1,1)}\leqslant M,$$

где $0<h<1$ и $g(x,t)=t^{-1}\sqrt{1-x^2}+t^{-2}$.

Если $f\in\overline{H}_p^{(r)}(M)$, то существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ такая, что

$$\left\|\frac{f-P_n}{g^r(x,n)}\right\|_{L_p(-1,1)}\leqslant cM\ (n=1,2,\ldots),\qquad(1)$$

где c — константа, не зависящая от n.

Наоборот, если для функции $f\in L_p(-1,1)$ существует последовательность многочленов P_n такая, что выполняется (1), и если $\alpha-1/p>0$, то $f\in\overline{H}_p^{(r)}(c'M)$.

Некоторые теоремы о приближении относятся также к функциям, принадлежащим к классам $H_p^{(r)}(-1,1)$ (РЖМат, 1953, 148). Устанавливается связь между классами $H_p^{(r)}(-1,1)$ и $\overline{H}_p^{(r)}(-1,1)$ и доказывается несколько теорем, подобных некоторым частным теоремам вложения, имеющим место в случае функций классов $H_p^{(r)}(-\infty,\infty)$, определенных на всей действительной оси (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 244—278).

Формулируется утверждение несколько более общее, чем соответствующая теорема, доказанная В. К. Дзядыком (РЖМат, 1957, 6969). Автор отмечает, что оно им получено независимо от В. К. Дзядыка. Один сформулированный в статье результат пересекается с соответствующим результатом М. К. Потапова (РЖМат, 1957, 4696).

С. М. Никольский

2529. Замечание к одной теореме С. М. Никольского. Тиман А. Ф., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 225—227

Обобщая (только в отношении порядка) один результат С. М. Никольского (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, **10**, 295—318), автор доказывает, что если функция $f(x)$, заданная на $[-1,1]$, является квазигладкой, т. е. она непрерывна и выполняется неравенство

$$|f(x_1)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f(x_2)|\leqslant M|x_2-x_1|,\ x_1,x_2\in[-1,1],$$

то существует константа C, не зависящая от x и n, такая, что для любого $n=1,2,\ldots$ найдется обыкновенный многочлен степени не выше чем n, удовлетворяющий для каждого $x\in[-1,1]$ неравенству

$$|f(x)-P_n(f;\ x)|\leqslant C\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{\ln n}{n^2}\right).\qquad(1)$$

Примечание референта. 1) Автор не отмечает, что в 1956 г. референтом была доказана одна теорема (РЖМат, 1957, 6969, стр. 640), в связи с которой возник вопрос о построении для квазигладких функций таких многочленов $P_n(f;x)$, чтобы

$$|f(x)-P_n(f;\ x)|\leqslant C\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\quad x\in[-1,1],$$
$$n=1,2,\ldots\qquad(2)$$

2) Процесс приближения, примененный в реферируемой работе, не является наилучшим в смысле порядка, ибо

как доказано референтом (реф. 2530), действительно существуют процессы приближения, при применении которых к квазигладким функциям получим многочлены $P_n(f; x)$, удовлетворяющие условию (2), причем в отношении порядка этот результат уже улучшить нельзя.
В. К. Дзядык

2530. О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси. Дзядык В. К., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 3, 337—354

Рассматривается класс $H^{(r+1)}[K; a, b]$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству

$$\omega_2^{(r)}(h) \leqslant Kh \quad (h > 0), \tag{1}$$

где

$$\omega_2^{(r)}(h) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant h} \left| f^{(r)}(x_1) - 2f^{(r)}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f^{(r)}(x_2) \right|, \tag{2}$$

$$x_1,\ x_2 \in [a, b],$$

и доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Существует константа C, зависящая только от K, r и $b - a$, такая, что для всякой функции $f \in H^{(r+1)}[K; a, b]$ можно построить последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени не выше n так, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{C}{n^{r+1}}\left(\sqrt{(b-x)(x-a)} + \frac{1}{n}\right)^{r+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Эта теорема, таким образом, полностью обращает прежний результат автора (РЖМат, 1957, 6969), где доказано, в частности, что из того, что для функции f выполняется (3) для некоторой последовательности многочленов $P_n(x)$, следует, что $f \in H^{(r+1)}[a, b]$.

Автор получает также аналогичные результаты для функций, имеющих на $[a, b]$ гладкую производную $f^{(r)}(x)$, т. е. такую, что для нее имеет место (1), где в правой части надо заменить h на $o(h)$ $(h \to 0)$.

Для доказательства теоремы автор вводит многочлены

$$D_{nk}(x) = \frac{1}{\gamma_{nk}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n \arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}\right)^{2k}$$

где число γ_{nk} таково, что $\int_{-1}^{1} D_{nk}(x)\,dx = 1$. В случае $r = 0$, $a = -1$, $b = 1$, указанный в теореме многочлен $P_n(x)$ определяется равенством

$$P_n(x) = (1 - x)P_f(x) + xP_g(1 - x),$$

где

$$P_f = 2P_2 - P_1,\quad P_1(x^2) = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} f(u^2)\left[D_n{}'{}_k\left(\frac{u+x}{3}\right) + D_n{}'{}_k\left(\frac{u-x}{3}\right)\right]du,$$

$$P_2(x^2) = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_{-2}^{2} f(u^2)\left[D_n{}'{}_k\left(\frac{u+x}{3}\sqrt{2}\right) + D_n{}'{}_k\left(\frac{u-x}{3}\sqrt{2}\right)\right]du,$$

$k(n' - 1) + 1 \sim n$ $(n \to \infty)$, $g(x) = f(1 - x)$.

Применяя ядра $D_{nk}(x)$, автор дает другое доказательство теоремы, впервые доказанной А. Ф. Тиманом (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 1, 17—20); формулировка ее приведена в РЖМат, 1957, 6969. Однако автор в примечании при корректуре отмечает, что на самом деле рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве сформулированной выше теоремы 1, можно получить следующую, усиливающую результат А. Ф. Тимана, теорему:

Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, имеет там r-ю $(r$ — целое $\geqslant 0)$ непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, то для нее при любом $n = 1,2, \ldots$ можно построить алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что при $x \in [a, b]$ имеет место

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{(b-x)(x-a)} + \frac{1}{n}\right)^r \times \left[\omega_2^{(r)}\left(\sqrt{(b-x)(x-a)}\right) + \omega_2^{(r)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

где $\omega_2^{(r)}(h)$ определяется равенством (2) и константа C зависит только от r и $[a, b]$.

В конце работы дается новое доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации функций, основанное на применении ядер $D_{nk}(x)$.
С. М. Никольский

2531. Аппроксимация полиномами функций с ограниченными разностями. Беркилл (Polynomial approximations to functions with bounded differences. Burkill J. C.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 157—161 (англ.)

Доказывается (теорема 1), что для любой функции ξ, непрерывной в сегменте I, существует полином $p_{n-1}(x)$ степени $\leqslant n - 1$ такой, что для всех $x \in I$

$$|f(x) - p_{n-1}(x)| \leqslant \sup \sum_{i=0}^{n} \frac{f(h_i)}{\varphi'(h_i)}\left(\sum_{i=0}^{n} |\varphi'(h_i)|^{-1}\right), \tag{1}$$

где $\varphi(u) = (u - h_0)(u - h_1)\ldots(u - h_n)$. Верхняя грань в (1) берется по всем h_i из I таким, что $h_0 > h_1 > \ldots > h_n$.

Теорема 2 реферируемой работы не является новой (Ремез Е. Я., Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Киев, 1957, 39).
S. Paszkowski

2532. Обратные теоремы конструктивной теории функций многих переменных. Тиман М. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1207—1209

Рассматриваются пространства C и L_p 2π-периодических по каждому аргументу функций $f(x_1, \ldots, x_k)$. Доказывается, что имеет место соотношение

$$\left\|\Delta_{h_1}^{r_1}\ldots\Delta_{h_k}^{r_k} f(x_1, \ldots, x_k)\right\| = O\left\{n_1^{-r_1}\ldots n_k^{-r_k}\sum_{i_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{i_k=1}^{n_k} i_1^{r_1-1}\ldots i_k^{r_k-1}E_{i_1-1,\ldots,i_k-1}\right\}$$

при $h_\nu = O\left(\frac{1}{n_\nu}\right)$ $(\nu = 1,\ldots,k)$, где $E_{i_1,\ldots,i_k} = \inf_T \|f(x_1,\ldots,x_k) - T_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)\|$.

Приводится следующая теорема: Если для непрерывной функции $f(x_1,\ldots,x_m)$ сходится ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{r_1-1}E_{n_1,\ldots,n_k,\infty}(f) \quad (k \leqslant m),$$

где $n_i = \left[n_1^{\sigma_i}\right]$ $(0 < \sigma_i \leqslant 1;\ i = 2,3,\ldots,k)$, $E_{n_1,\ldots,n_k,\infty}(f)$—

частное наилучшее равномерное приближение функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ с помощью тригонометрических многочленов порядка $\leqslant n_j$ по переменным x_j $(j = 1,2,\ldots,k)$ с коэффициентами, являющимися непрерывными функциями от переменных $(x_{k+1}, \ldots, x_m)$, то у функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ существует непрерывная смешанная производная

$$\frac{\partial^p f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_k^{p_k}}, \text{ где } p_1 + \ldots + p_k = p,\ p_1 + \sum_{j=2}^{k} \sigma_j p_j = r.$$

О. В. Бесов

2533. Алгорифм для построения чебышевского приближения непрерывной функции полиномом. Зуховицкий С. И., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 4, 693—696

На компакте Q заданы действительные непрерывные функции $f(q), \varphi_1(q), \ldots, \varphi_n(q)$; функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы. Наилучшим полиномом для функции f на Q называется функция $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(q)$, минимизирующая величину

$$\max_{q \in Q} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(q) - f(q) \right|.$$

В реферируемой статье подробно описан алгорифм, приводящий после конечного числа его исполнений к наилучшему полиному для функции f на компакте $Q^* \subset Q$, который получается из Q путем удаления из него внутренности конечного числа сфер фиксированного радиуса η, за исключением их центров. Если такой итерационный процесс повторять, уменьшая (в пределе к нулю) число η и исходя при $(m+1)$-м повторении от полинома, полученного при m-м повторении, то построенная последовательность полиномов, наилучших на подкомпактах Q, сходится к наилучшему полиному на всем компакте Q.

Алгорифм основан на идее изменения коэффициентов приближающего полинома в направлении, в котором наиболее резко уменьшается ошибка приближения.

Примечание референта. В статье два раза цитируется работа, номера которой нет в списке литературы.

S. Paszkowski

2534. К теории приближения функций линейными комбинациями собственных функций задачи Штурма—Лиувилля. Натансон Г. И., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 2, 263—266

Пусть $E_n^{SL}(f)$ — наилучшее приближение в метрике C функции $f(x)$, непрерывной на $[0, \pi]$, с помощью линейных агрегатов $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x)$, где $U_k(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$U''(x) + [\lambda - B(x)]\, U(x) = 0,$$
$$U'(0) - hU(0) = 0,\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0. \qquad (1)$$

Для таких наилучших приближений устанавливаются оценки, аналогичные оценкам Джексона из теории наилучшего приближения тригонометрическими полиномами.

Теорема 2. Пусть функция $B(x)$ имеет $r-1$ производных ограниченной вариации (в случае $r = 1$ дополнительно предполагается непрерывность $B(x)$). Если $f(x)$ задана на $[0, \pi]$, имеет на этом отрезке r непрерывных производных и функции $L^{[i]}f$ $\left(i = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]\right)$, где $L^{[0]}f = f(x)$, $L^{[1]}f = f''(x) - B(x)f(x)$, $L^{[i]}f = L^{[1]}(L^{[i-1]}f)$, удовлетворяют граничным условиям (1), то

$$E_n^{SL}(f) = O(n^{-r}) \left[\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{r} \left\| f^{(m)} \right\| \right].$$

Теоремы 3 и 4 реферируемой работы являются аналогами теорем С. М. Лозинского (Докл. АН СССР, 1952, **83**, 645—647). Приведем для примера формулировку теоремы 3: Пусть $\omega(\delta)$—функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) $\omega(\delta)$ непрерывна при $0 \leqslant \delta < \infty$, б) $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \to +0$, в) существует такое $K > 1$, что $\overline{\lim_{\delta \to +0}} \frac{\omega(K\delta)}{\omega(\delta)} < K$. Тогда, если $E_n^{SL}(f) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ и $B(x)$ непрерывна на $[0,\pi]$, то $\omega(f, \delta) = O(\omega(\delta))$.

Теорема 5 является аналогом теоремы Зигмунда (Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М. — Л., 1949, 142—145).

Последняя теорема работы (теорема 6) посвящена интерполяционным полиномам $L_n^{SL}[f; x]$ (ее формулировку см. в реф. 2535). Доказательства в работе не приводятся.

Н. П. Купцов

2535. Об одном интерполяционном процессе. Натансон Г. И., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 213—219

Пусть $U_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (1) (см. реф. 2534) и пусть $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)}$ — нули $U_n(x)$. Тогда справедлива теорема: Если $B(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[0, \pi]$, $f(x)$ непрерывна,

$$L_n^{SL}[f; x] = \sum \frac{U_n(x)}{\left(x - x_k^{(n)}\right) U_n'\left(x_k^{(n)}\right)} f\left(x_k^{(n)}\right),$$

то для любого $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, равномерно на $[a, \pi - a]$,

$$f(x) - L_n^{SL}[f; x] = O(\ln n) \left[\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \| f \| \right],$$

где $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$, $\| f \| = \max |f(x)|$ и оценка $O(\ln n)$ зависит только от $B(x)$, h, H и a.

Доказательство дается с помощью асимптотических оценок $U_n(x)$. Отмечается, что даже для многократно дифференцируемых и удовлетворяющих граничным условиям задачи Штурма — Лиувилля функций $f(x)$ нельзя доказать равномерную сходимость $L_n^{SL}[f; x]$ к $f(x)$ на всем отрезке $[0, \pi]$.

Б. М. Гагаев

2536. Несколько замечаний о лагранжевой интерполяции с равноотстоящими узлами. Фрей (Einige Bemerkungen über aequidistante Lagrangesche Interpolation. Frey T.), Period. polytechn. Engng, 1957, **1**, № 3, 237—251 (нем.)

Доказывается, что для последовательности интерполяционных полиномов Лагранжа с равноотстоящими узлами имеет место следующая теорема „локализации", относящаяся, однако, не к точке (т. е. не в смысле Римана), а к интервалу, середина которого совпадает с центром интервала интерполирования.

Теорема 2. 1. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на $[-1, 1]$, а функция $g(x) \in C[-1, 1]$ такова, что для $x \in [\alpha, \beta]$ из $[-1, 1]$

$$|g(x) - L_n^{(a)}(x; g)| \leqslant \varepsilon_n(x) \rightrightarrows 0,\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

где $L_n^{(\ddot{a})}(x; g)$ означает интерполяционный полином Лагранжа с равноотстоящими узлами для функции $g(x)$; при этом $f(x) \equiv g(x)$, когда $x \in [-a, a]$. Пусть далее $F = \sup |f(x)|$, $G = \sup |g(x)|$ на $[-1, 1]$ и, когда $[\alpha, \beta] \subset [-a, a]$,

$$\delta = \min(\alpha + a,\ a - \beta),\quad q = q(\delta; |x|) = \left(\frac{1-|x|}{1+|x|+\delta}\right)^{\delta/2}.$$

Тогда: а) если $[\alpha, \beta] \subset [-a, a]$, то при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ имеем

$$|f(x) - L_n^{(\ddot{a})}(x; f)| \leqslant \varepsilon_n(x) + (G+F)\,O\left(\frac{1}{n}\,q^n\right),$$

б) если $\alpha \leqslant -a$ и разность $f(x) - g(x)$ непрерывна в $x = -a$, то также имеем

$$|f(-a) - L_n^{(\ddot{a})}(-a; f)| = o(1)$$

(аналогично в $x = a$, если $\beta \geqslant a$),
в) если $f(x)$ удовлетворяет в точке $x=0$ условию Дини—Липшица, то

$$|f(0) - L_n^{(\ddot{a})}(0; f)| = o(1)$$

здесь $g(x)$ не принимается во внимание).

А. Х. Турецкий

2537. **Поправка. Берман Д. Л.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 233

К РЖМат, 1959, 267

2538 К. Квадратурные формулы. Никольский С. М. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 124 стр., илл., 3 р. 30 к.

Излагаются исследования автора по общетеоретическим вопросам теории квадратурных формул: нахождение точных оценок приближения при помощи квадратурных формул для различных классов функций, математическое обоснование характерных свойств квадратурных формул, зависящих от степени алгебраических многочленов, для которых квадратурная формула точна, решения экстремальных задач в теории квадратурных формул, ставящих своей целью нахождение для данного класса функций квадратурных формул, наилучших при известных условиях.

Книга, в частности, включает исследования автора по теории квадратурных формул, опубликованные ранее в журнальных статьях (Успехи матем. наук, 1950, **5**, № 2, 165—177; Изв. АН СССР. Сер. матем., 1952, **16**, 181—196).

В книге сочетаются оригинальность и новизна основного материала с ясностью и доступностью его изложения. Последнему обстоятельству способствуют дополнительные параграфы 1—3, 13, 15—17, посвященные простейшим квадратурным формулам, классам функций, формулам Тейлора и Эрмита, многочленам, наименее уклоняющимся от нуля, многочленам Лежандра и формуле Гаусса.

В § 4 дается точная оценка приближения при помощи квадратурных формул, точных для всех многочленов степени $r-1$, для функций классов $W^{(r)}(M; a, b)$ и $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$, т. е. имеющих на отрезке (a, b) производную $f^{(r)}(x)$, для которой $|f_{(x)}^{(r)}| \leqslant M$ или соответственно $\|f^{(r)}\|_{L_p(a,b)} \leqslant M$. При этом оценка приближения, даваемого квадратурной формулой

$$\int_a f dx \sim \sum_0^{m-1} p_k f(x_k) = L(f) \qquad (1)$$

для класса функций $\mathfrak{M}$, определяется как верхняя грань

$$E(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \int_a^b f dx - L(f) \right|. \qquad (2)$$

Показывается, что $EW^{(r)}(M; a, b) = Mc_r$ (аналогичная формула имеет место для класса $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$, только вместо c_r входит $c_r^{(q)}$); константа c_r зависит от r (и от весов и узлов квадратурной формулы).

В § 5 приводятся примеры вычисления c_r (и $c_r^{(q)}$) для формул прямоугольников, трапеций, формул Симпсона, Котеса и таблицы значений этих констант (вычисленные Ю. Я. Дорониным) для формул Чебышева и Гаусса (с 1, 2, 3 и 4 узлами).

В § 6 даются точные оценки приближения при помощи усложненных квадратурных формул, получаемых путем разбиения интервала интегрирования на n равных частей и применения на каждом частичном интервале квадратурной формулы, точной для всех многочленов степени $r-1$. Эти точные оценки даются для рассмотренных выше классов функций. Для класса $W^{(r)}(M; a, b)$ эта точная верхняя граница равна $(b-a)^{r+1} c_r M n^{-r}$, c_r — указанная выше константа. Указывается функция $f_*(x)$ (зависящая от n) из рассматриваемого класса, для которой эта граница достигается. Здесь же даются оценки сверху для классов $W^{(r)}H_\omega(a, b)$.

В § 7 доказывается, что какова бы ни была функция класса $W^{(r)}(M; a, b)$ (если она не многочлен степени $r-1$) порядок приближения, даваемого для ее интеграла указанной в § 6 квадратурной формулой, строго равен $O(n^{-r})$.

В § 8 автор показывает, что добавив к усложненной квадратурной формуле § 6 некоторое простое выражение, получим формулу, дающую для функции с непрерывной производной порядка $r+1$ приближение порядка $O(n^{-r-1})$. Результаты, полученные в § 6, переносятся в § 9 на многомерные квадратурные формулы.

В § 10 решается следующая экстремальная задача. Среди всех квадратурных формул вида (1) путем варьирования весов и узлов подобрать такую, для которой величина верхней грани (2), распространенной на все функции f заданного класса $\mathfrak{M}$, была наименьшей. Задача решена для классов функций $W^{(r)}(M; a, b)$ при $r = 1$ и $r = 2$.

В § 11 излагаются результаты Сарда (Meyers F., Sard A., J. Math. and Phys., 1950, **29**, 118—123; Sard A., Amer. J. Math., 1949, **71**, 80—91) о наилучшей квадратурной формуле, в которой заданы равноотстоящие узлы, а подвергаются варьированию только веса. В § 12 рассматриваются квадратурные формулы, в которые входят значения производных функции. § 14 посвящен решению общей экстремальной задачи, являющейся обобщением экстремальной задачи § 10, для квадратурных формул, в которые входят значения производных функции. Излагается решение этой задачи для классов $W^{(r)}(M; a, b)$ и $W_L^{(r)}(M; a, b)$ (для последнего класса задача решена А. И. Киселевым). Библ. 16 назв.

А. Х. Турецкий

2539 Д. О сходимости рядов Фурье по системам типа $\{\varphi(nx)\}$, близким к тригонометрической системе. Малявко К. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

См. также: 2785, 2801, 2802, 2827

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

2540. О коэффициентах обратных степенных рядов. Ламперти (On the coefficients of reciprocal power series. Lamperti John), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 2, 90—94 (англ.)

Автор называет формальный степенной ряд $F(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ обратным для формального степенного ряда $U(z) \equiv 1 + \sum_{n-1}^{\infty} u_n z^n$, если имеет место формальное равенство

$$U(z) = U(z) \cdot F(z) + 1$$

или, что то же,

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i f_{n-i} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (1)$$

Соотношения (1) допускают истолкование в терминах теории вероятностей. Работа посвящена выяснению условий, при которых последовательность $\{u_n\}$ определяет неотрицательную последовательность $\{f_n\}$.

Для этого, оказывается, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $P \equiv [p_{ij}]$ такая, что:

1) в каждой ее строке лишь конечное число ненулевых членов;

2) $p_{ij} \geqslant 0$ при любых i, j;

3) при любом n $u_n = p_{11}^{(n)}$, где $[p_{ij}^{(n)}] \equiv P^n$.

Отсюда выводятся некоторые следствия, в частности: 1) Для того чтобы все числа $\{f_n\}$ были неотрицательными, необходимо, чтобы при любых n и m $u_{n+m} \geqslant u_n \cdot u_m$.

2) Если для формальных степенных рядов $1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n$ и $1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n z^n$ существуют обратные ряды с неотрицательными коэффициентами, то этим же свойством обладает ряд $1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n$, где $w_n = u_n v_n$ для всех n или $w_n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u_i v_{n-i}$ для всех n (этот результат в работе обобщен).

3) Обратные ряды для $U(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{u_n}$ будут одновременно иметь лишь неотрицательные коэффициенты в том и только том случае, когда $U(z) \equiv \frac{1}{1 - az}$, где a — некоторое положительное число.

4) Если числа $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ все действительны, $u_0 \neq 0 \neq v_0$ и $W(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n z^n$ имеет нуль внутри своего круга сходимости, то хотя бы для одного $n \geqslant 1$ $u_n^2 > u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ или $v_n^2 > v_{n-1} \cdot v_{n+1}$.

М. Б. Балк

2541. Об области сходимости рядов Дирихле с комплексными показателями. Галли (Region of convergence of Dirichlet series with complex exponents. Gallie T. M., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 627—629 (англ.)

Для ряда Дирихле

$$\sum_1^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}$$

с комплексными показателями λ_n иным путем, чем у Хилла (Hille E., Ann. Math., 1924, **25**, 261—278), определяется область D, вне которой ряд расходится, а внутри при условии $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$ сходится абсолютно. Пусть

$$d(n, s) = -|\lambda_n|^{-1} \ln |c_n e^{-\lambda_n s}|$$

и $d(s) = \overline{\lim_{n\to\infty}} d(n, s)$.

Искомая область D определяется как множество точек s, в которых $d(s) \geqslant 0$. Легко устанавливается, что область D замкнута и выпукла, вне D ряд расходится; если $s \in D$, то расстояние от s до границы D равно $d(s)$, наконец, если $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} < \infty$, то во всех точках области D, отстоящих от границы на расстояние большее L, ряд сходится абсолютно.

А. Ф. Леонтьев

2542. Сверхполусимметрия отрезков с исключениями и теорема Фабри. Роу (Sopra-emisimmetria di tratti con eccezioni e teorema di Fabry. Roux Delfina), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 627—635 (итал.; рез. англ.)

Доказана теорема. Пусть степенной ряд $f(z) = \sum_{n-0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости 1. Точка $z = 1$ есть особая для $f(z)$, если можно определить возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_h\}$, возрастающую последовательность действительных чисел $\{\gamma_h\}$ и действительное число θ, $0 < \theta < 1$, такие, что, обозначив отрезок

$$I_h \equiv (1 - \theta)n_h < m < (1 + \theta)n_h \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

$$\text{и } \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) = a'_m, \quad m \in I_h,$$

имеем:

(A) $|a'_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$ $(h \to \infty)$;

(B) $v_h/n_h \to 0$ $(h \to \infty)$,

где v_h — число перемен знаков в конечной последовательности действительных чисел (пренебрегая членами, равными нулю)

$$a'_{n_h - u} + a'_{n_h + u} \quad (u = 0, 1, 2, \ldots, [\theta \cdot n_h]);$$

(C) существует функция $\psi(n)$, возрастающая и стремящаяся к $+\infty$ $(n \to \infty)$ и такая, что два действительных числа

$$a'_{n_h - u} + a'_{n_h + u} \quad \text{и} \quad a'_{n_h - u} + a'_{n_h + u} \cdot e^{u\frac{v_h + \psi(n_h)}{n_h}}$$

$$(n_h \mp u \in I_h, \quad h = 1, 2, \ldots)$$

(если не нули) имеют одинаковый знак. Сформулирована еще одна теорема, являющаяся частным случаем этой теоремы.

Н. А. Давыдов

2543. Несколько теорем о степенных рядах. Флетт (Some theorems on power series. Flett T. M.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 26, 211—218 (англ.)

Реферируемая работа является продолжением работы автора (РЖМат, 1958, 9732). Сохраняя обозначения названной его работы, приведем несколько теорем настоящей работы.

Теорема 3. Пусть $\psi(z)$ регулярна в $|z|<1$ и $\tau_\alpha(\theta)=\sup_n|\tau_n^\alpha(\theta)|$. Тогда $\|\tau_\alpha\|_\lambda \leqslant A(\alpha,\lambda)\|\psi\|_\lambda$, если $\lambda \geqslant 1$, $\alpha>1$ или $0<\lambda<1$, $\alpha>\frac{1}{\lambda}$.

Теорема 4. Пусть $k\geqslant 2$, $\psi(z)$ регулярна в $|z|<1$, $\vartheta_{N,k,\alpha}(\theta)=\{N^{-1}\sum_1^N|\tau_n^\alpha|^k\}^{1/k}$, $q_{k,\alpha}(\theta)=\sup_N q_{N,k,\alpha}(\theta)$. Тогда

$$\|q_{k,\alpha}\|_\lambda \leqslant A(k,\alpha,\lambda)\|\psi\|_\lambda,$$

если $\lambda\geqslant k'$, $\alpha>\frac{1}{k}$ или $0<\lambda<k'$, $\alpha>\frac{1}{\lambda}$.

Теорема 5. Если $r\geqslant k\geqslant 1$, $\alpha>-1$, $\beta\geqslant\alpha+\frac{1}{k}-\frac{1}{r}$, то

$$\left\{\sum_0^\infty\frac{|\sigma_n^\beta-s|^r}{n+1}\right\}^{1/r}\leqslant A(k,r,\alpha,\beta)\left\{\sum_0^\infty\frac{|\sigma_n^\alpha-S|^k}{n+1}\right\}^{1/k}.$$

Если $k=1$, то неравенство имеет место, когда $\alpha>-1$, $\beta>\alpha+\frac{1}{k}-\frac{1}{r}$.

Автор называет ряд Σa_n суммируемым к числу s $[C,\alpha]_k$-методом, где $k>0$, если $N^{-1}\sum_1^N|\sigma_n^{\alpha-1}-s|^k=o(1)$.

Теорема 8. Если ряд Σa_n суммируем $[C,\alpha]_k$-методом, где $\alpha\geqslant 1$, $k\geqslant 1$, то $N^{-1}\sum_1^N|\tau_n^\alpha|^k=o(1)$.

Теорема 9. Если ряд Σa_n такой, что $N^{-1}\sum_1^N|\tau_n^\alpha|^k=o(1)$, где $k>1$, $\alpha>0$, то ряд Σa_n суммируем $[C,\alpha]_k$-методом, если он суммируем (A)-методом.

Теорема 10. Пусть $k\geqslant 2$, $\psi(z)=\Sigma c_n z^n$ регулярна в $|z|<1$ и $\psi(z)\in H_\lambda$. Тогда ряд $\sum c_n e^{in\theta}$ суммируем $[C,\alpha]_1$-методом почти всюду к $\psi(e^{i\theta})$, если $\lambda\geqslant k'$, $\alpha>\frac{1}{k'}$ или $0<\lambda<k'$, $\alpha>\frac{1}{\lambda}$. Н. А. Давыдов

2544. Суммирование степенных рядов в односвязных и многосвязных областях. Вермс (Summability of power series in simply or multiply connected domains. Vermes P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 3, 188—199 (англ.)

Строятся различные примеры матриц, суммирующих степенной ряд. Доказана одна очевидная теорема: Если $g_n(z)=\sum_{k=0}^\infty g_{n,k}z^k$ сходится в круге $C_{g,n}$ для $n=0,1,2,\ldots$ и если $g_n(z)$ стремится к конечному пределу $1/(1-z)$ в многосвязной области $D\subset C_{g,n}$ и не стремится к пределу вне D, то сходимость $g_n(z)$ к $1/(1-z)$ не может быть равномерной в каждой ограниченной замкнутой области, содержащейся в D. Н. А. Давыдов

2545. Теоретико-функциональное доказательство тауберовых теорем типа «O» для методов Бореля и Эйлера — Кноппа. Юркат (Ein funktionentheoretischer Beweis für O-Taubersätze bei den Verfahren von Borel und Euler—Knopp. Jurkat Wolfgang B.), Arch. Math., 1956, **7**, № 4, 278—283 (нем.)

Дается новое доказательство известной тауберовой теоремы для борелевского суммирования рядов Σa_n с тауберовым условием $a_n=O(1/\sqrt{n})$. (Харди, Литлвуд, Расходящиеся ряды, М. Изд-во Ин. Лит., 1951). Доказательство основано на методах теории функций комплексного переменного, а именно на теореме типа Монтеля и контурном интегрировании. Б. И. Коренблюм

2546. Замечание об одной теореме Мардена. Ралевич (Примједба о једном Marden-овом ставу. Ральевић Шефкија), Зб. радова Српска АН, 1957, кн. 55, 69—72 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Указывается, что теорема Мардена (Marden, The geometry of the zeros ofa polynomial in a complex variable, New-York, 1949, стр. 157, теорема (44,1)) о числе корней полинома, лежащих внутри, вне и на единичной окружности, в сформулированном автором виде не верна. Приводится противоречащий пример. Анализируется ошибка в доказательстве этой теоремы. Г. Н. Чеботарев

2547. Преобразование Лапласа и его приложение к теории функций комплексного переменного. 2. Такэути (Takeuchi J.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1957, **44**, № 16, 1797—1801 (японск.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 6867

2548. Поправка. Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 2, 286 (японск.)

К реф. 2547.

2549. Преобразование Лапласа и его приложение к теории функций комплексного переменного. 3. Такэути (Takeuchi J.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 1, 139—142 (японск.)

2550. Преобразование Лапласа и его приложение к теории функций комплексного переменного. 4. Такэути (Takeuchi J.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 2, 269—273 (японск.)

2551. Преобразование Лапласа и его применения в теории функций комплексного переменного. 5. Такэути (Takeuchi J.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 3, 426—429 (японск.)

2552. К проблеме единственности в теории асимптотических рядов и представления полуаналитических функций при помощи преобразований Бореля и Стилтьеса. Салинас (Los problemas de unicidád en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes. Salinas Baltasar R.), Rev. Real. acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1956, **50**, № 2, 191—227 (исп.)

Назовем полуаналитической асимптотической аппроксимацией (п. а. а.) ряда $\sum_0^\infty\frac{a_n}{z^n}$ в бесконечной области D всякую аналитическую в D функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию

$$\left|f(z)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu}{z^\nu}\right|\leqslant\frac{m_n}{|z|^n},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

где $\{m_n>0\}$ удовлетворяет условию $C(D)$ Карлемана для области D.

В случае когда D есть область $\mathrm{Re}\,(z^{1/\alpha})\geqslant a^{1/\alpha}$, $a>0$, $\alpha>0$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n\alpha]{\frac{m_n}{(\alpha n)!}}<+\infty$, п. а. а. функция $f(z)$ называется аппроксимацией Ватсона—Неванлинны (а. В.) ряда $\sum_0^\infty\frac{a_n}{z^n}$. В работе в основном исследуется проблема: пусть

функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются п. а. а. функциями ряда $\sum_0^\infty \frac{a_\nu}{z^\nu}$ соответственно в областях D_1 и D_2, имеющих непустое пересечение; какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять $\{a_n\}$, чтобы $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Отметим некоторые результаты.

Теорема 7. Если

$$e^{-a^{1/\alpha}t} F(t) = e^{-a^{1/\alpha}t} \sum_0^\infty a_n \frac{t^{\alpha n}}{(\alpha n)!}$$

представляет аналитическую и ограниченную в полуполосе $\{|\operatorname{Im} t| \leqslant \rho,\ \operatorname{Re} t > 0\}$, где $\rho \leqslant \frac{r_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \varlimsup \sqrt[\alpha n]{\frac{(\alpha n)!}{|a_n|}} \neq 0$ функцию, то

$$z^{1/\alpha} \int_0^\infty e^{-z^{1/\alpha} t} F(t)\, dt$$

есть а. В. функция $\left(\varlimsup \sqrt[n\alpha]{\frac{m_n}{(n\alpha)!}} \leqslant \frac{1}{\rho}\right)$ ряда $\sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}$ в области $\operatorname{Re}(z^{1/\alpha}) \geqslant a^{1/\alpha} + \gamma_1 (> a^{1/\alpha} > 0)$.

Обратно, если существует а. В. функция $f(z)$ ряда $\sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}$ в области $\operatorname{Re}(z^{1/\alpha}) \geqslant \overline{a}^{1/\alpha} > 0$, то $e^{-a^{1/\alpha}t} F(t)$ есть функция аналитическая и ограниченная во всякой полосе

$$\{|\operatorname{Im} t| \leqslant \rho',\ \operatorname{Re} t \geqslant \rho'\},\ \rho' < \varliminf \sqrt[\alpha n]{\frac{(\alpha n)!}{m_n}} \quad (\leqslant r_0).$$

Теорема 10. Если $f_k(z)$ $(k = 1,2)$ представляют п.а.а. функции ряда $\sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}$ в $\operatorname{Re}(ze^{-i\theta_k}) \geqslant a^{1/\alpha}$, $\alpha > \overline{\alpha}(\{m_n\})$, $k = 1,2$, то $f_1(z) = f_2(z)$, если только для $\alpha' = \alpha - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\pi}$ выполняются условия

$$\varlimsup \sqrt[\alpha' n]{\frac{|a_n|}{(\alpha' n)!}} = 0,\ \alpha' \geqslant \overline{\alpha}.$$

Теорема 11. Пусть E — подмножество множества $|\theta - \theta_0| < \delta$ с мерой $m(E) = 2\delta$, $\theta_0 \in E$. Если для любого $\theta \in E$, $f_\theta(z)$ представляет п. а. а. ряда $\sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}$ в $\operatorname{Re}\left(ze^{-i\theta}\right)^{1/\alpha} \geqslant a^{1/\alpha}$ и если функция $F(t^{1/\alpha}, \alpha) = \sum_0^\infty a_n \frac{t^n}{(\alpha n)!}$ $\left(\varlimsup \sqrt[\alpha n]{\frac{|a_n|}{(\alpha n)!}} = \frac{1}{r_0} < +\infty\right)$ аналитична в угле $|\arg t - \theta_0| \leqslant \delta$, то $f_\theta(z) = f_{\theta_0}(z)$ для всякого $\theta \in E$, если только $M(\theta') = \varlimsup_{\theta \to \theta'} m_0(\theta) = \varlimsup_{\theta \to \theta'} |f_\theta(z)|\ (\operatorname{Re}(ze^{-i\theta})^{1/\alpha} \geqslant a^{1/\alpha}, \theta \in E)$, суммируема на интервале $(\theta_0 - \delta,\ \theta_0 + \delta)$.

Далее строится пример, когда две п. а. а. функции $f_{\theta_1}(z)$ и $f_{\theta_2}(z)$ не равны.

В получении основных результатов существенную роль играет преобразование Лапласа. Аналогичные исследования проводятся исходя из преобразования Стилтьеса, где использована функция Миттаг-Лефлера. Г. В. Бадалян

2553. К интерполяционной задаче для целых функций. Вермс (An interpolation problem for integral functions. Vermes P.), J. Analyse Math., 1952—1953, 2, 150—159 (англ., рез. евр.)

Рассматривается задача Уиттекера (J. M. Whittaker). Даны две возрастающие последовательности целых чисел $\{p_i\}$, $\{q_j\}$ и две целые функции $f(z)$, $g(z)$; найти целую функцию $h(z)$ из условий: $h^{(n)}(1) = f^{(n)}(1)$, $n = p_1, p_2, \ldots$, $h^{(\nu)}(0) = g^{(\nu)}(0)$, $\nu = q_1, q_2, \ldots$. Уиттекер доказал, что для разрешимости задачи необходимо выполнение условия

$$P(m) + Q(m) \geqslant m, \qquad (1)$$

где $P(m)$ и $Q(m)$ — число чисел соответственно p_i и q_i меньших m, причем знак равенства в (1) должен иметь место для бесконечной последовательности целых чисел $\{m_r\}$.

Автор находит достаточные условия разрешимости задачи.

Теорема 1. Задача разрешима, если: 1) выполняется условие (1), 2) функции $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f_k}{k!} z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{g_k}{k!} z^k$ удовлетворяют условию $|f_{q_j} - g_{q_j}| < \beta_j$, где числа β_j определяются по $\{p_i\}$, $\{q_j\}$ и не зависят от $f(z)$, $g(z)$ (аналогичные условия, если обе функции заданы разложениями в точке $z=1$, или одна — в $z=0$, другая—в $z=1$).

Из теоремы следует, что для разрешимости задачи должны быть достаточно близки только некоторые из коэффициентов заданных функций, на порядок же роста функций ограничений не накладывается, в частности, одну из функций можно задать произвольно.

Для определения неизвестных коэффициентов искомой функции $h(z)$ автор получает бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую преобразует к виду, чтобы оператор, определяемый матрицей системы, был бы оператором сближения. Этот метод не позволяет ему получить сколько-нибудь точных границ β_j для характеристики близости коэффициентов f_{q_j}, g_{q_j}.

Теорема 2. Задача Уиттекера разрешима, если: 1) последовательности $\{p_i\}$ и $\{q_j\}$ содержат бесконечное множество чисел, 2) $q_j = s_j - t_j$, где $\{s_j\}$ — последовательность, дополнительная к $\{p_2\}$ до натурального ряда, t_j равно 0 или 1, причем если $t_j = 1$ бесконечное множество раз, то $\varliminf_{i \to \infty} \frac{p_{i-1}}{p_i} > 0$, 3) $|f_{q_j} - g_{q_j}|$ ограничены.

Теорема 3. Задача разрешима, если 1) выполняется условие (1) и разности $m_{r+1} - m_r$ ограничены, 2) $\varphi_n = O(t^n)$, $n = p_1, p_2, \ldots$, $\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_n}{n!} (z-1)^n = f(z)$, $g_\nu = O(t^\nu)$, $\nu = q_1, q_2, \ldots$, $\sum_0^\infty \frac{q_\nu}{\nu!} z^\nu = \varphi(z)$, где t определяется только последовательностями $\{p_i\}$, $\{q_j\}$ и не зависит от $f(z)$, $g(z)$.

М. Г. Хапланов

2554. Об области сходимости интерполяционных полиномов. Какэхаси (On the convergence-region of interpolation polynomials. Kakehashi Tetsujiro), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 1, 32—58 (англ.)

Исследуется точная область сходимости последовательности интерполяционных полиномов к данной аналитической функции при некоторых условиях расположения узлов интерполяции. Пусть задана треуголь

ная матрица узлов $z_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ с условием $|z_k^{(n)}| \leqslant 1$ для всех k и n. Предполагается, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(z)/z^n = \lambda(z), \qquad (1)$$

где $\omega_{n+1}(z) = (z - z_1^{(n)})(z - z_2^{(n)}) \ldots (z - z_{n+1}^{(n)})$, сходимость имеет место всюду в области $|z| > 1$, равномерная на каждом ограниченном замкнутом множестве в этой области, и $\lambda(z)$ — аналитическая функция с положительным модулем в $|z| > 1$. Предполагается еще, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\omega_n(z) - \lambda(z) z^n|^{1/n} < |z| \qquad (2)$$

для $|z| > 1$. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < \rho$ $(\rho > 1)$ с особенностями на $|z| = \rho$ и $P_n(z, f)$ — интерполяционный полином n-й степени, определяемый условиями $P_n(z_k^{(n)}, f) = f(z_k^{(n)})$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$. При указанных условиях справедлива Теорема 2. Последовательность $P_n(z, f)$ сходится к $f(z)$ в круге $|z| < \rho$, равномерно внутри этого круга и расходится всюду вне круга.

Рассматривается также ортонормальная последовательность полиномов $\varphi_n(z)$ на окружности $|z| = 1$ с весом $F(e^{i\theta})$, где $F(z)$ — аналитическая функция в кольце $\frac{1}{R} < |r| < R$ $(R > 1)$, не обращающаяся в нуль и $F(e^{i\theta}) > 0$.

Устанавливаются асимптотические равенства для $\varphi_n(z)$ в областях $R^{-1} < |z| < 1$ и $|z| \leqslant R^{-1}$ и асимптотическое неравенство для $|z| \geqslant 1$.

С помощью этих результатов доказана

Теорема 5. Если $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < \rho$ $(\rho > 1)$ с особенностями на $|z| = \rho$, то последовательность интерполяционных полиномов $P_n(z, f)$ с узлами во всех нулях полиномов $\varphi_n(z)$ сходится к $f(z)$ в $|z| < \rho$, равномерно внутри этого круга и расходится всюду вне круга.

Установлены также некоторые асимптотические оценки для полиномов, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ вещественной оси с весом специального вида и соответствующая теорема о сходимости интерполяционных полиномов с узлами в нулях указанной системы ортогональных полиномов.

В одной из следующих статей автора (РЖМат, 1957, 3933) теорема 2 доказана без использования условия (2).

С. Я. Альпер

2555. Об интерполировании аналитических функций. I (Предварительные результаты). Какехаси (On interpolations of analytic functions. I. (Preliminaries). Kakehashi Tetsujiro), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 10, 707—712 (англ.)

Работа посвящена обобщению предыдущих результатов автора (РЖМат, 1957, 3933) и имеет подготовительный характер. В ней доказаны 3 леммы о некоторых предельных соотношениях для коэффициентов разложения в ряд Лорана произведений аналитических функций.

С. Я. Альпер

2556. Об интерполировании аналитических функций. II (Основные результаты). Какехаси (On interpolations of analytic functions. II (Fundamental results). Kakehashi Tetsujiro), Proc. Japan Acad. 1956, 32, № 10, 713—718 (англ.)

Часть I см. реф. 2555.

Обобщаются результаты ряда предыдущих статей автора по вопросу о сходимости и расходимости последовательности интерполяционных полиномов.

Пусть D — ограниченное замкнутое множество в комплексной плоскости, дополнение которого K связно и имеет функцию Грина с полюсом на бесконечности. Пусть $w = \varphi(z)$ отображает K на $|w| > 1$ так, что бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу и Γ_ρ — линия плоскости z, соответствующая $|w| = \rho$ $(\rho > 1)$. Пусть точки $z_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ расположены в D и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (z - z_k^{(n)})}{[\Delta\varphi(z)]^n} = \lambda(w) \neq 0 \qquad \text{для } |w| > 1,$$

где $\lambda(w)$ — однозначная аналитическая функция в области $|w| > 1$, сходимость равномерна на каждом ограниченном замкнутом множестве этой области и Δ — емкость D. Полином $P_n(z, f)$ n-й степени совпадает с $f(z)$ во всех точках $z_k^{(n+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Теорема 1. Если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция внутри Γ_ρ с особенностями на Γ_ρ, то последовательность $P_n(z, f)$ сходится к $f(z)$ внутри Γ_ρ равномерно на каждом замкнутом множестве внутри Γ_ρ и расходится всюду вне Γ_ρ.

Более того,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(z) - P_n(z, f)|^{1/n} = |w|/\rho \qquad \text{для } 1 < |w| = |\varphi(z)| < \rho$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |P_n(z, f)|^{1/n} = |w|/\rho \text{ для } |w| = |\varphi(z)| > \rho.$$

Доказательство проводится с помощью лемм из статьи I того же названия.

Частный случай, когда D — круг $|z| \leqslant 1$, установлен автором ранее (РЖМат, 1957, 3933). Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < \rho$ $(\rho > 1)$ и $\Phi_n(z)$ — ортонормальная на $|z| = 1$ последовательность полиномов с весом $\mu(\theta)$, для которого существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\theta)\, d\theta > 0 \qquad \text{и} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\ln \mu(\theta)|\, d\theta,$$

тогда последовательность интерполяционных полиномов $P_n(z, f)$ с узлами во всех нулях $\Phi_{n+1}(z)$ сходится в круге $|z| < \rho$ к $f(z)$ равномерно внутри этого круга и расходится всюду вне этого круга.

Эта теорема обобщает прежний результат автора (реф. 2554). Устанавливается еще одна теорема об интерполяции с узлами в нулях полиномов, ортогональных с весом на отрезке $[-1, +1]$ действительной оси.

С. Я. Альпер

2557. Некоторые исследования однолистных функций в дипломных работах, выполненных студентами под руководством кафедры математического анализа математического факультета Северо-западного университета. Лю Шу-цинь, Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 2, 325—334 (кит.)

Работа имеет реферативный характер. Перечисляются без доказательства результаты, относящиеся к теоремам искажения, оценкам тейлоровских коэффициентов и разностей их модулей, специальным однолистным функциям и отрезкам тейлоровских рядов однолистных функций.

В. Н. Телиянц

2558. Заметка о подобластях, ограниченных линиями уровня функции Грина. Акадза (Note on the subregions bounded by the level curves of the Green's function. Akaza Tohru), Sci. Rep. Kanazawa Univ. 1955, **3**, № 2, 193—197 (англ.)

Обобщается теорема Уолша (РЖМат, 1954, 5538) о T-свой стве.Если $T(w)$ — функция, однолистная в области D, принадлежащей расширенной плоскости, отображает D на ее подобласть, то говорят, что область D обладает T-свойством. Пусть $T(w)$ определено тем, что

$$\frac{w_1}{w_1 - a} = A\frac{w}{w - a}, \quad a \neq 0, \ A = 1, \ 0 < |A| \leqslant 1,$$

и D обладает T-свойством, причем существует функция Грина $G(w)$ для D с полюсом в точке $w = 0 \in D$. Тогда для каждой подобласти D_γ ($G(w) > -\ln\gamma$, $0 < \gamma < 1$) имеет место T-свойство (теорема Уолша).

Автор доказывает теорему 1: Пусть область D, принадлежащая расширенной плоскости w, имеет T-свойство, где $T(w)$ — однолистная аналитическая функция, $T(0)=0$. Если $w = 0 \in D$ и для D существует функция Грина $G(w)$ с полюсом $w = 0$, то и для каждой подобласти D имеет место T-свойство.

Теорема 2. Если в теореме 1 функция $T(w)$ может быть преобразована в дробно-линейную функцию $S(z)$ с помощью соответствующей аналитической функции

$$S(z) = fTf^{-1}(z),$$

то $S(z)$ должна иметь вид:

$$\frac{z'}{z' - a} = A\frac{z}{z - a} \quad (a \neq 0, \ A \neq 1, \quad 0 \leqslant A < 1).$$

Г. П. Боев

2559. **Некоторые однолистные отображения в теории интегралов уравнений Лёвнера. Линь Вэй,** Чжуншань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), 1—9 (кит.)

Как известно, интеграл $f(z, t)$ уравнения Лёвнера

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1 + kf}{1 - kf}, \ |k(t)| = 1 \quad (0 \leqslant t < \infty), \qquad (1)$$

удовлетворяющий начальному условию $f(z, 0) = z$, является регулярной и однолистной функцией z в круге $|z| < 1$.

Таковым же является и предел

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} \beta e^t f(z, t), \quad \beta = f'(0) > 0, \qquad (2)$$

который всегда существует (Голузин, Геометрическая теория функций, Гостехиздат, 1952).

Результат автора выражается теоремой: Если в уравнении (1) $k(t) = e^{i(\mu t + \nu)}$, где μ и ν — произвольные действительные числа, то функция $f(z)$, определенная соотношением (2), отображает круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезом по дуге логарифмической спирали, пересекающей любой луч, выходящий из $w = 0$, под углом $\operatorname{arctg}\mu$.

Справедливо и обратное. В. Н. Телиянц

2560. **О тейлоровых коэффициентах однолистных функций. II. Бернацкий** (Sur les coefficients de Taylor des fonctions univalentes. II. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie Sklodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1—13, 127—133 (франц.; рез. польск.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 4730.

Рассматривается класс S функций

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots,$$

голоморфных и однолистных внутри круга $|z| < 1$.

Доказываются:

Теорема 1. Если $f(z) \in S$, то

$$\left|\,|a_2| - 1\right| + \left|\,|a_3| - |a_2|\,\right| + \ldots + \left|\,|a_{n+1}| - |a_n|\right| < Cn\ln n \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где C — числовая постоянная.

Теорема 2. Если $f(z) \in S$ и, кроме того, $z^p f'(z)$ p-листна по площади ($p > 0$ — целое), то

$$|\,|a_n| - |a_{n-1}|\,| < C(p)\ln n \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где $C(p)$ зависит только от p.

Полученная ранее Голузиным оценка для всего класса S имеет вид:

$$|\,|a_n| - |a_{n-1}|\,| < Cn^{1/4}\ln n \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

В. Н. Телиянц

2561. **Проблема Сегё в теории однолистных функций. Хэ Чэн-ци** (The Szegö problem in the theory of schlicht functions. Hoh Chen-chih), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1958, **2**, № 3, 86—91 (англ.)

Известная в теории однолистных функций проблема Сегё о покрытии отрезков, выходящих из начала под равными углами, решается для некоторых специальных классов однолистных функций. Доказательства формулируемых теорем не приводятся, но указывается, что они получены методом Грёцша. Эти теоремы в частных случаях дают теоремы Лаврентьева и Шепелева (Матем. сб., 1937, **2**, 319—325), Сяо Дао-шина (РЖМат, 1958, 7639), Бибербаха (Bieberbach L., Math. Ann., 1916, **77**, 153—172) и Гу Чао-хао (Ku Chao-hao, Science Record, 1950, **3**, 157—159).

Примечание референта. Определения рассматриваемых классов функций даны недостаточно отчетливо, и это не позволило прореферировать данную работу по существу. Ю. Е. Аленицын

2562. **Об одном неравенстве для однолистных функций. Бернарди** (A determinant inequality for univalent functions. Bernardi S. D.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 7, Part I, 495—497 (англ.)

Доказана теорема: Если $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$ — функция, регулярная и однолистная в $|z| < 1$,

$$F(z, \alpha) = [z^{-1}f(z)]^{-\alpha/2} = 1 + b_1(\alpha)z + b_2(\alpha)z^2 + \ldots,$$

$$z = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{c_{n-1}}{n}\right)w^n,$$

где $f^{-1}(w)$ — функция, обратная по отношению к $w = f(z)$, то

$$c_{n-1} = b_{n-1}(2n), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

$$\left|\frac{b_{n-1}(2n)}{n}\right| \leqslant \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(n+1)}2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\,|b_n(4)|^2 \leqslant 18.$$

В. Н. Телиянц

2563. **Теорема покрытия для однолистных функций. Скотт** (A covering theorem for univalent functions. Scott W. T.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 2, 90—94 (англ.)

Пусть U — класс функций

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots,$$

регулярных и однолистных в $|z| < 1$; U_+ — подкласс U, содержащий функции $f(z) \in U$, у которых первый отличный от 0 коэффициент a_m ($m \geqslant 2$) положителен; $\rho_f(\varphi)$ — расстояние от $w = 0$ до ближайшей граничной точки образа $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$, лежащей на луче $\arg w = \varphi$, а

$$\rho(\varphi) = \inf_{f\in U_+}\rho_f(\varphi).$$

Доказывается теорема: Если $f(z) \in U_+$ и не принимает в $|z| < 1$ значения $\gamma = \rho e^{i\varphi}$, то

$$\varphi > \rho(\varphi) \text{ и } \begin{cases} \rho(\varphi) = \frac{1}{2}, & 0 \leqslant |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}|\sin\varphi| < \rho(\varphi) \leqslant \frac{1}{2}, & \frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{3\pi}{4}, \\ \frac{1}{4|\cos\varphi|} < \rho(\varphi) \leqslant \frac{1}{2}, & \frac{3\pi}{4} \leqslant |\varphi| < \pi, \\ \rho(\pm\pi) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Кроме того, для $0 \leqslant |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ любая функция класса U_+ принимает в $|z|<1$ значение $\rho(\varphi)e^{i\varphi}$, а при $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ для каждого φ существует функция класса U_+, не принимающая значения $\rho(\varphi)e^{i\varphi}$. Ю. Г. Фридман

2564. Вариационный метод для звездообразных функций. Хаммел (A variational method for starlike functions. Hummel J. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 82—87 (англ.)

Однолистная в $|z|<1$ функция $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ называется звездообразной, если любой луч, исходящий из точки $z=0$, пересекает образ любой окружности $|z|=r$, $0<r<1$, при отображении этой функцией только в одной точке. Автор, опираясь на метод внутренней вариации, развитый Шиффером, (Schiffer M., Proc. London Math. Soc., 1938, **44**, 432—449), получает вариационную формулу в классе звездообразных функций. Именно, доказывается, что если $f(z)$ — звездообразная функция, z_0 — произвольное фиксированное число из $|z|<1$, θ — произвольное вещественное и $h\,(h>0)$ — достаточно малое число, то функция

$$f_x(z) = f(z) + h\left\{e^{i\theta}\frac{zf(z)}{z_0(z-z_0)} + e^{-i\theta}\frac{zf(z)}{1-\bar{z}_0 z} - e^{i\theta}\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)\left[\frac{zf'(z)}{z-z_0} - \frac{f(z)}{z_0}\right] + e^{-i\theta}\overline{\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)}\frac{z^2 f'(z)}{1-\bar{z}_0 z}\right\} + o(h)^2$$

также является звездообразной. Эта вариационная формула несколько сходна с соответствующей вариационной формулой Шиффера—Голузина в классе однолистных функций.

Опираясь на полученную вариационную формулу, автор доказывает теорему: Пусть $F(a_2, \ldots, a_n)$ есть любая функция от $n-1$ переменных $a_2, \ldots, a_n$, имеющая непрерывную производную по каждой из $n-1$ переменной; тогда каждая звездообразная функция $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$, реализующая $\max \operatorname{Re} F(a_2, \ldots, a_n)$, имеет вид

$$f(z) = \frac{z}{\prod_{\nu=1}^{m}(1-k_\nu z)^{\mu_\nu}},$$

где $|k_\nu| = 1$, $\mu_\nu \geqslant 0$ для всех ν, $\sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu = 2$, $m \leqslant n-1$. Н. А. Лебедев

2565. Область коэффициентов для звездообразных функций. Хаммел (The coefficient regions of starlike functions. Hummel J. A.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 3, 1381—1389 (англ.)

Опираясь на полученную им вариационную формулу для звездообразных функций (реф. 2564):

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

автор находит область значений коэффициента a_n при фиксированных коэффициентах $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, взятых из области значений коэффициентов для класса звездообразных функций.

Как справедливо отмечает Пойа (см. сноску на стр. 1386 реферируемой работы), найденный автором результат может быть получен непосредственным вычислением, если опираться на теорему Каратеодори об области коэффициентов для регулярных в $|z|<1$ функций с положительной вещественной частью в $|z|<1$. Н. А. Лебедев

2566. О максимуме конформного радиуса фундаментальной области двоякопериодической группы. Гельфер С. А., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 2, 241—244

Пусть T — группа преобразований $w' = w + n_1\omega_1 + n_2\omega_2$, $\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$ (n_1, n_2 — целые числа). Изучается задача о максимуме $|c_1|$ в классе функций $w = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, конформно и однолистно отображающих $|z|<1$ на области D, обладающие свойствами: если $w \in D$, то ни одна из точек, конгруэнтных w (относительно группы T), не принадлежит D; D не содержит заданных точек $a_1, \ldots, a_m$ и им конгруэнтных.

Пользуясь вариационным методом Г. М. Голузина и некоторыми из соображений, развитых в другой работе автора (РЖМат, 1955, 5748), автор, исходя из вариации границы (P — эллиптическая функция Вейерштрасса)

$$w^* = w + h(q(w) - q(0))\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{P}(w) - \mathrm{P}(a_i)}{\mathrm{P}(w) - b_i}$$

(b_i — произвольны, $q(w) = \zeta(w - w_{2m+1}) - \zeta(w - w_{2m+2})$, w_{2m+1}, w_{2m+2} отличны от корней $w_k\,(k = 1, \ldots, 2m)$ уравнений $\mathrm{P}(w) = b_i$ в фундаментальном параллелограмме), получает для экстремальной функции уравнение вида

$$\frac{1}{z^2 w'^2} = A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i\zeta(w - a_i) + A_{m+1}\zeta(w) + \mathrm{P}(w), \qquad \sum_{i=1}^{m+1} A_i = 0.$$

Отсюда выводится, что: 1) экстремальная область D_0 получается из некоторой ограниченной конечным числом аналитических дуг фундаментальной области S_0 группы T проведением конечного числа аналитических разрезов; 2) каждой паре конгруэнтных дуг границы S_0 и простым дугам разрезов соответствуют (при экстремальном отображении $w = f(z)$) на $|z| = 1$ две дуги равной длины; 3) внутренние углы области D_0 при конгруэнтных вершинах равны между собой; 4) экстремальная область единственна.

Некоторые дальнейшие заключения сделаны для случая вещественных инвариантов g_2, g_3 функции $\mathrm{P}(w)$. В частности, при $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ и $m = 0$ (когда не ставится условие об исключительных значениях a_k) довольно полно охарактеризован вид экстремальной (и в этом случае фундаментальной) области для различных значений $\tau = \arg\frac{\omega_2}{\omega_1}$, а при $\Delta > 0$ показано, что D_0 — прямоугольник периодов с центром $w = 0$ и параллельными осям сторонами. П. П. Куфарев

2567. О максимуме конформного радиуса фундаментальной области данной группы. Гельфер С. А. Матем. сб., 1958, **44**, № 2, 213—224

Пусть T_n — собственно разрывная группа дробно-линейных преобразований, $a_1, \ldots, a_m$ ($m \geqslant 1$) — система точек, содержащихся в фундаментальной области этой группы. Пусть $\{D\}$ есть семейство односвязных областей D, со

держащих начало координат и не содержащих точек, конгруэнтных по отношению к группе T_n, и точек $a_1, \ldots, a_m$. Ставится задача: среди всех областей семейства $\{D\}$ определить область, которая имеет наибольший конформный радиус. Эта задача решается для групп, связанных с эллиптическими функциями. В предельном случае получается данное ранее М. А. Лаврентьевым (Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1934, **5**, 159—245) решение задачи об определении области, которая среди всех односвязных областей, содержащих начало координат и не содержащих ∞ и данной системы точек $a_1, \ldots, a_m$ ($m \geqslant 1$), имеет наибольший конформный радиус.

Ю. Е. Аленицын

2568. К достаточным признакам однолистности регулярных функций. Аксентьев Л. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 3(4), 3—7

Рассматриваются конечные двусвязные области G с внешней границей—выпуклой кривой L_1, а внутренней — произвольной кривой L_2 и функции $F(z) = g(z) + f(z)$, причем $g(z)$ регулярна в G, $f(z)$ регулярна внутри кривой L_1 (область D) и $f'(z)$ непрерывна в $\bar{D}$. Если при некотором $N > 0$ имеют место неравенства

$$\operatorname{Re} f'(z) > N, z \in L_1,$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant N |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \bar{G},$$

или же

$$|f'(z)| < N, \quad z \in L_1,$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \geqslant N |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \bar{G},$$

то $F(z)$ однолистна в $\bar{G}$.

Требование выпуклости кривой L_1 существенно; строится пример функции $F(z) = g(z) + f(z)$, неоднолистной в области G с невыпуклой внешней границей L_1, для которой

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant N |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in G,$$

$$\operatorname{Re} f'(z) > N, \quad z \in D,$$

при заданном N.

С. А. Касьянюк

2569. О радиусах однолистности, звездообразности и выпуклости одного класса аналитических функций в многосвязных областях. Хавинсон С. Я., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 233—240

Нехари (Nehari Z., Amer. J. Math., 1951, **73**, № 1, 78 — 106), среди других результатов, дал обобщение на случай ограниченных функций в многосвязных областях качественной стороны известных результатов о радиусах однолистности, звездообразности и выпуклости класса регулярных и ограниченных функций в единичном круге. Однако его доказательство этого обобщения содержит пробелы (РЖМат, 1956, 2916). В реферируемой работе иным методом (использованием соответствующей теоремы автора о решении одной линейной экстремальной задачи и метода выпуклых тел) устанавливаются более полные результаты. Приведем основную теорему работы.

Теорема. Всякая функция класса функций $f(z)$, регулярных (включая однозначность) в n-связной области G (не имеющей изолированных граничных точек) и удовлетворяющих условиям: $|f(z)| \leqslant 1$, $f'(a) = A$, $a \in G$, имеющая радиус однолистности этого класса функций своим точным радиусом однолистности, дает отображение области G на m раз покрытый единичный круг, где $n \leqslant m \leqslant n+2$.

Теорема верна и для некоторого более общего класса функций, регулярных в области G.

Ю. Е. Аленицын

2570. К принципу сгущения аналитических функций.

Грёцш (Zum Häufungsprinzip der analytischen Funktionnen. Grötzsch Herbert), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1955/56, **5**, № 6, 1095—1100 (нем.)

Пусть B — бесконечносвязная область, внешняя граничная компонента которой R_a — простая замкнутая кривая, содержащая $z=0$ (можно принять, что R_a — окружность $|z|=1$); множество граничных компонент R_k, лежащих внутри R_a, счетно, имеет единственной компонентой сгущения точку $z=0$, и расстояние между R_k и любым R_l, $l \neq k$, будет $\geqslant p_k$, $p_k > 0$. Пусть далее среди принадлежащих B двусвязных областей, каждая из граничных компонент которых содержит $z=0$ внутри, имеется счетное множество $\{F_n\}$ не пересекающихся с бесконечным произведением ΠM_n модулей F_n.

Для областей такого типа выполняется конструктивное доказательство теоремы существования (и единственности) взаимно однозначного однолистного конформного отображения $w(z)$, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ (всюду ниже имеются в виду такие отображения) области B на каноническую область $\overline{B}$, получаемую из круга $|w| < 1$ проведением разрезов по дугам окружностей $|w| = \text{const}$, не использующее принципа сгущения (компактности) аналитических функций (теорема, среди других результатов, доказана автором ранее, с применением принципа сгущения (Ber. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 1929, **81**, 51—86).

Для доказательства строится последовательность $B(\lambda_n)$, где λ_n — „линия симметрии" кольцевой полосы F_n и $B(\lambda_n)$ — конечносвязная область, граница которой состоит из $|z|=1$ и компонент R_k, лежащих вне λ_n, и устанавливается с помощью метода полос, что последовательность функций $z_n(z)$, $z_n(0) = 0$, $z_n(1) = 1$, отображающих $B(\lambda_n)$ на круг $|z_n| < 1$ с разрезами по дугам окружностей $|z_n| = \text{const}$, равномерно сходится в $\overline{B}$.

В выводах используются также две леммы: 1) В отображении кольца $\rho \leqslant |\xi| \leqslant 1$ на круг $|\eta| < 1$ с разрезом $0 \leqslant \eta \leqslant l(\rho)$, $\frac{l\rho}{\rho}$ — монотонно убывающая функция ρ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{l(\rho)}{\rho} = 4$; 2) Функция $\eta(\xi)$, отображающая конечносвязную область Q, получаемую из кольца $\rho < |\xi| < 1$ проведением конечного числа разрезов по дугам окружностей $|\xi| = \text{const}$ так, что $|\xi| = 1$ переходит в $|\eta| = 1$ и $|\xi| = \rho - b$ в обходящую $\eta = 0$ или проходящую через $\eta = 0$ граничную компоненту образа Q, удовлетворяет в $\bar{Q}$ неравенству: $|\eta(\xi)/\xi| < 4$. Оценка 4, нетривиальная при $\rho < 1/4$, точная (при $0 < \rho < 1$, ρ не фиксируется), но не достижима для функций рассматриваемого класса.

П. П. Куфарев

2571. Метод вариаций в теории p-листных функций. Гельфер С. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 60—66

Пусть M_g — множество p-листных алгебраических римановых поверхностей R, жанр γ которых не больше фиксированного числа g; P_R — одна из точек $R \in M_g$, лежащих над $z = 0$; $z = \Phi(Z)$, $\Phi(0) = 0$ (P_R) — функция, отображающая универсальную поверхность наложения на каноническую область B — полную плоскость при $\gamma = 0$, конечную плоскость при $\gamma = 1$, круг $|Z| < 1$ при $\gamma \geqslant 2$.

Рассматривается класс $F_p^g(a_1, \ldots, a_m)$ функций $f(\zeta)$, не принимающих заданных значений $a_1, \ldots, a_m$, $a_k \neq 0$, и отображающих взаимно однозначно $|\zeta| < 1$ в ту или иную поверхность $R \in M_g$ так, что $\zeta = 0$ переходит в P_R.

Используя отображение $Z = Z(\zeta) = \Phi^{-1}(f(\zeta))$ и соответствующие вариационные формулы Г. М. Голузина, автор получает вариационные формулы для функций класса $F_p^g(a_1, \ldots, a_m)$, по типу аналогичные формулам Голузина, но содержащие $Z(\zeta)$ и, при $\gamma \geqslant 1$, некоторую функцию, автоморфную по отношению к той же группе T_R дробно линейных преобразований, что и для $\Phi(Z)$ (см., например, Форд Л. Р., Автоморфные функции, М. Л., ОНТИ, 1936). Применяя эти формулы к изучению задачи о максимуме $|c_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$ в классе $F_p^g(a_1, \ldots, a_m)$,

автор, как обычно, получает дифференциальное уравнение для экстремальной функции, с помощью которого заключает, что экстремальная область получается из $R \in M_g$ проведением разрезов, которые состоят из конечного числа аналитических дуг и проходят через все точки R, лежащие над $a_1, \ldots, a_m$.

В частности, при $n=1$ ($c_n = c_1$) функция, обратная экстремальной, выражена из дифференциального уравнения для экстремальной функции через некоторые интегралы. Это позволило автору показать дополнительно (ср. Лаврентьев М. А., Тр. Физ.-матем. ин-та, 1934, 5, 203—236), что при экстремальном отображении $z = f(\zeta)$ каждой простой дуге границы экстремальной области D (в другой формулировке, при соответствующем экстремальной функции отображении $Z = Z(\zeta)$ круга $|\zeta| < 1$ на плоскость с разрезами (при $\gamma = 0$) или на фундаментальную область S_0 (группы T_R) с возможными разрезами (при $\gamma \geqslant 1$) — каждой простой дуге разреза и каждой паре конгруэнтных дуг границы S_0) соответствуют две дуги одинаковой длины на $|\zeta| = 1$. Затем, повторяя рассуждения (для F^0_1) М. А. Лаврентьева, автор устанавливает единственность экстремальной функции, для данной несущей римановой поверхности R. При $m = 1$ автор получил на этом пути для класса F^g_p явные выражения экстремальных функций и, для F^0_p (a), точные оценки $|f(\zeta) - a|$ и $|f'(\zeta)|$. Детали доказательств в статье не приведены. Основные результаты аннонсированы ранее (РЖМат, 1955, 5748; 1957, 347). П. П. Куфарев

2572. Условия представимости гармонической функции формулой Грина в многосвязной области. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., Матем. сб., 1958, **44**, № 2, 225—234

Пусть G — n-связная область с границей $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, где γ_i — жордановы кривые и $\omega(E, G, z)$ — гармоническая относительно G мера множества $E \subset \Gamma$, вычисленная в точке $z \in G$ (E — гармонически измеримое множество). Пусть далее $t = \beta(z)$ — конформное отображение универсальной поверхности наложения области G на $|t| < 1$ и $z = \alpha(t)$ — обратное отображение. Доказывается, что класс гармонических в области G функций, представимых по формуле Грина

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u(\zeta)\, d\omega(z),$$

где $u(\zeta)$ — какая-либо функция на Γ, суммируемая относительно меры $\omega(E, z)$, совпадает с классом гармонических в $|t| < 1$ функций $u^*(t) = u[\alpha(t)]$, представимых интегралом Пуассона—Лебега и автоморфных относительно соответствующей группы дробно-линейных преобразований круга $|t| < 1$ в себя. Отмечается, что из суммируемости относительно какой-либо меры $\omega(E, z_0)$ следует суммируемость относительно любой меры $\omega(E, z)$, где $z \in G$.

Указаны и другие необходимые и достаточные условия представимости гармонической в G функции $u(z)$ по формуле Грина. Например:

1. $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_i(z) \geqslant 0$ ($i = 1,2$), причем $u_i(z)$ ($i = 1,2$) есть предел возрастающей последовательности ограниченных в G гармонических функций $u_{i,n}(z)$, равномерно сходящейся к $u_i(z)$ внутри G.

2. Наилучшая гармоническая мажоранта $u^M(z)$ в G субгармонической функции $[u(z) - M]^+$ стремится к нулю внутри G при $M \to \infty$. Пусть $\{G^i\}$ — возрастающая последовательность жордановых областей, исчерпывающих G и содержащих точку z_0. Пусть $\omega^i(E)$ — гармоническая мера множества $E \subset \Gamma^i$, где Γ^i — граница G^i, относительно G^i в точке z_0.

3. Для любого $E > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $E \subset \Gamma^i$ и $\omega^i(E) < \delta$, то

$$\int_E |u(z)|\, d\omega^i < E.$$

Из этого основного необходимого и достаточного условия вытекает еще следующее необходимое и достаточное условие:

4. $u(z)$ можно представить в виде: $u(z) = u_1(z) + \ldots + u_n(z)$, где $u_i(z)$ — гармонические в области G_i функции, представимые по формуле Грина ($i = 1, 2, \ldots, n$). Здесь $G_i \supset G$ и имеет границей γ_i.

В конце работы без предположения конечной связности и жордановости области G устанавливаются необходимые и достаточные условия того, что $u^*(t)$ представима интегралом Пуассона—Лебега. Они совпадают с указанными выше условиями 1, 2 и 3. В. И. Смирнов

2573. Классы аналитических функций в многосвязных областях, представимые по формулам Коши и Грина. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 215—221

Пусть G — n-связная область с жордановой границей $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Доказываются следующие результаты. Для того чтобы регулярная в G функция $f(z)$ была представима по формуле Грина

$$f(z) = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\omega(z), \qquad (1)$$

где $\omega(z) = \omega(E, z, G)$ — гармоническая мера множества $E \subset \Gamma$ относительно G, вычисленная в $z \in G$ (E — гармонически измеримое множество), необходимо и достаточно, чтобы $|f(z)|$ имел в G гармоническую мажоранту. При наличии представления (1) существует множество $e \subset \Gamma$, $\omega(e) = 1$, такое, что если $\zeta \in e$, то $f(z)$ имеет предельное значение $f(\zeta)$ по жордановой дуге, и нет предельных значений по жордановой дуге, отличных от $f(\zeta)$. Если контур Γ спрямляем, то для представимости $f(z)$ по формуле Коши через угловые предельные значения необходимо и достаточно $f(z) \in E_1(G)$, где определение класса $E_1(G)$ аналогично случаю односвязной области. Если $\infty \in G$, то надо добавить: $f(\infty) = 0$. При спрямляемости контура формула (1) переходит в обычную формулу Грина. Для этого случая устанавливается необходимое и достаточное условие совпадения классов функций, представимых формулой Коши и формулой Грина. Для односвязной области это условие имеет вид:

$$0 < C_2 < |\psi'(z)| < C_1 < \infty,$$

где $w = \psi(z)$ конформно преобразует G на $|w| < 1$. Формулировка для конечносвязной области G аналогична. В. И. Смирнов

2574. О теореме разложения для аналитических функций класса E_p в многосвязных областях. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 223—228

По определению регулярная в области G функция $f(z) \in E_p(G)$, если существует последовательность областей $\{G^j\}$, со спрямляемыми границами Γ^j, сходящаяся к G и такая, что

$$\overline{\lim_{j \to \infty}} \int_{\Gamma^j} |f(z)|^p |dz| < +\infty.$$

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть G — n-связная область с жордановой границей $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ и $G_i \supset G$ — области, ограниченные γ_i. При этом, если для некоторого $p > 0$ из $f_i(z) \in E_p(G_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), следует $f(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z) \in E_p(G)$, то Γ спрямляема.

Теорема 2. Пусть G — область указанного типа. При этом если при некотором $p > 0$ любую функцию $f(z) \in E_p(G)$ можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$, где $f_i(z) \in E_p(G_i)$, то Γ спрямляема.

В последней теореме рассматриваются нормированные разложения, т. е. $f_2(\infty) = \ldots = f_n(\infty) = 0$, причем γ_1 — внешняя граница G. В. И. Смирнов

2575. Плоская задача теории упругости для области, близкой к клину. Ефлеев А. П., Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 14, 99—107

Рассматривается первая основная задача плоской теории упругости для бесконечной области, имеющей форму клина с вершиной в начале координат. Угловая точка клина определенным образом сглаживается, и к решению задачи для вновь полученной клинообразной области применяется метод, предложенный Д. М. Волковым и А. А. Назаровым (Матем. сб., 1933, **40**, № 2). В результате автор получает некоторую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров, входящих в разложения искомых комплексных функций напряжения. Полученная система в работе не исследуется.

Отметим, что автор не накладывает никаких ограничений на характер напряженного состояния в бесконечно удаленных частях тела. Однако без этого, как показывает пример бесконечной полуплоскости, задача не будет определенной. А. И. Каландия

2576. Построение решения первой вспомогательной задачи для области, разграниченной конфокальными эллипсами. Туаев А. А., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1956, № 1 (42), 99—106 (рез. груз.)

Рассматривается вспомогательная задача о плоской деформации в случае, когда поперечное сечение составного упругого тела представляет собой совокупность сплошного эллипса и охватывающего его конфокального эллиптического кольца. С точки зрения математической задача заключается в определении двух пар функций комплексной переменной $\varphi_i(z)$, $\psi_i(z)$, $i=0,1$, причем функции φ_0, ψ_0 голоморфны внутри эллиптического кольца, а φ_1, ψ_1 — внутри эллипса, по заданным соотношениям между значениями искомых функций и их первых производных на полной границе эллиптического кольца. Эллиптическое кольцо отображается на круговое, затем искомые голоморфные функции представляются в виде рядов Лорана, после чего на основании контурных условий получается относительно коэффициентов разложений бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Дается исследование этой системы, чем завершается решение задачи.

Примечание референта. Отметим, что полученная автором бесконечная система уравнений равносильна в смысле математических трудностей, сопровождающих ее исследование, той, которая получается при рассмотрении тем же способом основной задачи плоской теории упругости для эллиптического кольца. Эта последняя задача изучалась в работах М. П. Шереметьева и референта (РЖМат, 1953, 1213), которыми существенно пользуется автор без нужных указаний. А. И. Каландия

2577. Некоторые граничные задачи теории упругости для плоской составной области. Гогсадзе Р. Ш., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 4 (52), 107—134 (груз.; рез. русск.)

Рассматриваются граничные задачи изгиба тонкой пластинки, первая и вторая задачи плоской теории упругости для областей, составленных из различных упругих материалов, и вспомогательные задачи (Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1949). Автор, применяя метод Колосова — Мусхелишвили, сводит решение этих задач к решению одной граничной задачи теории функции комплексного переменного. Отдельно рассматривается случай, когда область состоит из двух областей: эллипса и конфокального эллиптического кольца. А. Я. Горгидзе

2578. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости. Тер-Крикоров А. М., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 2, 177—200

Рассматривается установившееся движение вихря под поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины. Вопрос сводится к нахождению функции $w(z)=\varphi+i\psi$, аналитической в области D, ограниченной прямой S: $y=0$ и некоторой неизвестной кривой $L: y=Y(x)$, подчиненной условию $\lim\limits_{x\to-\infty} Y(x)=1$. Функция $w(z)$ по предположению должна иметь логарифмическую особенность в точке $z=i\alpha$, $\alpha>0$ и удовлетворяет краевым условиям

$$\psi=1,\quad \frac{1}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2+\nu y=\text{const на } L,$$

$$\psi=0 \text{ на } S,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{dw}{dz}=1,$$

где ν — постоянная, равная ускорению силы тяжести. Последняя задача сводится к нелинейному интегральному уравнению специального вида, для которого показывается существование и единственность решения, а также показывается возможность получения этого решения методом итераций. Таким образом, поставленная вначале задача получает решение в законченном виде, если скорость движения вихря c удовлетворяет условию $c^2>gH$, где H — глубина жидкости, g — ускорение силы тяжести, а отношение циркуляции Γ к cH достаточно мало. Г. Н. Положий

2579. Применение конформных отображений к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа интерполяционным методом. Золин А. Ф., Докл. АН УзССР, 1956, № 11, 3—9 (рез. узб.)

Рассматривается задача Дирихле для круга. Пусть на окружности $|z|=1$ выбраны узлы $z_k=e^{i\varphi_k}$, $\varphi_k=\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0,1,2,\ldots,2n)$ и построен тригонометрический полином $S_n(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{n} r^m(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)$, коэффициенты которого определяются по формулам тригонометрической интерполяции из условий $f(\varphi_k)=S_n(1,\varphi_k)$, где $f(\varphi)$ — заданная непрерывная функция на $|z|=1$. Если $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(\varphi)$, и выполнено условие $\lim\limits_{\delta\to0}\omega(\delta)\ln\delta=0$, то по известной теореме тригонометрические полиномы $S_n(1,\varphi)$ сходятся равномерно к $f(\varphi)$. Поэтому функции $S_n(r,\varphi)$ будут сходиться равномерно в круге к гармонической функции, решающей задачу Дирихле.

Указанные соображения вместе с конформным отображением автор применяет дальше к решению задачи Дирихле для области ограниченной кардиоидой или лемнискатой. Для кардиоиды $\rho=2d\cos^2\frac{\vartheta}{2}$ при расположенных на ней узлах $\vartheta_k=\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0,1,\ldots,2n)$ строятся гармонические функции $\sigma_n(\rho,\vartheta)=\sum_{m=0}^{n}(A_m\rho^{m/2}\cos\frac{m}{2}\vartheta+B_m\rho^{m/2}\sin\frac{m}{2}\vartheta)$, которые сходятся равномерно на границе области к $f(\vartheta)$ при выполнении условия Дини — Липшица. Коэффициенты A_m и B_m определяются из условий

$$\sigma_n\left(2d\cos^2\frac{\vartheta_k}{2},\vartheta_k\right)=f(\vartheta_k)\quad(k=0,1,\ldots,2n).$$

В замкнутой области $\sigma_n(\rho,\vartheta)$ сходятся равномерно к решению задачи Дирихле. Указывается на возможность применения этого метода и для других областей. С. Я. Альпер

2580. Достаточные условия однолистности решения трех обратных краевых задач. Аксентьев Л. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 32—35

Доказываются достаточные условия однолистности решения следующих трех обратных краевых задач гидромеханики: а) определить профиль основания плотины по заданной в функции длины дуги искомого профиля скорости фильтрации $v = f(s)$; б) определить профиль крыла, обтекаемого плоским чисто циркуляционным потоком несжимаемой жидкости, по заданной вдоль прифиля скорости потока $v = f(s)$; в) то же, что и в задаче 2, но поток считается бесциркуляционным, а угол атаки — нулевым. Основной задачей является первая, две другие легко приводятся к ней.

Главный результат работы состоит в установлении следующего достаточного условия однолистности решения задачи а): для однолистности решения обратной задачи теории фильтрации достаточно выполнения (кроме обычных условий разрешимости) одного из следующих условий:

$$1)\ |f(s_1)-f(s_2)| \leqslant \left(\alpha+\beta+\pi\frac{1-\alpha-\beta}{2}\right)\times \left|\sin\frac{\pi\varphi(s_1)}{kH}-\sin\frac{\pi\varphi(s_2)}{kH}\right|;$$

$$2)\ \left|f(s_1)-f(s_2)\right| \leqslant \left[\alpha+\beta+\pi(1-\alpha-\beta)\right]\times \left|\sin\frac{\pi\varphi(s_1)}{kH}-\sin\frac{\pi\varphi(s_2)}{kH}\right|$$

и $f(s)$ — монотонная функция.
Потенциал $\varphi(s)$ получается по формуле

$\varphi(s)=\int_*^s f(s)ds-\frac{kH}{2}$, где k— коэффициент проницаемости среды, а H—напор. В. С. Рогожин

2581. О граничных задачах теории функций комплексного переменного в теории фильтрации. Положий (Про граничні задачі теорії функцій комплексного змінного в теорії фільтрації. Положій Г. М.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1954, **13**, № 8, 121—132 (укр.; рез. русск.)

Анализируются краевые задачи плоской стационарной теории фильтрации в однородной среде с точки зрения возможности их решений при помощи формул, дающих в явной форме решение основной граничной задачи теории функций комплексного переменного для одной из канонических областей (круга или полуплоскости).

Проведенный автором анализ позволил объединить семь известных типов плоских фильтрационных задач при помощи четырех более широких классов таких задач. При этом для задач четвертого класса, — наиболее сложных задач теории фильтрации, — благодаря введению в качестве независимой переменной производной от комплексного потенциала $w'=\frac{dw}{dz}$ и в качестве искомой функции величины $w''=\frac{d^2w}{dz^2}$, контурные условия получены в очень простой форме.

Доказано, что решения всех четырех классов задач теории фильтрации могут быть получены с помощью решений граничных задач теории функций или при помощи формул Келдыша — Седова (Келдыш М. В., Седов Л. И., Докл. АН СССР, 1937, **17**, № 1).

Входящие в эти формулы числовые параметры определяются из условия единственности решения данного класса задач. Библ. 17 назв. П. Ф. Фильчаков

2582. О регулярных функциях, подчиненных выпуклой функции и симметричной звездообразной функции. Линь Вэй, Чжуншань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), 1957, № 2, 19—28 (кит.; рез. русск.)

В связи с известными результатами Г. М. Голузина о мажорации подчиненных аналитических функций автор решает аналогичные задачи в случае, когда для функции $f(z)$ подчиняющая функция $F(z)$ является выпуклой или симметричной звездообразной в единичном круге. Для радиусов наибольших кругов, в которых верны неравенства $|f(z)| \leqslant |F(z)|$, $|f'(z)| \leqslant |F'(z)|$, найдены некоторые оценки снизу и сверху. Из резюме автора

2583. Звездообразные типично вещественные функции. Чжан Кай-мин (Chang Kai-ming), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, **8**, № 1, 12—22 (кит.; рез. англ.)

Пусть T_r^{k*} обозначает класс функций $f(z)$, имеющих разложение вида

$$f_k(z)=z^k+a_{k+1}^{(k)}z^{k+1}+\ldots+a_n^{(k)}z^n+\ldots \qquad (n\geqslant k)$$

и обладающих следующими свойствами: 1) $f_k(z)$ регулярна в круге $|z|<1$, и все коэффициенты $a_n^{(k)}$ вещественны; 2) существует такое число $\delta=\delta(f_k)$, $0<\delta<1$, что для всякого r из промежутка $1-\delta<r<1$ радиус-вектор $0,f_k(re^{i\varphi})$ вращается против часовой стрелки и делает k полных оборотов, когда φ изменяется монотонно от 0 до 2π.

Доказывается, что для функций $f_k(z)\in T_r^{k*}$ имеет место представление

$$f_k(z)=z^k\exp\left\{-\frac{k}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-2z\cos\theta+z^2)\,d\alpha(\theta)\right\},$$

где $\alpha(\theta)$—неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\int_0^{\pi}d\alpha(\theta)=\pi$. Отсюда выводятся точные оценки для $|f_k(z)|$ снизу и для величин $\left|\frac{zf_k'(z)}{f_k(z)}\right|$, $\arg\frac{zf_k'(z)}{f_k(z)}$, $\arg f_k'(z)$ снизу и сверху.

Для коэффициентов $a_{k+pn}^{(k)}(\rho,p)$ функций $f_{k,p}(z)=z^k+\sum_{n=1}^{\infty}a_{k+pn}^{k}(\rho,p)\cdot z^{k+pn}\in T_r^{k*}$, удовлетворяющих дополнительному условию $\Re\left\{\frac{zf'_{k,p}(z)}{f_{k,p}(z)}\right\}>k\rho$, $0<\rho<1$, даются точные оценки

$$\left|a_{k+pn}^{(k)}(\rho,p)\right|\leqslant\frac{\prod_{s=0}^{n-1}[2k(1-\rho)+sp]}{p^n n!}$$

С. А. Гельфер

2584. Две теоремы об ограниченных функциях. Рао (Two theorems on bounded functions. Rao K. Narasimha Murthy), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 430—435 (англ.)

Автор называет ограниченными функции $f(z)$, регулярные в круге $|z|<1$ и удовлетворяющие в нем условию $|f(z)|<1$.

В статье доказаны:

Теорема 1. Если $f(z)$ ограничена и $f(0)=k$ ($|k|=\rho\leqslant 1$), то

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1-|k|^2}{(1-|kz|)^2},\ \text{при}\ |z|\leqslant x(\rho),$$

$$|f'(z)|\leqslant\frac{(1+|k|)(1+|z|^2)^2}{4|z|(1-|z|^2)(1+|kz^2|)},\ \text{когда}\ |z|\geqslant x(\rho),$$

где $x(\rho)$ — единственный положительный корень уравнения

$$\rho x^3 + (1-2\rho)x^2 + (2-\rho)x - 1 = 0.$$

Оценка точная.

Теорема 2. Если $f(z)$ ограничена и

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)} H(0) \neq 0,$$

то

$$|f'(z)| \leqslant n|z|^{n-1} \quad \text{при} \quad |z| \leqslant \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n},$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{4|z|^2 + n^2(1-|z|^2)^2}{4(1-|z|^2)}|z|^{n-2} \quad \text{при}$$

$$|z| \geqslant \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}.$$

Оценка точная.

Обе теоремы являются обобщением известной теоремы Дьёдонне (частный случай теоремы 1 при $k=0$ и теоремы 2 при $n=1$). Ю. Г. Фридман

2585. Неравенства для целых функций. Клуни (Inequalities for integral functions. Clunie J.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 33, 1—7 (англ.)

Пусть $\chi(r)$ — функция, имеющая непрерывную производную n-го порядка. $f(z)$ — целая функция, $M(r) = \max|f(z)|$ и $M_n(r) = \max|f^{(n)}(z)|$ при $|z| = r$.

В работе доказана теорема: Если $M(r) \leqslant \chi(r)$ для всех достаточно больших r, то для любого $k > 1$ существует бесконечная последовательность r таких, что

$$M_n(r) < k\chi^{(n)}(r).$$

В ходе доказательства теоремы используется ряд лемм, из которых представляет самостоятельный интерес лемма 4:

Если $\alpha > 0$ фиксированное, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{(n-1)!\,M(r)} \int_\alpha^r (r-\rho)^{n-1} M_n(\rho)\,d\rho = 1.$$

Г. А. Фридман

2586. О коэффициентах целых аналитических функций. Зайцев М. Н., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 3, 3—8

А. О. Гельфонд (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1941, 5, 96) показал, что если целая функция $F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ имеет определенный порядок роста и является периодической, т. е. удовлетворяет уравнению

$$F(z+\omega) - F(z) = 0, \tag{1}$$

то у нее не может быть очень много (много в некотором вполне определенном смысле) коэффициентов a_n, равных нулю.

В статье этот результат обобщается на случай целой функции $F(z)$, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} F^{(n)}(z) = 0, \tag{2}$$

более общему, чем уравнение (1). Предполагается, что $F(z)$ порядка $\rho_0 > 1$, функция

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$$

(характеристическая функция для уравнения (2)) первого порядка конечного типа с простыми нулями α_k. Относительно нулей допускается, что их можно отделить друг от друга окружностями $|t - \alpha_k| = \varepsilon_k$, на которых выполняется неравенство

$$|\varphi(t)| > \exp\{-|t|^{\frac{\rho-\delta}{\rho-1}}\},$$

где $\rho > \rho_0$, $0 < \delta < 1$. При указанных условиях показывается, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N(n)}{n} \geqslant \frac{1}{2\rho_0},$$

где $N(n)$ — число коэффициентов $a_k \neq 0$ из группы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. А. Ф. Леонтьев

2587. О максимумах модулей целых функций. Эрдёш, Кёвари (On the maximum modulus of entire functions. Erdös P., Kövári T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 3-4, 305—317 (англ.; рез. русск.)

Доказаны две следующие теоремы:

Теорема 1. Если $f(z)$ — целая функция, а $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$, то существует такая целая функция $N(r) = \sum c_n r^n$ с неотрицательными коэффициентами, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{6} < \frac{M(r)}{N(r)} < 3 \qquad (0 \leqslant r < \infty). \tag{1}$$

Теорема II. Существует абсолютная константа $\varepsilon_0 = \frac{1}{200}$ и максимум-модуль функции $M(r)$ такие, что для всякого степенного ряда $N(r)$ с неотрицательными коэффициентами неравенство

$$e^{-\varepsilon_0} < \frac{M(r)}{N(r)} < e^{\varepsilon_0}$$

нарушается при сколь угодно больших r.

Примечание референта. В более общей постановке вопрос был рассмотрен референтом (РЖМат, 1955, 684), который построил двусторонние неравенства между произвольной нормально возрастающей функцией и целыми функциями с неотрицательными коэффициентами. Комбинируя неравенство (1) с рассуждениями референта, легко получить, что всякая нормально возрастающая функция $\Phi(r)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{6} < \frac{\Phi(r)}{N(r)} < 3r, \quad r < 1.$$

В. С. Виденский

2588. Новое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна и ее применение. Чжан Ши-сюнь, Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэбань), 1955, № 1, 5—15 (кит.)

Статья является переводом на китайский язык работы которую автор ранее опубликовал по-английски (Proc. Cambridge Phil Soc., 1952, 48, № 1, 87—92).

С. Н. Бернштейн (Собр. соч. том 1, статья № 27) доказал, что если

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{\beta_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} \tag{1}$$

есть целая функция рода нуль, то выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n}|^{1/2n} < e\left(\sqrt{3} + \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^{-1}. \tag{2}$$

Автор дает два новых доказательства этой теоремы, а также указывает следующее ее обобщение. Если сходится

ряд $\Sigma|\beta_n|^{-2/m}$, $m \geqslant 2$, то справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n}|^{1/nm} < \frac{e\pi}{m\sin\frac{\pi}{m}} \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^{-2/m}. \qquad (3)$$

Константа, стоящая перед суммой в правой части (3), уменьшена быть не может. В качестве приложения полученных результатов к интегральным уравнениям автор рассматривает составное ядро $K(x, y)$ с множителями $A(x, y)$ и $B(x, y)$, принадлежащими к L_2.

В. С. Виденский

2589. Некоторые классы римановых поверхностей, характеризуемые посредством экстремальной длины. Кусуноки (Some classes of Riemann surfaces characterized by the extremal length. Kusunoki Yukio)[t], Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 6, 406—408 англ.)

Вводятся два подкласса O', O'' класса O_G римановых поверхностей R с нулевой границей, $O'' \subset O' \subset O_G$, характеризуемых равенством нулю экстремальной длины некоторых семейств линий на R. Дается необходимый теоретико-функциональный признак для $R \in O'$, достаточный признак для $R \in O''$ и доказывается строгость включения $O' \subset O_G$ в случае бесконечного рода (для конечного рода все три класса O'', O', O_G совпадают). На класс O', в частности и на O'', обобщается риманово соотношение периодов в следующей форме: существует исчерпание поверхности $R \in O'$ и соответствующий ему, в некотором смысле, канонический базис гомологий $\{(A_i, B_i)\}$ такие, что для всяких двух абелевых дифференциалов $df_j = du_j + i dv_j$ $(j = 1,2)$ с конечной нормой на R выполняются соотношения

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{k_\nu} \left(\int_{A_i} df_1 \int_{B_i} df_2 - \int_{B_i} df_1 \int_{A_i} df_2 \right) = 0,$$

$$\iint_R \operatorname{grad} u_1 \operatorname{grad} u_2 \, dxdy = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{k_\nu} \left(\int_{A_i} du_1 \int_{B_i} dv_2 - \int_{B_i} du_1 \int_{A_i} dv \right),$$

где последовательность $\{k_\nu\}$ связана с исчерпанием и базисом. (См. также РЖМат, 1958, 4665). Л. И. Волковыский

2590. К одной теореме Гросса о звездообразных областях. Оцука (Sur un théorème étoilé de Gross. Ohtsuka Makoto), Nagoya Math. J., 1955, **9**, oct., 191—207 (франц.)

Результаты тесно примыкают к статьям автора (РЖМат, 1956, 5840, 5841). Новым является использование экстремальных длин с весом, а также более общего класса квазиконформных отображений — квазиконформных отображений в смысле Пфлугера-Альфорса, т. е. внутренних отображений, изменяющих модуль всякого четырехугольника, лежащего в произвольной замкнутой подобласти, в равномерно (для этой подобласти) ограниченное число раз (Песин И. И., Матем. сб., 1956, **40**, 281—294; Mori A., Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, 56—77). Для простоты мы уменьшим общность. Пусть F — риманова поверхность, $\pi(P)$ и $\rho(P)$ — действительные неотрицательные функции от $P \in F$, являющиеся измеримыми относительно локального параметра (последнего автор не предполагает). Пусть $\{c\}$ — семейство спрямляемых кривых на F. Модулем $M_\pi\{c\}$ семейства $\{c\}$ с весом $\pi(P)$ называется $\inf \iint_F \pi\rho^2 \, dxdy$, где inf берется по всем ρ таким, что для всех $c \in \{c\}$ $\int_c \rho ds \geqslant 1$. $1/M_\pi\{c\} = \lambda_\pi\{c\}$ называется экстремальной длиной семейства $\{c\}$ с весом π. Если $\pi(P) \equiv 1$, то $\lambda_\pi\{c\} = \lambda\{c\}$. Экстремальная длина с весом обладает обычными свойствами экстремальных длин, а также тем свойством, что для семейства $\{c_1\}$, в которое переводится квазиконформным отображением с характеристикой $q(P)$ семейство $\{c\}$, $\lambda\{c_1\} \leqslant \lambda_{1/q}\{c\}$. Главным результатом статьи является теорема 1, которую приводим в ослабленной формулировке.

Пусть F — риманова поверхность и L — ее граничный элемент, определяемый монотонной последовательностью областей D_n с относительной границей c_n, состоящей из регулярных кривых. Пусть G — область $z = x + iy$ — плоскости вида $0 < x < 1$, $0 < y < h(x) \leqslant \infty$ и $f(z)$ гомеоморфно отображает G на F, причем $f^{-1}(P)$ дифференцируема и абсолютно непрерывна относительно локального параметра и осуществляет отображение с характеристикой $q(P)$. Пусть $\{c_n\}$ — семейство кривых c^n, разделяющих на F c_1 и c_n, такое, что $\lambda_{1/q}\{c^n\} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, если для всякого $x \in X \subset (0,1)$ $h(x) < +\infty$ и существует последовательность $y_p \to h(x)$ такая, что $f(x + iy_p) \to L$ при $p \to \infty$ для всех $x \in X$, то линейная мера mes $X = 0$.

Теорема 3. Пусть Δ — открытая область на F с относительной границей, состоящей из двух конечных или счетных систем c_1 и c_2 регулярных кривых на F; $\{\gamma\}$ — семейство кривых, соединяющих c_1 и c_2 в Δ; A — семейство гармонических на Δ функций $u(P)$ таких, что $\overline{\lim_{c_1}} u(P) \leqslant 0$ и $\underline{\lim_{c_2}} u(P) \geqslant 1$, $v(P)$ — функция, сопряженная с $u(P)$. Тогда для всех $u(P) \in A$

$$\int_0^1 dc \left\{ \int_{u(P)=c} dv \right\}^{-1} \leqslant \lambda\{\gamma\},$$

причем существует $u_0(P) \in A$, для которой достигается равенство.

Далее результаты цитированных статей автора относительно параболических преобразований переносятся на случай квазиконформных отображений в смысле Пфлугера-Альфорса. Наиболее просто сформулированным результатом является теорема 6.

Пусть $f(\zeta) \not\equiv \text{const}$ осуществляет непрерывное отображение $U_\zeta : |\zeta| < 1$ на риманову поверхность F над ω-плоскостью. Предположим, что это отображение локально квазиконформно по Пфлугеру-Альфорсу за исключением множества E_ζ, замкнутого в U_ζ, чей образ $E = f(E_\zeta)$ на F имеет линейную меру нуль (т. е. E можно заключить в систему замкнутых спрямляемых кривых со сколь угодно малой суммарной длиной). Обозначим $S(t)$ евклидову площадь с плотностью q, равной характеристике отображения, части римановой поверхности, гомеоморфной $U_\zeta - E_\zeta$, проектирующейся в $|\omega - a| < t < 1$. Если можно выбрать последовательность $1 > t_1 > t'_1 \geqslant t_2 > t'_2 \geqslant \ldots \to 0$ такую, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (t_\nu - t'_\nu)^2 / (S(t_\nu) - S(t'_\nu)) = \infty,$$

то множество $e^{i\theta}$, для которых $\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\theta}) = a$, имеет логарифмическую емкость нуль.

Как отмечает автор, часть его результатов тесно примыкает к результатам Штребеля (Strebel K., РЖМат, 1957, 3054), с которыми он познакомился после написания статьи.

А. А. Гольдберг

2591. Аппроксимационная теорема для гармонических функций на римановых поверхностях. Пфлугер (Ein Approximationssatz für harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen. Pfluger Albert. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A—I, № 216, 8 S.) (нем.)

Теорема. Пусть R — некомпактная риманова поверхность, F—область R с компактным замыканием, причем $R \setminus F$ состоит из некомпактных компонент, A — замкнутое множество в F. Если u—гармоническая функция в F, то для любого $\varepsilon > 0$ существует гармоническая на R функция u', причем $|u - u'| < \varepsilon$ на A.

Доказательство основано на интегральном представлении гармонической функции и лемме о перемещении особенностей. Даны приложения к построению гармонических функций с заданными изолированными особенностями и к представлению дважды непрерывно дифференцируемого дифференциала $\omega = pdx + qdy$ в виде $\omega = \varphi + df_1 + *df_2$, где $*$ обозначает сопряженный дифференциал, а φ — гармонический дифференциал. Н. С. Ландкоф

2592. Теория функций кватернионов; классификации. III. Нисигаки (A theory of quaternion-functions, by classifications. III. Nisigaki Hisami. Mem. School Sci. Engng. Waseda Univ., Tokyo, 1954, № 18, 108—109 (англ.)

Части I и II см. Mem Fac. Sci. Eng. Waseda Univ. Токуо, 1951, № 15, 6—14; 1952, № 16, 122—126.

2593. Функции от матриц. Аманте (Funzioni di matrici. Amante S. Matematiche, Catania, 1953, **8**, № 2, 19—20) (итал.)

2594. К определению функций от матриц. Лерер (Sur la définition des fonctions de matrices. Lehrer Yehiel), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 6, 870—872 (франц.)

Дается определение функции от матрицы, применимое к многозначным функциям.

Пусть $X = \| x_{ij} \|_1^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — комплексные матрицы, $f(z)$ — функция комплексного переменного. Положим

$$f_{ij}(X) = \sum_{r=0}^{n-1} x_{ij}^{(r)} S_r(\xi),$$

где

$$x_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}, \quad x_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^{(r-1)} x_{kj}, \quad S_r(\xi) = \frac{\nu_r(\xi)}{\nu(\xi)},$$

$\nu(\xi) = \left| \xi_j^{i-1} \right|_1^n$ —определитель Вандермонда, $\nu_r(\xi)$ получается из $\nu(\xi)$ заменой строки $\xi_1^{r-1}, \xi_2^{r-1}, \ldots, \xi_n^{r-1}$ строкой $f_{d_1}(\xi_1), f_{d_2}(\xi_2), \ldots, f_{d_n}(\xi_n)$, где $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ определяет одинаковые или разные ветви $f(z)$.

Имея матрицу A со спектром $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, определяем (ij)-элемент $f(A)$ следующим образом: $[f(A)]_{ij} = \lim f_{ij}(X)$ при $X \to A$, $\xi \to \lambda$. Это определение дает различные значения $f(A)$ согласно различным d и различным способам стремления X к A и ξ к λ.

Приводится пример $f(z) = \sqrt{z}$, $A = \left\| \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\|$, в котором это определение дает общее решение уравнения $X^2 = A$ (существующие определения дают лишь $\sqrt{A} = \left\| \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\|$).

П. А. Шварцман

2595. О комплексной форме леммы Пуанкаре. Никкерсон (On the complex form of the Poincaré lemma. Nickerson H. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 183—188 (англ.)

Пусть $d = \partial + \bar{\partial}$ — разложение оператора внешнего дифференцирования форм на комплексном многообразии M в сумму операторов типов (1,0) и (0,1) соответственно. Пусть U открыто в M и $m \in U$. Строится такой оператор k типа (0, —1), определенный на формах, у которых все частные производные коэффициентов ограничены в некоторой окрестности v точки m в U, что $\bar{\partial} k\varphi + k\bar{\partial}\varphi = \varphi$ в v для любой формы φ, определенной в U. А. Л. Онищик

2596. Конформные отображения евклидовых пространств на себя. Неванлинна (Die konformen Selbstabbildungen des euklidischen Raumes. Nevanlinna Rolf. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1954 (1955), **A19**, 133—139) (нем.)

Данная статья содержит новое доказательство следующего утверждения: Для $n \geqslant 3$ единственными конформными отображениями n-мерного евклидова пространства на себя являются отображения

$$y = \lambda UTx, \quad y = \lambda UkTx,$$

где T — смещение, U — вращение и R — инверсия. Скалярный множитель λ осуществляет преобразование гомотетии. В отличие от классического метода доказательства, здесь совсем не используются основные уравнения теории поверхностей. Понятия, используемые при доказательстве, суть понятия дифференциального исчисления в векторных пространствах с метрикой, определяемой внутренним произведением. Применяемые рассуждения без изменения проходят и в случае пространства Гильберта.

A. E. Taylor

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 525

2597 Д. Метод линейных преобразований в теории линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Протасов В. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск. — н/Д. ун-т, Таганрог, 1958

2598 Д. Специальные классы аналитических функций в круге и круговом кольце. Касьянюк С. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. политехн. ин-т, Киев, 1958

См. также: 2305, 2500, 2520, 2523, 2524, 2655, 2797, 2807, 2830, 2838, 2840, 3257

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2599. Метод уравнений сравнения при решении линейных дифференциальных уравнений второго порядка (обобщенный метод ВБК). Дингл (The method of comparison equations in the solution of linear second-order differential equations (generalized W. K. B. method). Dingle R. B.), Appl. Scient. Res., 1956, **B5**, № 5, 345—367 (англ.)

Дана общая схема построения приближенных решений уравнения

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \gamma(x)\, u(x). \qquad (1)$$

В качестве уравнения сравнения можно взять любое уравнение

$$\frac{d^2U(\sigma)}{d\sigma^2} = \Gamma(\sigma) U(\sigma), \qquad (2)$$

интегралы которого известны (в статье дана большая таблица таких уравнений). Предположив, что

$$u(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} U(\sigma), \qquad (3)$$

получим уравнение для определения функции $\sigma(x)$:

$$\gamma(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 \Gamma(\sigma) + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}.$$

Если вторым слагаемым справа можно пренебречь, то $\sigma(x)$ легко находится, и формула (3) дает приближенное решение уравнения (1). Это справедливо, например, при $\gamma(x) \approx \Gamma(\sigma)$ или при $\gamma(x)/\Gamma(\sigma) \gg 1$.

Формулы, полученные при $\Gamma(\sigma) = 1$, соответствуют так называемому методу ВБК; случай $\Gamma(\sigma) = \sigma$ исследовался Лангером. Оба эти случая подробно рассмотрены в работе. Вычислены поправки к $\sigma(x)$. Фундаментальные решения уравнения (2) при $\Gamma(\sigma) = \pm\sigma$ табулированы. Есть указания на возможность применения метода в теории возмущений.

Примечание референта. Эта же схема построения приближенных решений приведена в статье В. П. Коноплева (реф. 2633). И. М. Соболь

2600. О решениях дифференциального уравнения $x^n + A(t)x = 0$, удовлетворяющих условиям, заданным в нескольких точках. Крживицкая Е. (Sur les solutions de l'équation différentielle $x^{(n)} + A(t)x = 0$ qui satisfont à des conditions données dans plusieurs points. Krzywicka E.), Bull. Acad. polon. sci., 1955, Cl. 3, 3, № 10, 521—522 (франц.); Бюл. Польской АН, 1955, отд. 3, 3, № 10, 515—516

Рассматривается вопрос существования и единственности решения уравнения $x^{(n)} + A(t)x = 0$, когда значения решения и его производных заданы в r ($r \leqslant n$) различных точках $a_1 < \ldots < a_r$. Статья не содержит даже намеков на доказательства. Н. И. Мозжерова

2601. Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями. Курцвейль Я., Прикл. матем. и механ., 1958. 22, № 1, 27—45

Рассматривается обобщенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \qquad (1)$$

(РЖМат, 1958, 8823). Функция $F(x,t)$ может иметь разрывы 1-го рода, и в этом случае решения уравнения (1) являются разрывными функциями. При более общих предположениях, чем в цитированной статье, доказываются теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения уравнения (1) от параметра.

Пусть функция $h_1(t)$ возрастающая и непрерывная слева, $\omega(\tau_1)$ — возрастающая непрерывная, $\omega(0) = 0$, x — точка n-мерного пространства, $F(x,t)$ — n-мерная вектор-функция, определенная при $(x,t) \in G$, G — область, причем для любых точек $(x_i, t_k) \in G$ $(i, k = 1,2)$

$$\|F(x_1,t_2) - F(x_1,t_1)\| \leqslant |h_1(t_2) - h_1(t_1)|,$$

$$\|F(x_2,t_2) - F(x_2,t_1) - F(x_1,t_2) + F(x_1,t_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\|x_2 - x_1\|)\,|h(t_2) - h(t_1)|,$$

где $\|\ \|$ — длина n-мерного вектора. Пусть G_F — подмножество таких точек $(x,t) \in G$, что $(x + F)(x, t+) - F(x,t), t) \in G$. Тогда для любой точки $(x_0, t_0) \in G_F$ существует при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + \xi$, где ξ достаточно мало, решение $x(\tau)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$; решение непрерывно слева и имеет ограниченное изменение. При возрастании τ решение продолжимо до тех пор, пока $(x(\tau), \tau) \in G_F$ но, при убывании τ решение может быть не продолжимо Если $\omega(\eta) \equiv \eta \cdot \text{const}$, то решение единственно при $\tau \geqslant t_0$.

А. Ф Филиппов

2602. Односторонняя неединственность для обыкновенных дифференциальных уравнений. Плись (One-sided non-uni queness in ordnary differential equations. Pliś A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 583—588 (англ.; рез. русск.)

Приводится пример системы вида

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(t,x,y)$$

(функции f_1 и f_2 непрерывны), для которой все точки пространства (t,x,y) являются точками левосторонней единственности и одновременно точками правосторонней неединственности. Для одного уравнения аналогичный пример, но без требования, чтобы неединственность была односторонней, был построен М. А. Лаврентьевым (Math. Z., 1925, 23, 197—209). А. Ф. Филиппов

2603. Об интегралах систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Еругин Н. П., Докл. АН БССР, 1958, 2, № 4, 143—146

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad (1)$$

где $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ — рациональные функции относительно t. Указывается способ отыскания независимых интегралов системы (1), не зависящих от t.

Предложенный способ демонстрируется на связанной с проблемой Римана системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_4}{t}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_4}{1-t}, \qquad \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_4}{t(t-1)},$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)x_5 + 2x_2x_1 - 2x_3x_1}{1-t} -$$

$$- \frac{(\xi_1 - \xi_2)x_5 + 2x_2x_3 - 2x_2x_1}{t},$$

$$\frac{dx_5}{dt} = \left[\frac{\xi_2 - \xi_1}{1-t} + \frac{\xi_3 - \xi_1}{t}\right] x_4.$$

Для указанной системы находятся все независимые интегралы, не зависящие от t. Е. А. Барбашин

2604. Об одном дифференциальном уравнении Т. Леко. Чобанов (Über eine Differentialgleichung von T. Leko. Tschobanow Iw.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, 60, № 3, 115—116 (нем.)

Уравнение

$$yy'' + [q(x)y]'y = F(z),$$

где $z = y' + q(x)y$, интегрируется в квадратурах. Этот результат обобщает теорему Леко (РЖМат, 1958, 2894). И. М. Соболь

2605. Об одном классе дифференциальных уравнений. Чобанов, Паскалев (Über eine Klasse von Differentialgleichungen. Tschobanow Iw., Paskalew G.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, 60, № 3, 116—118 (нем.)

Обобщается класс интегрируемых в квадратурах уравнений, указанный в предыдущей работе (реф. 2604). В частности, интегрируется в квадратурах уравнение

$$u'' + ax^{-(n+3)}u^n = 0.$$

И. М. Соболь

2606. Свойства матриц второго порядка и их применение к решению в квадратурах некоторых систем дифференциальных уравнений. Федоров Г. Ф., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 3, 217—224

Статья делится на две части. В первой части исследуются некоторые свойства произведения нескольких матриц, а также суммы двух матриц с определителями, равными нулю. Во второй части с помощью их устанавливаются три достаточных условия для того, чтобы была разрешима в квадратурах система:

$$\frac{dy}{dx} = y\,(\bar{u}_0\varphi_0 + \bar{u}_1\varphi_1 + \bar{u}_2\varphi_2),$$

где $\bar{u}_j$ $(j = 0,1,2)$ — постоянные матрицы второго порядка, φ_j $(j = 0,1,2)$ — скалярные функции от x.

Примечание референта. У автора встречается много неточностей. Например, если в § 1 взять след от правой и левой частей (5), то мы не получим третьего равенства (7), хотя это и утверждал автор. Оно может быть получено из (3) в следующем виде:

$$\sigma_{012} + \sigma_{102} = \sigma_0\sigma_{12} + \sigma_1\sigma_{02} + \sigma_2\sigma_{01} - \sigma_0\,\sigma_1\sigma_2.$$

В статье имеются опечатки. В. В. Леонов

2607. К вопросу о решении однородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде целого полинома. Коновалов И. М., Тр. Ленингр. ин-та инж. водн. трансп., 1958, вып. 25, 121—125

2608. О регулярных решениях в особой точке системы нелинейных дифференциальных уравнений. Басс (On the regular solutions at point of singularity of a system of non-linear differential equations. Bass Robert W.), Amer. J. Math., 1955, 77, № 4, 734—742 (англ.)

Семейство регулярных функций, существенно зависящих от параметров $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$, названо алгеброидным m-параметрическим семейством, если все коэффициенты разложений данных функций суть алгеброидные функции $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Основной результат: Пусть дана система

$$B(z)\,dw/dz = f(z,w), \qquad (1)$$

где z — независимая переменная (комплексная, как и все остальные величины), w — n-вектор, f — $(n+1)$-вектор-функция, B — $n \times n$-матрица-функция. Пусть f и B регулярны для достаточно малых по модулю значений аргументов и: 1) $f(z,0) \equiv 0$, 2) $\det B(z)$ имеет в $z = 0$ s-кратный изолированный нуль $(s < n)$. Тогда существует (по крайней мере) $(n-s)$-параметрическое алгеброидное семейство решений (1), регулярных при $z = 0$.

Если f регулярно зависит от $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то указанные регулярные решения (1) алгеброидно зависят от $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

В доказательстве использована теория неявных функций исчислимого множества аргументов Винтнера (Math. Z., 1928, 28, 457—470).

Для $f(z,w) = F(z)\,w$, $F(z) - n \times n$-матрица, соответствующее предложение было доказано Леттенмайером (см., например, Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ч. 1, М., Изд-во ин. лит., 1950, стр. 109). Ю. С. Богданов

2609. Устойчивость интегралов системы дифференциальных уравнений в комплексной области. Вейвода (Stabilita integrálů soustavy diferenciálních rovnic v komplexním eboru. Vejvoda Otto), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 2, 137—159 (чешск.; рез. русск., англ.)

Исследуется устойчивость тривиального решения системы

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}z_k + Z_j(t, z_1, \ldots, z_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $Z_j = \sum_{k_1+\ldots+k_n>2} c_{k_1\ldots k_n}(t)\,z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots z_n^{k_n}$, $0 < t < \infty$;

далее дается формулировка теорем об устойчивости и неустойчивости (второй метод Ляпунова); аналогичным способом, как в случае действительной области, доказывается существование функции Ляпунова V в виде эрмитовой формы $V = \sum g_{jk}z_k\bar{z}_k$, $g_{jk} = \bar{g}_{kj}$, и доказываются так называемые теоремы первой аппроксимации.

При условии, что функции Z_j не зависят от t, разбираются следующие случаи: а) одно из характеристических чисел матрицы (c_{jk}) равно нулю, остальные имеют отрицательные вещественные части; б) одно из характеристических чисел матрицы (c_{jk}) — чисто мнимое число, вещественные части остальных отрицательны.

В случае а) тривиальное решение всегда является неустойчивым, в случае б) тривиальное решение всегда устойчиво. Итак, в обоих случаях система первой аппроксимации решает проблему устойчивости. J. Kurzweil

2610. Об одной теореме существования для комплекснозначных дифференциальных уравнений. Бисак (On an existence theorem for complex-valued differential equations. Beesack Paul R.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 2, 112—115 (англ.)

Дается новое доказательство известной (РЖМат, 1956, 8804К) теоремы:

Пусть $f(t,w,\lambda)$, $\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ непрерывны в области

$$D_\lambda: t \in I_t, w \in D; \quad |\lambda - \bar{\lambda}| < c.$$

Пусть для фиксированного $\lambda = \bar{\lambda}$ $w(t)$ есть решение уравнения

$$w' = f(t,w,\lambda) \qquad (1)$$

на подынтервале I, $a \leqslant t \leqslant b$ интервала I_t. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для каждой точки (t^0,w^0,λ^0) из U_δ, где

$$U_\delta: a < t^0 < b, \ |w^0 - w(t^0)| + |\lambda^0 - \bar{\lambda}| < \delta,$$

существует единственное решение $W(t,t^0,w^0,\lambda^0)$ уравнения (1), определенное на I и проходящее через точку (t^0,w^0). Кроме того, $W \in C^1$ в области $V_\delta: a < t < b$, $(t^0,w^0,\lambda^0) \in U_\delta$ и при каждом (t,t^0) W есть аналитическая функция от $(w^0,\lambda^0) \in U_\delta$.

В этой теореме D есть область в комплексной плоскости w, функция f комплекснозначна, а λ — комплексный параметр. В. А. Плисс

2611. К обобщению одной теоремы Мальмквиста. II. Кимура (Sur une généralisation d'un théoréme de Malmquist. II. Kimura Tosihusa, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 3, 97—107 (франц.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 3799.

Автор рассматривает уравнение

$$dy/dx = R(x,y), \qquad (1)$$

где R — рациональная по y функция с аналитическими в окрестности начала координат коэффициентами. Если уравнение (1) имеет решение, для которого начало координат является существенно особой точкой, то уравнение имеет вид

$$x^{\sigma+1}\,dy/dx = P(x,y)/Q(x,y),$$

где P, Q являются многочленами по y без общего множителя и не содержат x в качестве множителя, причем $\sigma \geqslant 0$ является целым числом. Доказывается несколько теорем, одной из которых является следующая. Если существует, по крайней мере, один нуль γ функции $Q(0,y)$ кратности v, $v \geqslant \mu\ (\geqslant 0)$, где μ является кратностью нуля γ функции $P(0,y)$, то в любой окрестности существенно особой точки $x = 0$ имеется бесконечно много подвижных критических точек. Указываются формы, к которым можно преобразовать уравнение (2) при помощи гомографического преобразования в случае, когда (2) не является уравнением типа Риккати и когда уравнение (2) имеет интеграл, для которого начало координат является существенно особой точкой, в окрестности

которой этот интеграл не имеет подвижных критических точек. W. J. Trjitzinsky

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 8, 820.

2612. К обобщению одной теоремы Мальмквиста. III. Кимура (Sur une généralisation d'un théorème de Malmquist. III. Kimura Tosihusa), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, **4**, № 1, 25—41 (франц.)

Эта работа является продолжением предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 3799; реф. 2611).

Детально изучается уравнение

$$dy/dx = R(x, y), \qquad (1)$$

где $R(x,y)$ рациональная по y, с аналитическими коэффициентами. Изучение ведется в окрестности фиксированной сингулярной точки, расположенной в начале координат. Вводится некоторый специальный тип (I) уравнения (1), допускающий логарифмическую критическую точку в начале. Если (1) не является уравнением Риккати, то решается задача: найти необходимые и достаточные условия того, что (1) имеет интегралы, для которых начало является существенно особой точкой и в ее окрестности не имеется подвижных критических точек.

Конечным числом алгебраических операций уравнение (1) сводится к типу (I). Если (1) имеет интеграл с конечным числом ветвей, для которых начало есть существенная особая точка, и ее окрестность не имеет подвижных особых точек, то (1) должно быть уравнением Риккати. W. J. Trjitzinsky

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 364.

2613. Об асимптотических представлениях решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области, содержащей точку поворота. Лангер (On the asymptotic forms of the solutions of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point. Langer Rudolph E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 1, 93—123 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$w''' + \lambda h_1(z, \lambda) w'' + \lambda^2 h_2(z, \lambda) w' + \lambda^3 h_3(z, \lambda) w = 0 \qquad (1)$$

в ограниченной замкнутой области комплексной плоскости z при больших значениях $|\lambda|$. Коэффициенты выражаются рядами

$$h_j(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{jn}(z) \lambda^{-n};$$

$h_{jn}(z)$ — аналитические функции. Предполагается, что корни $\varkappa_j(z)$ $(j = 1, 2, 3)$ характеристического уравнения

$$\varkappa^3 + h_{10}(z) \varkappa^2 + h_{20}(z) \varkappa + h_{30}(z) = 0$$

различны всюду, за исключением точки $z = 0$, где $\varkappa_1(0) = \varkappa_2(0) \neq \varkappa_3(0)$; предполагается также, что дискриминант последнего уравнения имеет нуль первого порядка при $z = 0$.

Пусть

$$\tau(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{r} \tau_n(z) \lambda^{-n}.$$

Если положить $\tau_0 = \varkappa_3(z)$, то можно подобрать $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ так, чтобы подстановкой

$$w = u \exp\Big(\lambda \int_0^z \tau(z, \lambda)\, dz\Big)$$

уравнение (1) привелось к виду

$$L_1'(u) + p(z, \lambda) \lambda^{2-r} u = 0, \qquad (2)$$

где $L_1(u)$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка. Инвариант оператора $L_1(u)$ оказывается равным $\lambda^2 \varphi^2(z) + \lambda \omega(z, \lambda)$, причем в окрестности нуля $\varphi^2(z) = z \varphi_1^2(z)$, $\varphi_1(0) \neq 0$. Поэтому можно построить оператор $L(u)$ такой, что

$$L_1(u) = L(u) + q(z, \lambda) \lambda^{1-r} u,$$

а решения уравнения $L(u) = 0$ выражаются явно через бесселевы функции порядка 1/3. Пусть $u = y_1(z, \lambda)$ и $u = y_2(z, \lambda)$ — два линейно независимых решения этого уравнения.

Затем строится присоединенное уравнение

$$L'(y) - g(z, \lambda) \lambda^{-r} L(y) = 0. \qquad (3)$$

Коэффициент $g(z, \lambda)$ (так же как $p(z, \lambda)$, $\omega(z, \lambda)$ и $q(z, \lambda)$) — ряд по отрицательным степеням λ. Он подбирается из условия, чтобы присоединенное уравнение допускало решение вида

$$y_0(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{r-1} y_{0n}(z) \lambda^{-n}.$$

Коэффициенты уравнения (3) с точностью до членов порядка $1/\lambda^{r-2}$ совпадают с коэффициентами исходного уравнения в форме (2). Очевидно, $y_1(z, \lambda)$ и $y_2(z, \lambda)$ удовлетворяют также уравнению (3). Фундаментальная система решений присоединенного уравнения $\{y_0, y_1, y_2\}$ позволяет исследовать вид решений исходного уравнения в окрестности точки $z = 0$ и построить асимптотические формулы. И. М. Соболь

2614. О соотношении Фукса для линейного дифференциального уравнения. Фукухара (Sur la relation de Fuchs relative à l'equation différentielle linéaire. Hukuhara Masuo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 2, 102—106 (франц.)

Сначала в статье исследуется уравнение

$$\sum_{l=0}^{n} x^{(m+1)l} p_{n-l}(x) y^{(l)} = 0, \qquad (1)$$

где $p_j(x)$ — регулярные функции в окрестности $x = 0$, $p_0(x) \equiv 1$. Одновременно рассматривается уравнение с регулярными особыми точками

$$\sum_{l=0}^{n} (x^{m+1} - a^{m+1})^l p_{n-l}(x) y^{(l)} = 0. \qquad (2)$$

Через $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn}$ обозначаются корни определяющего уравнения для (2) в точке $x = 0$, где $\varepsilon_j = \exp\dfrac{2j\pi i}{m+1}$.

В окрестности $x = 0$ формальное решение (1) представляется в виде:

$$y = e^{A(x)} x^{\lambda} (\gamma_0 + \cdots + \gamma_l x^l + \cdots), \qquad (3)$$

где

$$A(x) = -\frac{\alpha_0}{m x^m} - \frac{\alpha_1}{(m-1) x^{m-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{x}, \qquad (4)$$

а α_0 находится из уравнения

$$\alpha^n + p_1(0) \alpha^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(0) \alpha + p_n(0) = 0. \qquad (5)$$

Если (5) имеет n различных корней α_{0k} $(k = 1, \ldots, n)$, то им соответствуют в (3) и (4) определенные совокупности

$$\alpha_{0k}, \alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{m-1, k}, \lambda_k.$$

В этом случае $x=0$ называется простой особой точкой порядка $m+1$. Доказывается, что при данных условиях и обозначениях

$$\lim_{a\to 0}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{j,k}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.$$

Числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \lambda$ называются характеристическими показателями, соответствующими α_0, а число λ — последним характеристическим показателем.

Характеристическими показателями в иррегулярной особой точке a линейного дифференциального уравнения являются характеристические показатели уравнения типа (1), получающегося из данного уравнения после преобразования $x=t-a$ (или же $x=1/t$, если $a=\infty$).

В дальнейшем рассматривается уравнение

$$\sum_{l=0}^{n} q_l(x)\,y^{(n-l)}=0, \qquad (6)$$

где $q_l(x)$ — полиномы.

Предполагается, что нули $a_1, \ldots, a_m$ полинома $q_0(x)$ являются особыми точками для уравнения (6) и все иррегулярные особые точки простые. Если a_j — регулярная особая точка (порядок ее μ_j считается равным 1), то через $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn}$ обозначаются n корней определяющего уравнения в a_j. Если же a — иррегулярная особая точка порядка μ_j, то через $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn}$ обозначаются n последних характеристических показателей. Подобным же образом определяются $\lambda_{\infty 1}, \ldots, \lambda_{\infty n}$ в точке $a=\infty$.

В статье установлено обобщенное соотношение Фукса:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{\infty k}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}=(M-2)\,n\,(n-2)/2,$$

где $M=\sum_{j=1}^{m}\mu_j+\mu_\infty$.

Кроме того, в работе получен ряд других формул.

Примечание референта. Автор всюду считает, что в уравнении (1) число m — целое $\geqslant 1$, но нигде это не оговаривает. В. В. Леонов

2615. О накоплении возмущений в нестационарных линейных системах. Ройтенберг Я. Н., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 221—224

Теория накопления отклонений Б. В. Булгакова обобщается на линейные колебательные системы, описываемые дифференциальными уравнениями:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\,y_k=x_j(t) \qquad (j=1,\ldots,n),$$

где y_k — переменные, x_j — внешние возмущения, $f(D)$ — полиномы от D, коэффициенты которых являются заданными функциями времени, а $D=d/dt$.

В предположении, что полиномная матрица $f(D)=\|f_{jk}(D)\|$ неособая, а определитель Δ^*, составленный из коэффициентов при старших производных, не равен тождественно нулю, получено решение системы:

$$z_j(t)=\sum_{k=1}^{r}N_{jk}(t,t_0)\,z_k(t_0)+\sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t}W_{jl}(t,\tau)\,x_l(\tau)\,d\tau,$$

где $z_1=y_1$, $z_2=y_1', \ldots, z_{m_1}=y_1^{(m_1-1)}, \ldots, z_r=y_n^{(m_n-1)}$,

а $W_{js}(t,\tau)$ — функция веса по координате z_j в отношении возмущения x_s, фигурирующего в $s^{\text{ом}}$ уравнении исходной системы. Для фиксированного значения $\tau=\tau_1$ предложен способ определения функций $W_{js}(t,\tau_1)$, сводящийся к нахождению решения при некоторых специальных начальных условиях. Этот способ особенно удобен при использовании электронных моделирующих устройств.

Доказано, что если внешние силы подчиняются условию $|x_l(t)|\leqslant K_l$, где $K_l=\text{const}$, то наибольшее возможное отклонение (накопленное отклонение) исследуемой координаты z_j нестационарной системы в момент $t=t_1$ определяется выражением

$$|z_j(t_1)|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{r}Z_k(t_0)\,z_k(t_0)\right|+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}K_l\int_{t_0}^{t_1}\left|\sum_{i=1}^{n}Z_{ji}(\tau)\frac{B_{li}(\tau)}{\Delta^*(\tau)}\right|d\tau.$$

Указан аналитический способ нахождения всех входящих в это выражение функций, а также способ определения функций Z_{ji}, основанный на использовании электронных моделирующих установок. Полученные результаты распространены на случаи более общей системы, описываемой уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)y_k=[L_j(t)D+R_j(t)]\,x_j(t) \quad (j=1,\ldots,n).$$

Н. Т. Кузовков

2616. Линейные разностные и дифференциальные уравнения с условиями, наложенными более чем в одной точке. Форт (Linear difference and differential equations satisfying conditions at more than one point. Fort Tomlinson), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 287—292 (англ.)

Автор доказывает две теоремы.

В теореме I устанавливаются достаточные условия, относящиеся к коэффициентам системы разностных уравнений

$$y_\nu(i+1)=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}(i)\,y_\mu(i) \quad (\nu=1,2,\ldots,n;\ 0\leqslant i<b;\ i\text{—целое}), \qquad (1)$$

при выполнении которых существует единственное решение системы, состоящее из функций, часть которых принимает предписанные значения в одной точке, другая часть — в другой точке, третья часть — в третьей точке и т. д.

В теореме II предельным переходом от разностных уравнений устанавливаются аналогичные условия для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_\nu}{dx}=\sum_{\mu=1}^{n}g_{\nu\mu}(x)\,y_\mu(x) \quad (\nu=1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$

где $g_{\nu\mu}(x)$ непрерывны, $0\leqslant x<1$.

Приведем точные формулировки. Введем в рассмотрение определители $D_\nu(k,\alpha,\beta)=\det a_{\alpha_p\beta_q}(k)$, где $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_\nu$, $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_\nu$ и k — целое $(0\leqslant k<b)$; тогда имеет место

Теорема I. Пусть $0=k_0<k_1<k_2<\ldots<k_{q-1}\leqslant b$ и $0<p_1<p_2<\ldots<p_q=n$ — целые числа, а $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — произвольные числа. Если все определители $D_{n-p_j}(k,\alpha,\beta)>0$ $(k_{j-1}\leqslant k<k_j;\ j=1,2,\ldots,q-1)$, то существует и притом только одно решение системы (1) такое, что

$y_{p_j+i}(k_j) = G_{p_j+i}$ $(i = 1,2,\ldots,p_{j+1}-p_j;\ p_0 = k_0 = 0)$. Рассматривая систему (2), обозначим $R_{\nu\mu}(x) = hg_{\nu\mu}(x)$ $(\nu \neq \mu)$ и $R_{\nu\nu}(x) = 1 + hg_{\nu\nu}(x)$, где $h>0$, и введем в рассмотрение определители $D_\nu(x,\alpha,\beta) = \det R_{\alpha_r\beta_s}$, где $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_\nu$, $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_\nu$ и $0\leqslant x<1$. Тогда имеет место

Теорема II. Пусть $0 = k_0<k_1<k_2<\ldots<k_{q-1}\leqslant 1$ и пусть $0<p_1<p_2<\ldots<p_q = n$ — целые числа, а $G_1,G_2,\ldots,G_n$—произвольные числа. Если для достаточно малых h все определители $D_{n-p_j}(x,\alpha,\beta) > 0$ $(k_{j-1}\leqslant x<k_j,\ j = 1,2,\ldots,q-1)$, то существует и притом только одно решение системы (2) такое, что

$y_{p_j+i}(k_j) = G_{p_j+i}$ $(i = 1,2,\ldots,p_{j+1}-p_j;\ p_0 = k_0 = 0)$.

В статье имеются опечатки; например, на стр. 291 в формулировке теоремы II вместо k_q должно быть k_{q-1}; вместо $j = 1,2,\ldots,n$ должно быть $j = 1,2,\ldots,q-1$; в правой части формулы (18) вместо $y_\mu(i)$ должно быть $\overline{y}_\mu(i)$; на стр. 292, в строке 5, вместо $k_1,k_2,\ldots,k_{q-1}$ должно быть $k'_1,k'_2,\ldots,k'_{q-1}$. А. П. Шварцман

2617. О преобразовании начальных условий на выходе линейной системы с переменными параметрами в эквивалентный входной сигнал. Солодов А. В., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 7, 654—660 (рез. англ.)

Задано линейное дифференциальное уравнение с переменным коэффициентом

$$L(p,t)\,x = 0, \qquad (1)$$

где $L(p,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\,p^j$, $p = d/dt$,

и начальные условия

$$\left(\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}\right)_{t=\xi} = x_\alpha(\xi), \qquad \alpha = 0,1,\ldots,n-1. \qquad (2)$$

Определяется функция $y(t)$ такая, что решение (при $t>\xi$) уравнения (1) при подстановке в правую часть y вместо нуля и при всех начальных условиях, равных нулю, совпадает с решением однородного уравнения (1) при начальных условиях (2).

Эта функция имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \beta_i(\xi)\,\delta^{(i)}(t-\xi),$$

где $\delta^{(i)}$ — i-я производная функции Дирака, а $\beta_i(\xi)$ — коэффициенты, которые однозначно определяются через $a_j(t)$ и $x_\alpha(\xi)$.

Приводятся формулы для подсчета $\beta_i(\xi)$.

М. А. Айзерман

2618. «Обвертывающие» свойства рядов Маклорена для $\cos t$, $\sin t$ и e^{-t}. Винтнер (On the «enveloping» properties of the Maclaurin series of $\cos t$, $\sin t$ and e^{-t}. Wintner Aurel), Simon Stevin, 1957, **31**, № 4, 149—155 (англ.)

Ряды Маклорена для функций $\cos t$, $\sin t$ и e^{-t} «обпертывают» эти функции в том смысле, что их частичные суммы для $t>0$ приближаются к своим пределам попеременно то с одной, то с другой стороны. Автор распространяет это утверждение на некоторые решения $x(t)$ дифференциального уравнения

$$x''(t) + f(t)\,x(t) = 0 \quad (0\leqslant t<\infty); \qquad (1)$$

упомянутые выше элементарные случаи отвечают предположению $f(t)\equiv 1$ или $f(t)\equiv -1$.

Уравнение (1) вместе с начальными условиями, устанавливающими значения $x(0)$ и $x'(0)$, эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0(t) - \int_0^t (t-s)\,f(s)\,x(s)\,ds,$$

где $x_0(t) = x(0) + tx'(0)$.

Если решать его по методу последовательных приближений, то эти приближения определятся рекуррентной формулой

$$x_n(t) = x_0(t) - \int_0^t (t-s)\,f(s)\,x_{n-1}(s)\,ds.$$

При $f(t) = \text{const}$ последовательные приближения как раз сводятся к частичным суммам разложения $x(t)$ в ряд Маклорена.

Относительно «погрешностей» $y_n(t) = x_n(t) - x(t)$ доказываются теоремы:

I. Пусть $f(t)$ непрерывна, положительна и не убывает при $0\leqslant t<\infty$, а $x(t)$ есть решение уравнения (1), отвечающее начальным значениям $x(0)>0$, $x'(0) = 0$. Тогда

$$(-1)^n y_n(t) > 0 \quad (0<t<\infty,\ n = 0,1,2,\ldots) \qquad (2)$$

и

$$(-1)^n y'_n(t) > 0 \quad (0<t<\infty,\ n = 1,2,\ldots). \qquad (3)$$

II. Пусть $f(t)$ непрерывна и неположительна при $0\leqslant t<\infty$, причем ни в одном сплошном промежутке $f(t)$ не равна тождественно нулю. Если $x(t)$ есть решение уравнения (1), для которого $x(t)>0$, а $x'(t)<0$ при $0<t<\infty$, то вместо (2) будет

$$(-1)^n y_n(t) < 0,$$

в то время как неравенство (3) сохранится в прежнем виде.

В обоих случаях к тому же выполняются для $0<t<\infty$ и неравенства

$$|y_{n+1}(t)| < |y_n(t)|,\ |y'_{n+1}(t)| < |y'_n(t)|.$$

Г. М. Фихтенгольц

2619. О решениях некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с особыми точками. Терещенко Н. И., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 2, 220—223

Автор рассматривает систему вида

$$dy/dt = \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^{(k-m)}\right) y, \qquad (1)$$

где y — n-мерный вектор, A_m — постоянные квадратные матрицы n-го порядка, k — целое >0, $A_0,\ldots,A_k$ — диагональные матрицы.

Автор вводит в рассмотрение характеристическое уравнение

$$\det(A_{k+1} - \lambda E) = 0. \qquad (2)$$

В статье получена следующая теорема: Если среди корней (2) имеются корни λ_ν и λ_{ν_1}, отличающиеся друг от друга на целое число, то (1) имеет решение вида

$$y = e^{Q_1(t)}\left[\left(t^{\lambda_\nu}\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{-i}\right)\ln t + t^{\lambda_{\nu_1}}\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{-i}\right]$$

либо вида

$$y = e^{Q_1(t)}\,t^{\lambda_{\nu_1}}\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{-i}$$

в зависимости от того, не равен или равен нулю определитель матрицы, обозначаемой в статье через (1.10), причем $Q_1(t)$ — полином степени $k+1$.

Во второй части работы исследуются решения системы

$$t\left(\sum_{j=0}^{m} a_j t^j\right) E \cdot dy/dt = \left(\sum_{l=0}^{n} A_l t^l\right) \qquad (3)$$

в окрестности $t=0$, причем в (3) a_j — n-мерные векторы, A_l — квадратные n-мерные матрицы.

Примечание референта. Автор нигде не ссылается на работы В. П. Басова (РЖМат, 1955, 5006; 1957, 6341), давшего асимптотические представления для систем более общего вида. В работе встречаются неточности. Например, автор пишет: „Предполагаем, что в особой иррегулярной точке $t=\infty$ n решений существуют и единственны". Очевидно, здесь предполагается существование решений в окрестности этой точки. В. В. Леонов

2620. Замечания об одном формальном методе решения систем дифференциальных уравнений. Феньё (Megjegyzés a differenciálegyenletrendszerek egyik formális megoldási módszeréhez. Fenyö István), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1—2, 193—200 (венг.; рез. русск. нем.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(\frac{d}{dx}\right)\gamma_k = \varphi_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Пусть $P_{ik}(\lambda)$ — многочлены с постоянными коэффициентами, для которых $\det P_{ik}(\lambda) = P(\lambda)$. Система (1) эквивалентна системе

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\gamma_k = \sum_{i=1}^{n} Q_{ik}\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi_i(x), \qquad (2)$$

где $Q_{ik}(\lambda)$ — миноры определителя $P(\lambda)$ и функции φ_i дифференцируемы достаточное число раз в обычном или обобщенном смысле (по Л. Шварцу). В этом случае система (2) легко разрешается относительно γ_k. Если φ_i — непрерывные функции, то предлагаемый метод дает интегралы, являющиеся не обобщенными, а обычными функциями.

Приведенная идея может быть использована для численного решения, для решения граничных задач, а также для некоторых систем дифференциальных уравнений с частными производными. А. П. Прудников

2621. О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера. Фаддеев Л. Д., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 1, 63—66

Рассматривается обратная задача на всей оси $-\infty < x < \infty$ для одномерного уравнения Шредингера $Ly = k^2 y$, где $\operatorname{Im} k \geqslant 0$,

$$Ly \equiv -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\,y \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|q(x)|\,dx < \infty.$$

Устанавливаются необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторая симметричная унитарная матрица

$$S(k) = \begin{pmatrix} s_{11}(k) & s_{12}(k) \\ s_{12}(k) & s_{22}(k) \end{pmatrix}$$

была S-матрицей (оператором рассеяния) для оператора L. Эти условия таковы (в совокупности):

1) При всех вещественных k, кроме, может быть, $k=0$, $|s_{ii}(k)| < 1$, $i=1,2$; если $s_{ii}(0)=1$, то $s_{11}(0) = s_{22}(0) = -1$.

2) Функция $s_{12}(k)$ является предельным значением функции, которая аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, за исключением, возможно, конечного числа точек $k_l = i\tau_l$ $(l=1, \ldots, n)$ на мнимой оси, где она имеет простые полюсы (величины $\lambda_l = -\tau_l^2$ — собственные значения оператора L).

3) При больших $|k|$

$$s_{ii}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad i=1,2, \quad \operatorname{Im} k = 0;$$

$$s_{12}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0.$$

4) $\int_a^{\infty} (1+|t|)\,|F_1'(t)|\,dt < C_a$, $a > -\infty$,

$$\int_{-\infty}^{b} (1+|t|)\,|F_2'(t)|\,dt < C_b, \quad b < \infty,$$

где $F_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{11}(k)\,e^{ikt}dk$, $F_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{22}(k)e^{-ikt}dk$.

Потенциал $q(x)$ определяется однозначно, если, кроме S-матрицы, задано n произвольных чисел (n — число дискретных собственных значений оператора L).

Для получения этого результата автор с помощью преобразования Фурье строит интегральные уравнения, эквивалентные соотношениям, которым должны удовлетворять функции $s_{ij}(k)$ как элементы S-матрицы, и изучает эти уравнения, используя результаты работ В. А. Марченко (РЖМат, 1956, 6569), З. С. Аграновича и В. А. Марченко (РЖМат, 1958, 1182), Б. Я. Левина (РЖМат, 1957, 423).

В заключение показано, что условия 1), 2), 3) и требование унитарности позволяют восстановить S-матрицу по одному из элементов $s_{11}(k)$ или $s_{22}(k)$, если задать число особенностей функции $s_{12}(k)$ в верхней полуплоскости. Отмечается, что если от $s_{11}(k)$ требовать лишь квадратичной суммируемости и убывания при больших k, то потенциал восстанавливается и является обобщенной функцией типа производной от квадратично суммируемой.

В формулах имеются пропуски и опечатки.

И. В. Гельман

2622. Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ешуков Л. Н., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 191—196

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$dx/dt = F(x, t), \qquad (1)$$

где $F(x, t)$ — векторная функция вектора x и времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$. Разыскивается решение x, удовлетворяющее условию

$$\Phi(x) = a, \qquad (2)$$

где Φ — линейный ограниченный n-мерный функционал, переводящий элемент $x \in E_n$ в элемент $\Phi x \in R_n$ (R_n — пространство постоянных векторов n-измерений, E_n — пространство векторных функций $x(t)$).

Функциональная задача (1), (2) является естественным обобщением неоднородной краевой задачи для уравнения (1). Высказываются следующие утверждения.

Пусть в некоторой конечной области $\|x - \Phi^{-1}a\| \leqslant r$ и при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$ (интервал Δ) выполнены условия Каратеодори:

а) функции $f_l(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$ непрерывны по совокупности аргументов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ при $t = \text{const}$;

б) $f_l(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$ измеримы по t при $x = \text{const}$;

в) $|F(x, t)| \leqslant m(t)$, где $m(t)$ — некоторая положительная суммируемая в Δ функция;

г) $\int_{t_0}^{t_0+h} m(t)\,dt \leqslant \frac{r}{1+\|\Phi_0^{-1}\Phi\|}$,

где Φ_0 – сужение оператора Φ из пространства E_n в пространство R_n.

Существует тогда по крайней мере одно решение интегрального уравнения $x = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(x, t)\,dt$, удовлетворяющее условию (2). Это решение почти всюду в Δ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).

Доказано далее, что если выполнены условия а), б), в) предыдущей теоремы и, кроме того, $\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|F(x,t)\|}{\|x\|} = 0$, то функциональная задача (1), (2) снова имеет решение в указанном выше смысле.

Если в некоторой области G по x и в интервале Δ по t вектор-функция $F(x, t)$ непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица с постоянной l

$$\|F(x, t) - F(x', t)\| \leqslant l\,\|x - x'\|$$

и

$$\nu = lh(1 + \|\Phi_0^{-1}\Phi\|) < 1,$$

то в области G может существовать только одно решение задачи (1), (2).

Если в области $\|x\| \leqslant \frac{\|\Phi_0^{-1}a\|}{1-\nu}$ и Δ выполнены условия предыдущей теоремы, то решение задачи (1), (2) существует и может быть найдено последовательными приближениями:

$$x_0 = 0, \quad x_p = \Phi_0^{-1}a - \Phi_0^{-1}\Phi\int_{t_0}^{t} F(x_{p-1}, t)\,dt + \int_{t_0}^{t} F(x_{p-1}, t)\,dt$$

с оценкой погрешности

$$\|x - x_p\| \leqslant \frac{\|\Phi_0^{-1}a\|}{1-\nu}\,\nu^p.$$

Далее формулируются теоремы о дифференцируемости решения функциональной задачи по параметру μ, от которого зависят функционал Φ и a. Е. А. Барбашин

2623. Качественное исследование одной системы двух дифференциальных уравнений. Кушков Н. Н., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 195—202

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$dx/dt = y + f(x), \quad dy/dt = g(x) \tag{1}$$

при выполнении условий:

$$xf(x) < 0, \quad xg(x) < 0 \text{ при } x \notin (x_1, x_2),\ 0 < x_1 < x_2, \tag{2}$$

$$xf(x) > 0, \quad xg(x) > 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2), \tag{3}$$

$$f(0) = f(x_1) = f(x_2) = g(0) = g(x_1) = g(x_2) = 0. \tag{4}$$

Доказывается, что состояния равновесия $(0, 0)$ и $(x_2, 0)$ системы (1) асимптотически устойчивы по Ляпунову. Далее устанавливается, что особая точка $(x_1, 0)$ представляет собой седло. Пусть L_2 и L_4 — те сепаратрисы этого седла, которые имеют точку $(x_1, 0)$ своей ω-предельной точкой.

Доказывается, что при условии

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(-f(x) - \int_0^x g(x)\,dx\right) = +\infty,$$

$$\overline{\lim_{x\to-\infty}}\left(f(x) - \int_0^x g(x)\,dx\right) = +\infty$$

траектории L_2 и L_4 разделяют плоскость на две области: на области притяжения особых точек $(0, 0)$ и $(x_2, 0)$.

Определение. Если сепаратриса L_2 пересекает ось $0y$ бесконечное число раз, то особые точки $(0, 0)$ и $(x_2, 0)$ имеют спиралевидные области устойчивости.

В работе дается ряд условий, достаточных для наличия или отсутствия у особых точек $(0, 0)$ и $(x_2, 0)$ спиралевидных областей устойчивости. В. А. Плисс

2624. Достаточные условия существования ровно n предельных циклов у системы $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = F(y) - x$. Войлоков М. И., Матем. сб., 1958, **44**, № 2, 235—244

Для системы, данной в заглавии, формулируется совокупность условий, обеспечивающая существование точно n предельных циклов. Доказательство существования проводится n-кратным применением принципа кольца. Единственность предельного цикла в каждом из рассматриваемых колец доказывается с помощью метода, во многом аналогичного методу Левинсона и Смита (см., например, Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949 г.).

В. А. Плисс

2625. Обобщенная проблема центра на поверхности тора. Лю Юн-цин (Liu Yung-ching), Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 1, 132—138 (кит.)

Изучаются дифференциальные уравнения на поверхности тора вида

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1 + \Theta(\theta, \varphi)}{1 + \Phi(\theta, \varphi)},$$

где Θ и Φ — тригонометрические полиномы от θ и φ.

Теорема 1. Если в уравнении

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1 + \sum_{k=0}^{m-1}\left[A^m \sin^{m-k}\varphi \sin^k\theta + B^m \sin^{m-k}\theta \sin^k\varphi\right]}{1 + \sum_{k=0}^{m-1}\left[C^m \sin^{m-k}\varphi \sin^k\theta + D^m \sin^{m-k}\theta \sin^k\varphi\right]} \tag{1}$$

действительные коэффициенты A, B, C и D удовлетворяют условиям:

1) $m[|A|^m + |B|^m] < 1$ (или $m[|C|^m + |D|^m] < 1$),

2) $A^m + B^m = C^m + D^m$,

то все решения периодические, если только $H = (A^m - C^m)(A^m - D^m) = 0$; в случае $H \neq 0$ все решения — спирали, за исключением одного гладкого предельного цикла.

В следующих 3 теоремах получены аналогичные результаты для уравнений, в которых полиномы Θ и Φ содержат большее число различных коэффициентов.

М. И. Альмухамедов

2626. О неосцилляции решений нелинейных уравнений второго порядка. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., Чичкин Е. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 3—4

Вопреки общепринятой терминологии, авторы называют промежуток $a < x < b$ промежутком неосцилляции для уравнения

$$y'' = f(x, y), \tag{1}$$

если разность любой пары различных решений $u = y_1 - y$ имеет в (a, b) не более одного нуля. Это определение сводится к обычному в случае, когда (1) допускает решение $y \equiv 0$. При некоторых предположениях относительно $f(x, y)$, из которых отметим только условие: $f(x, y_2) - f(x, y_1) \geqslant q(y_2 - y_1)$, если $y_2 \geqslant y_1$, доказана

Теорема 1. Промежуток неосцилляции для уравнения $y'' - qy = 0$ является также промежутком неосцилляции для уравнения (1).

Теорема 2. Для того чтобы (a, b) был промежутком неосцилляции для уравнения $L[y] \equiv y'' - q(x)y = 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w(x) \geqslant 0$ $(w \not\equiv 0)$ такая, что $L[w] \leqslant 0$.

Примечание референта. Первая теорема сразу следует из классической теоремы сравнения для линейных уравнений, если заметить, что $u'' \geqslant qu$ при $u \geqslant 0$.

Вторая теорема доказана Винтнером (Wintner A., Amer. J. Math., 1951, **73**, № 2, 368), а также В. А. Кондратьевым (РЖМат, 1958, 9747) в несколько более общей формулировке. И. М. Соболь

2627. **Некоторые теоремы о предельных циклах для системы нелинейных колебаний. Кушков Н. Н.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 203—209

Рассматривается система

$$dx/dt = y + f(x), \quad dy/dt = g(x). \qquad (1)$$

При нарушении так называемых обобщенных условий Гурвица даются условия, достаточные для существования в некоторой фиксированной области предельных циклов системы (1). Приведем одну из доказанных теорем.

Теорема. Если

1) $g(x) = -g(-x)$, $f(x) = -f(-x)$;

2) $f(x) \leqslant 0$ при $0 < x < x_0$; $f(x) \geqslant 0$ при $x_0 < x < x_2$; $g(x) < 0$ при $x > 0$, $f(0) = g(0) = 0$;

3) $-\int_{x_0}^{x_2} g(x) f(x)\,dx \geqslant 3 \int_0^{x_0} g(x) f(x)\,dx$;

4) $\int_{x_1}^{x_2} -g(x)\,dx \geqslant 4M^2$, где $x_1 \in (x_0, x_2)$, $\int_{x_0}^{x_1} g(x) f(x)\,dx =$

$$= -3\int_0^{x_0} g(x) f(x)\,dx, \quad M = \max_{0 \leqslant x \leqslant x_1} |f(x)|,$$

то в полосе $-x_2 \leqslant x \leqslant x_2$ существует предельный цикл системы (1). В. А. Плисс

2628. **О некоторых периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений (Продолжение). Фор** (Sur certaines solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires (suite). Faure Robert), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 83—95 (франц.)

Начало статьи см. РЖМат, 1957, 7864.

Исследуется уравнение

$$y'' + k_1 y' + k_2 y = f(y, y', t), \qquad (1)$$

где k_1, k_2 — постоянные, функция f аналитическая и периодическая по t. При некоторых условиях, выраженных через коэффициенты разложения функции f в ряд Фурье по t, устанавливается существование периодического решения уравнения (1) и сходимость к нему последовательных приближений u_n, получаемых по формуле

$$u_n'' + k_1 u_n' + k_2 u_n = f(u_{n-1}, u'_{n-1}, t), \quad u_n(t + T) \equiv u_n(t).$$

А. Ф. Филиппов

2629. **О единственности предельных циклов некоторых уравнений нелинейных колебаний. Чжан Чжи-фэн**, Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 4, 659—662

Даются достаточные условия для единственности предельного цикла системы

$$x = -y - F(x) \quad \dot{y} = g(x), \qquad (1)$$

приводящейся к уравнению $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$. Предполагается, что функция $f(x) \equiv F'(x)$ непрерывна, $xg(x) > 0$ $(x \not\equiv 0)$, $G(\pm\infty) = +\infty$, где $G(x) = \int_0^x g(x)\,dx$, $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица на каждом конечном интервале.

Теорема 1. Если $f(x)/g(x)$ не убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ и $f(x)/g(x) \not\equiv \text{const}$ в окрестности точки $x = 0$, то система (1) имеет не больше одного предельного цикла; цикл может быть только устойчивым.

Теорема 2. Если $F(x)/\sqrt{2G(x)}$ не убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, то система (1) имеет не больше одного предельного цикла. Если, кроме того, $xF(x) < 0$ при $0 < |x| < \delta_1$, $xF(x) > 0$ при $|x| > \delta_2 > \delta_1$, то система (1) имеет единственный предельный цикл. Это обобщает теоремы Конти (Conti R., Boll. Unione mat. ital, 1952, ser III, **7**, № 2, 111—118) и Массера (РЖМат, 1956, 2987).

В статье есть и другие теоремы, в том числе и относящиеся к системе

$$x = \varphi(y) - F(x), \quad \dot{y} = g(x).$$

Доказательств нет, излагается лишь идея доказательства теоремы 1. А. Ф. Филиппов

2630. **О существовании периодических решений для дифференциальных уравнений второго порядка с периодической правой частью. Рейссиг** (Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied. Reißig R.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 256—257 (нем.)

Приведена формулировка теоремы, доказанной в другой работе автора (РЖМат, 1957, 3976). А. Ф. Филиппов

2631. **О существовании предельных циклов нелинейных дифференциальных уравнений. Люй Хун-фань**, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 61—70 (кит.; рез. русск.)

Доказывается существование не тождественно постоянного периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

при следующих условиях:

1) $xg(x) > 0$ при $|x| \geqslant x_0$; $G(\pm\infty) = +\infty$, где $G(x) = \int_0^x g(z)\,dz$;

2) $f(x, y) \leqslant 0$ в некоторой окрестности замкнутой кривой $y^2/2 + G(x) = C$, где $C > G(\pm x_0)$;

3) $f(x, y) \geqslant 0$ при $|x| \geqslant x_1$;

4) при $|x| \leqslant x_1$ имеем $f(x, y) \geqslant -ax$ при $y \geqslant y_1$, $f(x, y) \geqslant b(x)$ при $y \leqslant -y_1$, $\int_{-x_1}^{x_1} (b(x) - a(x))\,dx > 0$.

Аналогичная теорема доказывается для уравнения $\ddot{x} = g(x, \dot{x}) + P(x, \dot{x})$ при некоторых предположениях относительно функций g и P. Эти результаты близки к результатам Миколайской (РЖМат, 1957, 421).

А. Ф. Филиппов

2632. **Исследование устойчивости решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Проскуряков А. П.**, Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 2, 250—253

Заметка, примыкающая к статье автора (Прикл. матем. и механ., 1946, **10**, № 5—6, 545—558). Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{d\varphi} + Bx = 0, \qquad (1)$$

коэффициенты которого A и B, являясь периодическими функциями φ, зависят еще от двух или большего числа параметров. Для исследования устойчивости тривиального решения уравнения (1) развивается метод Хилла. В качестве примера исследуется устойчивость махового движения лопасти несущего винта геликоптера или автожира. В. М. Старжинский

2633. Об асимптотическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Коноплев В. П., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 25—28

Дается схема построения асимптотики решения дифференциального уравнения второго порядка

$$k(x)y'' + p(x)y' + [\lambda^2\rho(x) + q(x)]y = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (1)$$

при больших λ, представляющая собой модификацию известных методов Дородницына, Лангера и др. (см., например, Успехи матем. н., 1952, **7**, № 6, 3—96). Схема применяется к построению асимптотики решения уравнения, содержащего особенность в точке $x = 0$ более общего вида, чем рассматривавшиеся ранее

$$x^\alpha y'' + x^{\alpha-1}p(x)y' + [\lambda^2 x^{\alpha+\beta}r(x) - q(x)]y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (2)$$

($p(x)$—дифференцируемая функция, $r(x) > 0$— дважды дифференцируемая функция, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $\beta > -2$, $x^{2-\alpha}q(x) \in \mathrm{Lip}\,1$). Дается представление регулярного в точке $x = 0$ решения уравнения (2) через функции Бесселя индекса ν, зависящего от значений коэффициентов уравнения при $x = 0$. Второе фундаментальное решение уравнения (2) выражается через первое по обычным формулам теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В частных случаях уравнения (2) схема дает возможность получить асимптотику сразу для обоих линейно независимых решений. А. Б. Васильева

2634. Об асимптотическом поведении решений некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой параметр. Костомаров Д. П., Матем. сб., 1958, **45**, № 1, 17—30

Рассматривается уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \mu^2\rho(x)y = 0, \qquad (1)$$

где μ — большой параметр; $p(x) = (x-a)^\alpha p_1(x)$, $\rho(x) = (x-a)^{\alpha-1}\rho_1(x)$, $q(x) = (x-a)^{\alpha-2}[q_0 + (x-a)q_1(x)]$, q_1 — непрерывная функция, p_1 и ρ_1 — дважды непрерывно дифференцируемые функции; $p_1(x) \neq 0$ и $\rho_1(x) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Посредством перехода к интегральному уравнению получены асимптотические формулы для двух линейно независимых решений уравнения (1), являющиеся обобщением формул А. А. Дородницына (Успехи матем. н., 1952, **7**, № 6, 3—96), относящихся к случаю $q_0 = 0$.

Рассматривается задача на собственные функции и собственные значения для уравнения вида (1) при условиях $|y(a)| < \infty$, $y(b) = 0$. Выводятся асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

Указанные общие формулы используются для получения асимптотики присоединенных сферических функций и полиномов Якоби. А. В. Васильева

2635. Колебание системы под действием возмущающей силы переменной частоты. Чертков (Коливання системи під впливом збурюючої сили змінної частоти. Чертков Р. І.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 2, 139—159 (укр.; рез. русск., англ.)

Изучаются колебания системы с одной степенью свободы, находящейся под влиянием консервативных сил, сил сопротивления, пропорциональных первой степени скорости, и возмущающей силы переменной частоты вида

$$Q(t) = Q_0 \sin \int_0^t p(\xi)\,d\xi.$$

Подробно рассмотрен тот случай, когда переменная частота возмущения является периодической функцией вида

$$p(\xi) = p_0 + r\omega\cos\omega t,$$

где p_0 — среднее значение частоты, $r\omega$ — амплитуда изменения частоты возмущения, r—степень нерегулярности фазы возмущающей силы, ω—частота нерегулярности возмущающей силы. В этом случае решение представляется в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых выражаются через функции Бесселя первого рода целого порядка.

В заключение статьи рассмотрен случай воздействия на динамическую систему возмущения, частота которого является произвольной периодической функцией времени. В данном случае коэффициенты соответствующих тригонометрических рядов выражаются через обобщенные функции Бесселя. Н. Я. Лященко

2636. Об асимптотическом поведении решений дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентом ограниченной вариации. Грищенко (Про асимптотичне поводження розв'язків диференціального рівняння другого порядку з коефіцієнтом обмеженої варіації. Грищенко Л. З.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1956, **19**, 62—72 (укр.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0, \qquad (1)$$

где $t \geqslant 0$, $\operatorname{Var}_0^\infty p(t) < \infty$, $p(\infty) \neq 0$. Непрерывность $p(t)$ не предполагается.

Получены асимптотические формулы для двух линейно независимых решений

$$x_{1,2} = [1 + o(1)]\exp\left[\pm\int_{t_0}^{t}\sqrt{-p(\tau)}\,d\tau\right],$$

если $p(t) < 0$ при $t \geqslant t_0$ и

$$x_1 = \cos\int_{t_0}^{t}\sqrt{p(\tau)}\,d\tau + o(1),$$

$$x_2 = \sin\int_{t_0}^{t}\sqrt{p(\tau)}\,d\tau + o(1), \quad \text{если } p(t) > 0 \text{ при } t \geqslant t_0.$$

Аналогичные формулы получены и для производных dx_1/dt и dx_2/dt. Н. И. Гаврилов

2637. К вопросу об асимптотическом поведении решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Васьковская (До питання про асимптотичне поводження розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку. Васьківська Т. Г.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1956, **19**, 71—97 (укр.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty. \qquad (1)$$

Если оно линейным преобразованием (подстановкой) приводится к системе второго порядка вида

$$\frac{dy}{dt} = [W(t) + C(t)]y, \quad t_0 \leqslant t < \infty,$$

где $W(t)$ — диагональная матрица, а элементы матрицы $C(t)$ суммируемы на (t_0, ∞), то, как показано И. М. Рапопортом (РЖМат. 1957, 5569К), можно найти асимптотические представления линейно независимых решений. Возникает вопрос о том, когда такое приведение возможно и как построить нужное линейное преобразование (подстановку).

В реферируемой работе указаны некоторые подстановки такого рода при тех или иных ограничениях на функцию $p(t)$. Две из этих подстановок приводят к известным асимптотическим представлениям решений уравнения (1) Н. Левинсона (Duke Math. J., 1948, **14**) и И. М. Рапопорта, а другие дают новые результаты. В силу громоздкости этих подстановок мы их не выписываем.

Н. И. Гаврилов

2638. Об уравнении $\ddot{x}+f(t)x=0$. Курцвейль (Sur l'équation $x+f(t)x=0$. Kurzweil Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 2, 218—226 (франц.; рез. чешск.; русск.)

В работе доказана теорема: Если функция $f(t)$ является непрерывной и монотонной и если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\int_H d\log f(t) < \infty$, как только H представляет собой открытое множество, удовлетворяющее соотношению $\liminf \mu(H \cap \langle t, t+1 \rangle) > 1-\varepsilon$ (μ означает меру по Лебегу), то все интегралы уравнения

$$\ddot{x} + f(t)\,x = 0 \qquad (1)$$

сходятся к нулю при $t \to \infty$. Эта теорема является обобщением теоремы Армеллини-Тонелли-Сансоне (Armellini, Tonelli, Sansone), (Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, стр. 56; РЖМат, 1955, 2676К), Показано, что в этой теореме содержится целый ряд других критериев. Наконец, дается формулировка теоремы аналогичного характера для того случая, когда положительная функция $f(t)$ сходится монотонно к нулю при $t \to \infty$. Тогда для каждого интеграла уравнения (1) при некотором добавочном предположении $x^2(t)\cdot f(t) + x^2(t) \to \infty$ для $t \to \infty$. M. Zlámal

2639. К вопросу о продолжении и устойчивости характеристических кривых. И. Ура Таро, Сугаку, 1958, 9, № 3, 137—148 (японск.)

2640. Об эквивалентности проблем устойчивости для дифференциальных уравнений и разностно-дифференциальных уравнений. Цинь Юань-сюнь, Лю Юн-цин, Ван Лянь (On the equivalence problem of differential equations and difference-differential equations in the theory of stability. Chin Yuan-shun, Liu Ying-ching, Wang Lian), Sci. Rec., 1958, 2, № 4, 129—133 (англ.)

Наряду с системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\,x_j(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

рассматривается система разностно-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t-\delta_j(t))) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где a_{ij} и b_{ij} — постоянны, а $\delta_j(t)$ может быть неотрицательной постоянной или неотрицательной непрерывной функцией.

Без доказательства высказывается следующий ряд утверждений.

Если тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво, то существует положительная постоянная Δ такая, что тривиальное решение системы (2) будет также асимптотически устойчивым, если только δ_j удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant \delta_j \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если среди корней характеристического уравнения $D(\lambda) = |a_{ij} + b_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то существует постоянная $\Delta > 0$ такая, что тривиальное решение системы (2) будет неустойчивым, если только

$$0 \leqslant \delta_j(t) \leqslant \Delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть дано дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-\delta(t)), \qquad (3)$$

где постоянные a и b удовлетворяют условиям: а) $a+b>0$; б) $\delta(t)$ — неотрицательная ограниченная непрерывная функция. Тривиальное решение уравнения (3) будет неустойчивым.

Пусть $D(0)$ и $(-1)^{n+1}$ имеют разные знаки. Тривиальное решение системы (1) будет неустойчивым. Неустойчивым будет также и тривиальное решение системы (2).

Пусть дано уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-\delta(t)) + F_2 \qquad (4)$$

и пусть а) $a+b>0$; б) $\delta(t)$ — неотрицательная ограниченная непрерывная функция;

в) $F_2 = \sum_{i+j\geqslant 2} P_{ij}x^i(t)\,x^j(t-\delta(t))$.

Если существует ε такое, что $\sum_{i+j\geqslant 2} |P_{ij}|\,\varepsilon^{i+j} < \infty$, то тривиальное решение системы (4) неустойчиво.

Е. А. Барбашин

2641. Устойчивость решений «порожденных» систем дифференциальных уравнений. Егоров В. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 84—92

Наряду с системой уравнений в полных дифференциалах

$$dx = p(u)\,xdu + q(v)\,xdv, \qquad (1)$$

где x — столбцевая матрица, $p(u)$, $q(v)$ — квадратные матрицы, непрерывные и ограниченные в области $u>0$, $v>0$, удовлетворяющие условию

$$p(u)\,q(v) = q(v)\,p(u), \qquad (2)$$

рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$dx = \left\{\varphi(t)\,p\left(\int_0^t \varphi(t)\,dt\right) + \psi(t)\,q\left(\int_0^t \psi(t)\,dt\right)\right\} xdt. \qquad (3)$$

Пусть $\overline{X}(u)$ и $\overline{\overline{X}}(v)$ — нормированные интегральные матрицы систем

$$\begin{aligned} dx &= p(u)\,xdu, \\ dx &= q(v)\,xdv \end{aligned} \qquad (4)$$

и пусть $\lambda_{\min}^{(u)}$ — наименьшее характеристическое число функций, входящих в матрицу $\overline{X}(u)$, а $\mu_{\min}^{(v)}$ — наименьшее характеристическое число функций, входящих в матрицу $\overline{\overline{X}}(v)$.

Пусть далее

$$\alpha = \overline{\lim}\frac{\int_0^t \varphi(t)\,dt}{t}, \qquad \beta = \overline{\lim}\frac{\int_0^t \psi(t)\,dt}{t}. \qquad (A)$$

Доказано, что для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha\lambda_{\min}^{(u)} + \beta\mu_{\min}^{(v)} > 0.$$

Пусть даны произвольные правильные системы

$$dx = p(u)\,xdu, \qquad (5)$$

$$dx = q(v)\,xdv. \qquad (6)$$

Для того чтобы система

$$dx = (p(u) + q(v))\,xdu \qquad (7)$$

была правильной, необходимо и достаточно, чтобы характеристические числа $\lambda_s^{(u)}$, $\mu_s^{(v)}$ систем (5) и (6) и характеристические числа $\lambda_s^{(u,u)}$ системы (7) были связаны соотношением

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(u,u)} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(u)} + \sum_{s=1}^{n} \mu_s^{(v)}.$$

Пусть в системах

$$dx = Axdu + P(u, x)du,$$
$$dx = Bxdv + Q(v,x)dv$$

A и B — постоянные перестановочные матрицы, а матрицы $P(u, x)$ и $Q(v, x)$ удовлетворяют условию $\operatorname{mod}(P, Q) < L\left(\sum_{s=1}^{n} |x_s|\right)^m$ (L и m — константы, $m > 1$). Нулевое решение системы

$$dx = (A\varphi(t) + B\psi(t))xdt + \left\{\varphi(t)P\left(\int_0^t \varphi(t)\,dt,\ x\right) + \psi(t)Q\left(\int_0^t \psi(t)\,dt,\ x\right)\right\}dt$$

будет асимптотически устойчиво, если имеет место неравенство

$$\max \operatorname{Re}(\alpha\lambda_s^{(a)}) + \max \operatorname{Re}(\beta\lambda_r^{(b)}) < 0,$$

где $\lambda_s^{(a)}$ и $\lambda_r^{(b)}$ — собственные значения матриц A и B; а α и β определены соотношением (A). Е. А. Барбашин

2642. Об устойчивости периодических режимов в нелинейных системах с кусочно-линейной характеристикой. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 6, 606—608 (рез. англ.)

Рассматривается система автоматического регулирования, описываемая уравнениями

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j + \lambda_i f(z_1) + F_i(t) \quad (i = 1,\ldots,n), \qquad (1)$$

a_{ij}, λ_j — постоянные, $F_i(t)$ — периодические функции периода τ, $f(z_1)$ — кусочно-линейная функция, причем переход с одной прямой характеристики $f(z_1)$ на другую осуществляется в моменты, когда z_1 впервые приобретает заданные значения σ_α ($\alpha = 1,\ldots,r$). Предполагая, что найдено периодическое решение $z = z(t)$ системы (1), например способом, указанным авторами для разрывных систем (1) (РЖМат, 1959, 367, 368), авторы дают метод исследования устойчивости этого решения по Ляпунову. Этот метод является конкретизацией для системы (1) общего приема исследования устойчивости по первому приближению траекторий разрывных систем, разработанного авторами (РЖМат, 1959, 362). Для исследования устойчивости $z(t)$ в соответствии с этим методом следует составить систему линейного приближения

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \lambda_i l(t)x_1, \qquad (2)$$

где $l(t)$ — периодическая кусочно-постоянная функция $l(t) = k_\alpha$ ($t_{\alpha-1} < t < t_\alpha$, $\alpha = 1, 2,\ldots$), и добавить к системе условия разрывов траекторий (2) при $t = t_\alpha$

$$x_i(t_\alpha + 0) - x_i(t_\alpha - 0) = R_i^\alpha x_1(t_\alpha - 0), \qquad (3)$$

где

$$R_i^\alpha = \varepsilon\lambda_i\xi\frac{1}{\dot{\tilde{z}}_i(t_\alpha - 0)}$$

и ξ — величина разрыва функции $f(z_1)$ при $z = \tilde{z}_1(t_\alpha)$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$ в зависимости от направления пересечения поверхности разрыва траекторией $z = z(\tau)$. В результате интегрирования уравнений (2) с учетом разрывов (3) при $t = t_\alpha$ получается матрица U, определяющая значение $x(t_0 + \tau)$ по формуле $x(t_0 + \tau) = Ux(t_0)$.

Авторами доказано, что уравнение

$$\det(U - \lambda E) = 0 \qquad (4)$$

в рассматриваемом разрывном случае играет в вопросах устойчивости ту же роль, что и характеристичное уравнение Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.-Л., 1950) в классическом случае. Поэтому для устойчивости решения $z = z(t)$ достаточно, чтобы корни уравнения (4) были расположены в единичном круге.

Метод исследования устойчивости, предложенный авторами и опирающийся на их теорему об устойчивости по первому приближению, позволяет значительно сократить выкладки, которые необходимо выполнять при исследовании устойчивости непосредственным интегрированием уравнений возмущенного движения с припасовыванием при $t = t_\alpha$. Н. Н. Красовский

2643. Об устойчивости в бесконечномерных пространствах. Массера (Sobre la estabilidad en espacios de dimension infinita. Massera José L.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fis. argent., 1955, **17**, 135—147 (исп.)

Предлагается обобщение теоремы автора, опубликованной в Ann. Math., 1949, **50**, 705—721, касающейся существования функции Ляпунова. Это обобщение состоит в распространении упомянутой теоремы на случай дифференциальных уравнений, заданных в бесконечномерном пространстве. В. И. Зубов

2644. Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 5, 967—969

Рассматривается система дифференциальных уравнений с малым параметром

$$\varepsilon\dot{x}^l = f^l(x^1,\ldots,x^k, y^1,\ldots,y^l),$$
$$\dot{y}^j = g^j(x^1,\ldots,x^k, y^1,\ldots,y^l),$$
$$i = 1,\ldots,k; \quad j = 1,\ldots,l.$$

Дается схема доказательства справедливости асимптотических разложений для решений этой системы в окрестности точки срыва (т. е. точки, где $\operatorname{Det}\|\partial f^i/\partial x^\alpha\| = 0$), которые были написаны в предыдущих работах (РЖМат, 1958, 6712). Основная идея доказательства характерна для ряда работ различных авторов, относящихся к теории систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, и состоит в том, что формальное приближение окружается замкнутой окрестностью, бесконечно суживающейся при $\varepsilon \to 0$ и обладающей тем свойством, что траектории исследуемой системы уравнений, попавшие внутрь этой окрестности, не выйдут из нее на всем протяжении того участка, для которого построено формальное приближение. А. Б. Васильева

2645. Об исследовании устойчивости с помощью способа «гармонического баланса». Пешка (Über Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe des Verfahrens der «harmonischen Balance». Peschka W.), Österr. Ingr-Arch., 1957, **11**, № 4, 276—285 (нем.)

При исследовании устойчивости динамических систем, описываемых нелинейными уравнениями типа

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu + \mu_i f_i(x_1, x_2,\ldots,x_n) \quad (\nu = 1, 2, 3,\ldots,n), \qquad (1)$$

к этим уравнениям применяется „гармоническая линеаризация", в результате чего (1) заменяются линейными соотношениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(a_{i\nu}^* \frac{dx_\nu}{dt} + \bar{a}_{i\nu}x_\nu\right) \quad (\nu = 1, 2, 3,\ldots,n). \qquad (2)$$

Коэффициенты линейной системы (2) (Ersatzsystem), т. е. величины $a^*_{i\nu}$ и $\bar{a}_{i\nu}$ определяются из допущения существования периодических решений системы (1) и возможности разложения нелинейных функций f_i в ряд Фурье; отсюда, путем сравнения коэффициентов соответствующих тригонометрических разложений для систем (1) и (2), находят значения $a^*_{i\nu}$ и $\bar{a}_{i\nu}$ через коэффициенты заданной системы (1), чем и определяется линеаризованная система (2), являющаяся заменителем данной нелинейной. Указан ряд приложений к частным примерам нелинейных систем разного характера. А. И. Попов

2646. О связи между линейной динамической системой и дифференциальным уравнением в пространстве Банаха. Шолохович Ф. А., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 43—46

В банаховом пространстве B рассматривается линейная динамическая система, т. е. однопараметрическая группа $f(p, t) = f(t)\,p$ гомеоморфных преобразований B на себя, удовлетворяющая условиям:

а) $f(p, 0) = p$, б) $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$, в) $f(p, t)$ непрерывна по совокупности аргументов, г) $f(p_1 + p_2, t) = f(p_1, t) + f(p_2, t)$.

Теорема 1. Для того чтобы линейная динамическая система $f(t)\,p$ соответствовала уравнению

$$dp/dt = Ap, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{t\to 0} \| f(t) - I \| = 0$$

(I — тождественный оператор).

Требование теоремы (1) означает равномерную непрерывность функции $f(t)$ при $t = 0$.

Теорема 2. Для того чтобы однопараметрическая группа $f(t)$ линейных операторов задавала динамическую систему $f(t)\,p$, достаточно выполнения двух условий: 1) $f(0) = I$, 2) $f(t)$ сильно непрерывна при $t = 0$.

Указывается, что в конечномерном пространстве линейная динамическая система всегда соответствует дифференциальному уравнению.

Две линейные динамические системы $f(t)\,p$ и $g(t)\,q$ $p \subset B$, $q \subset B'$ называются линейно гомеоморфными, если существует линейный взаимно непрерывный изоморфизм Ф банаховых пространств B и B' такой, что из равенства $q = \Phi(p)$ следует равенство $g(t)\,q = \Phi(f(t)\,p)$.

Если линейная динамическая система $f(t)\,p$ соответствует дифференциальному уравнению (1), то этим же свойством обладает всякая динамическая система $g(t)\,q$, линейно гомеоморфная системе $f(t)\,p$.

В заключение строится пример динамической системы $f(t)\,p$ такой, что $\| f(t) \|$ имеет счетное число точек разрыва. Этот пример дает отрицательный ответ на проблему Э. Хилла (Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951, стр. 225).

Е. А. Барбашин

2647. Дифференциальное уравнение с абстрактным эллиптическим оператором в гильбертовом пространстве, Крейн С. Г., Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 2, 233—236

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} + Av = 0, \qquad (1)$$

где A — неограниченный оператор со всюду плотной областью определения $D(A)$, действующий в гильбертовом пространстве H, при начальном условии

$$v(0) = v_0 \in D(A). \qquad (2)$$

Определения. Функция $v(t)$ со значениями в H называется решением уравнения (1) на $[0, T]$, если на $[0, T]$ существует сильная производная $\frac{dv}{dt}$, значения $v(t)$ принадлежат $D(A)$ и удовлетворяют уравнению (1).

Задача (1) — (2) называется корректной на сегменте $[0, T]$, если 1) решение задачи существует при любом $v_0 \in D(A)$, 2) решение единственно, 3) решение непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t на $[0, T]$.

Оператор B называется оператором дробного порядка относительно положительно определенного оператора A, если существуют положительные константы $\gamma < 1$ и K_γ такие, что

$$\| Bv \| \leqslant K_\gamma \| A^\gamma v \| \qquad (3)$$

при любом $v \in D(A)$; порядок оператора B определяется как точная нижняя грань чисел γ, для которых выполняется неравенство (3).

Оператор S называется эллиптическим, если он является суммой положительно определенного самосопряженного оператора A и оператора B дробного порядка относительно A: $S = A + B$.

Для уравнения

$$\frac{dv}{dt} + (A + B)\,v = 0 \qquad (4)$$

доказывается

Теорема 3. Задача (4) — (2) с эллиптическим оператором корректна.

Устанавливается аналитичность всех решений уравнения (4) внутри некоторого угла $|\arg t| < \varphi_0$ (φ_0 не зависит от $v(0)$). Результаты переносятся на случай переменного эллиптического оператора $S(t) = A(t) + B(t)$, при некоторых ограничениях на операторы $A(t)$, $B(t)$.

Неравенства для дифференциальных эллиптических операторов L_{2m}, полученные в работах О. А. Ладыженской (РЖМат, 1957, 453), Л. Ниренберга (РЖМат, 1958, 1203) и референта (РЖМат, 1956, 3018), гарантируют применимость указанных результатов в том случае, когда A есть соответствующий эллиптический оператор. О. В. Гусева

2648. О равномерной устойчивости счетной, почти линейной системы дифференциальных уравнений, линейная часть которой является приводимой. Ермолаев Л., Уч. зап. Алма-Атинск. гос. женск. пед. ин-та, 1958, вып. 1, 102—107

Рассматривается система

$$\frac{dx_s}{dt} = P_{ss}x_s \quad (s = 1,2, \ldots),$$

где P_{ss} — вещественные или комплексные непрерывные функции t, удовлетворяющие условию

$$| P_{ss} | \leqslant Q(t),$$

где $Q(t)$ — непрерывная вещественная функция. Исследуются условия равномерной ограниченности нормы решения системы (в смысле ограниченности множества верхних граней компонент). На основании этого делается заключение о равномерной устойчивости тривиального решения системы

$$\frac{dy_s}{dt} = P_{ss}y_s + f_s(t, y_1, y_2, \ldots) \quad (s = 1,2, \ldots),$$

где функции f_s удовлетворяют условиям

$$f_s(t, 0, 0, 0, \ldots) = 0,$$

$$| f_s(t, y_1', y_2', \ldots) - f_s(t, y_1'', y_2'', \ldots) | \leqslant$$

$$\leqslant G(t).\ \sup[\,| y_1' - y_1'' |,\ | y_2' - y_2'' |, \ldots],$$

при этом функция $G(t)$ суммируемая.

Примечание референта. В формулировках и доказательствах имеются неправильности, например в доказательстве теоремы 2 равенство, следующее за (16), неверно, для системы (2) делаются в разных местах два предположения, с одной стороны, $a > 0$ (стр. 103), с другой, — $a < -c^2$, где $c \geq 0$ (стр. 105), для непрерывной функции $Q(t)$ указывается область, зависящая не только от t, но и от x_s (стр. 102, 103). И. П. Макаров

2649. Некоторые вопросы устойчивости счетных систем дифференциальных уравнений. Темирбаева М. К., Уч. зап. Алма-Атинск. гос. женск. пед. ин-та, 1958, вып. I, 144—157

Результаты М. Р. Решетова (Изв. АН КазССР, Сер. матем. и механ., вып. 3, 1949), полученные им для систем с треугольной линейной частью, распространяются на системы вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{sk}(t)\, x_k + L_s(t, x_1, x_2, \ldots) \quad (s = 1,2, \ldots),$$

где $P_{sk}(t)$ — непрерывные при $t \geq 0$ (вещественные или комплексные) функции, $L_s(t, x_1, x_2)$ — члены более высокого порядка. В различных предположениях об ограниченности модулей коэффициентов линейной части и о малости нелинейных добавок исследуются условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения, в том числе и для случая наличия постоянно действующих малых возмущений. Библ. 4 назв. И. П. Макаров

2650. Некоторые теоремы о решениях линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с быстрорастущими коэффициентами. Протасов В. И., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1957, 3, № 2, 237—245

Подробно излагается содержание предыдущей заметки (РЖМат, 1957, 5539) с добавлением доказательств единственности решений. И. П. Макаров

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2651. Один принцип существования в линейном функциональном анализе и его применение к получению некоторых двойственных оценочных формул для дифференциальных уравнений. Фаэдо (Un principio di esistenza nellanalisi lineare e sua applicázione alla dualità di alcune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali. Faedo Sandro); Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 4, 434—437 (итал.)

Пусть u, v — элементы двух линейных многообразий U, V, $M_k(v)$, $L_k(v)$, $M_k^*(u)$, $L_k^*(v)$ — линейные операторы на этих многообразиях, значения которых принадлежат соответственно $L^{(q_k)}(E_k)$, $L^{(p_k)}(E_k)$, $L(p_k^*)(E_k)$, $L^{(q_k^*)}(E_k)$, где E_k — пространство с определенной на нем мерой μ_k, а числа q_k, p_k, p_k^*, q_k^* удовлетворяют соотношениям $1/p + 1/p^* = 1$, $1/q + 1/q^* = 1$.

Пусть для всех $v \in V$, $u \in U$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} [M_k(v)\, L_k^*(u) - M_k^*(u)\, L_k(v)]\, d\mu_k = 0. \qquad (1)$$

Через B_1, B_2, B_1^*, B_2^* обозначаются банаховы пространства векторов, k-е, координаты которых принадлежат $L^{(q_k)}(E_k)$, $L^{(p_k)}(E_k)$, $L^{(q_k^*)}(E_k)$, $L^{(p_k^*)}(E_k)$ соответственно.

Операторы M_k, L_k, M_k^*, L_k^* определяют операторы M, L, M^*, L^*, значения которых принадлежат соответственно B_1, B_2, B_1^*, B_2^*.

В работах Фикеры доказано, что если множество $L(V)$ плотно в B_2, выполнено соотношение (1) и

$$\| M(v) \| \leq K \| L(v) \|, \qquad (2)$$

то справедлива оценка

$$\| M^*(u) \| \leq K \| L^*(u) \|,$$

называемая двойственной по отношению к (2).

Автор рассматривает случай, когда $L(V)$ не плотно в B_2. Пусть $V_1 \subset V$ есть множество решений уравнения $L(v) = 0$ и пусть справедливо неравенство

$$\inf_{v_1 \in V_1} \| M(v + v_1) \| \leq K \| L(v) \|.$$

Тогда, если множество $M^*(U)$ содержит множество линейных функционалов, ортогональных $L(V)$, справедлива формула

$$\inf_{u_1 \in U_1} \| M^*(u + u_1) \| \leq K \| L^*(u) \|$$

для всех u таких, что $L^*(u)$ ортогонально к $M(V_1)$. Здесь $U_1 \subset U$ — множество таких элементов u, что $M^*(u)$ ортогонально к $L(V)$. Отмечается, что эти результаты можно применить к получению оценок для дифференциальных уравнений. Т. Д. Вентцель

2652. Об оценке близости решений краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Власов И. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 110—115

Рассматриваются уравнения

$$\Delta u + a_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_0(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2),$$

$$L(z) \equiv \Delta z + A_2(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} + A_1(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_0(x_1, x_2)\, z = g(x_1, x_2)$$

с однородными краевыми условиями. Даны некоторые оценки для решения u и его первых производных в зависимости от решения z, его производных, функции Грина для оператора L и разностей соответствующих коэффициентов. Имеются опечатки. В. Э. Аболиня

2653. Замечания о задаче Дирихле для общих линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Литман (Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations. Littman Walter), Communs Pure and Appl. Math., 1958, 11, № 1, 145—151 (англ.)

Изучается задача Дирихле для уравнения в частных производных

$$Lu = f, \qquad (1)$$

где L — линейный оператор порядка $2m$ с достаточно гладкими коэффициентами (вообще говоря, не эллиптический). Работа представляет собой развитие результатов Лоухиваара (Louhivaara, Rend. Circolo mat. Palermo, Ser. II, 1956, 5, 260—274).

Обозначения. Пусть D — область в n-мерном евклидовом пространстве, $C^j(\bar{D})$ — пространство j раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{D}$ функций, H_j — замыкание $C^j(\bar{D})$ в норме

$$(u, v)_j = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \int D^\alpha u \overline{D^\alpha v}\, dx, \quad |u|_j = \sqrt{(u, u)_j},$$

$\mathring{H}_j$ — замыкание в j- норме функций из $C_j(\overline{D})$ с компактным носителем в D.

На $\mathring{H}_j$ можно записать

$$(v, Lu) = \sum_{0<|\alpha|,\ |\beta|<m} (D^\alpha v, a^{\alpha,\beta} D^\beta u) = B(u, v).$$

Билинейная форма $B(u, v)$ называется формой Дирихле, соответствующей оператору L. Имеет место неравенство

$$|B(u,v)| \leqslant C_1 |v|_m |u|_m. \quad (2)$$

Определение. Обобщенной задачей Дирихле называется следующая задача: для данных $g \in H_m$ и $f \in L_2$ найти функцию $u \in H_m$ такую, что $u - g \in \mathring{H}_m$ и

$$B(v, u-g) = (v, f) - B(v, g) \quad (3)$$

для всех $v \in \mathring{H}_m$.

Для $g = 0$ надо найти $u \in \mathring{H}_m$ такую, что

$$(v, f) = (v, Au)_m = (A^* v, u)_m$$

для всех $v \in \mathring{H}_m$.

Ясно, что необходимым условием разрешимости задачи является равенство

$$(N, f) = 0, \quad (4)$$

где N есть нуль-пространство оператора A^*.
Известно, что этого условия недостаточно.

Далее выясняются некоторые достаточные признаки разрешимости.

Пусть $B(x, y)$ — билинейный функционал в гильбертовом пространстве H такой, что

$$|B(x, y)| < \alpha |x| \cdot |y|,$$

и пусть S — замкнутое подпространство в H. Тогда каждому $y \in H$ соответствуют элементы $y_*, y^* \in S$, удовлетворяющие требованиям

$$B(y - y_*, S) = 0, \quad B(S, y - y^*) = 0,$$

причем y_* и y^* определяются единственным образом. y_* называется B-проекцией y на S.

Пусть далее $Au = \int_{-1}^{1} \lambda dE_\lambda u$ (пределы интегрирования ± 1 в силу предположения $|A| \leqslant 1$) и вводятся пространства S_+^ε и S_-^ε — проекции H операторами

$$\int_{\varepsilon}^{1} dE_\lambda \quad \text{и} \quad \int_{-}^{-\varepsilon} dE_\lambda.$$

Для произвольного $v \in \mathring{H}_m$ обозначим через v_+^ε B-проекцию v на S_+^ε и через v_-^ε B-проекцию на S_-^ε и положим

$$v_0^\varepsilon = v - v_+^\varepsilon - v_-^\varepsilon.$$

Через S_0^ε обозначим множество всех таких v_0^ε.

Теорема 1. Достаточным условием для разрешимости задачи (3) является требование, что для всех $v_0^\varepsilon \in S_0^\varepsilon$

$$(v_0^\varepsilon, f) - B(v_0^\varepsilon, g) = 0.$$

Далее автор исследует вопрос о гладкости решения в случае гладкой правой части $f \in H_k$. Область D предполагается достаточно регулярной. Тогда известно, что эллиптический оператор M порядка $2m$ имеет ограниченный обратный M^{-1}, взаимно однозначно отображающий H_k в $\mathring{H}_m \cap H_{2m+k}$. Пусть L — оператор порядка $2m$ такой, что LM^{-1} симметрический на H_k. Тогда он ограничен и имеет место спектральное разложение в H_k

$$LM^{-1} = \int_{-a}^{a} \lambda dF_\lambda.$$

Обозначая через Q_0^ε проекцию H с помощью оператора $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dF_\lambda$, автор доказывает следующее:

Теорема 2. Если для любого $\varepsilon > 0$

$$(Q_0^\varepsilon, f)_k = 0,$$

то уравнение (1) имеет решение в $\mathring{H}_m \cap H_{2m+k}$.

А. Л Крылов

2654. Унитарное решение для дифференциального оператора, линейного и аналитического. Лере (La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire et analytique. Leray Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2146—2152 (франц.)

Пусть $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum^{\bullet}_{j_1+\ldots+j_e=j\leqslant m} a_{j_1,\ldots,j_e}(x) \frac{\partial^j}{\partial x^{j_1}_1 \ldots \partial x^{j_e}_e}$.

Унитарным решением (у. р.) назовем решение $u(\xi, y)$ уравнения $a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(\xi, y) = 1$ с данными Коши для u на гиперплоскости $\xi_0 + \xi_1 y_1 + \ldots + \xi_l y_l = 0$. Формулируются свойства $u(\xi, y)$: регулярность (униформизация), связь с у. р. специальным образом определенной сопряженной задачи (взаимность), явное выражение u. Построенное у. р. позволяет свести решение общей задачи Коши к квадратурам.

А. А. Дезин

2655. Новое в теории систем дифференциальных уравнений в области аналитических функций. Грёбнер (Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico. Gröbner Volfango), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), **23**, № 6, 375—379 (итал.)

Пусть дан линейный дифференциальный оператор

$$D = \vartheta_1(z)\partial/\partial z_1 + \ldots + \vartheta_n(z)\partial/\partial z_n \quad (z = (z_1, \ldots, z_n))$$

с коэффициентами, голоморфными в ограниченной области D комплексного пространства $z_1, \ldots, z_n$. Тогда для любой $F(z)$, голоморфной в D, „ряд Ли"

$$G(z,t;F) = F(z) + tDF(z)/1! + t^2 D^2 F(z)/2! + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно для всех достаточно малых $|t|$. При этом $G(z,t;F_1 + F_2) = G(z,t;F_1) + G(z,t;F_2)$; $G(z,t;F_1F_2) = G(z,t;F_1)\,G(z,t;F_2)$, а если обозначить $Z_i = G(z,t;z_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $G(z,t;F) \equiv F(Z)$. Функции Z_i образуют решение задачи Коши

$$dZ_i/dt = \vartheta_i(Z), \quad (Z_i)_{t=0} = z_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Аналогично строится решение начальной задачи

$$\partial Z_i/\partial t_k = \vartheta_{ik}(Z), \quad (Z_i)_{t_k=0} = z_i \quad (i = 1, \ldots, n;$$
$$k = 1, \ldots, m)$$

(если выполнены условия интегрируемости системы), а также совокупность n функционально независимых решений системы

$$\frac{\partial Z}{\partial t_k} = \vartheta_{1k}(z)\frac{\partial Z}{\partial z_1} + \ldots + \vartheta_{nk}(z)\frac{\partial Z}{\partial z_n} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Подробные доказательства и приложение к проблеме n тел будут даны в других работах.

А. Д. Мышкис

2656. О линейном однородном дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка. Касуга (On the homogeneous linear partial differential equation of the first order. Kasuga Takashi), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 39—67 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\mu} = 0, \quad n \geqslant 1, \qquad (1)$$

в предположении, что функции $f_\mu (\mu = 1, \ldots, n)$ являются непрерывными и имеющими непрерывные частные производные $\partial f_\lambda / \partial y_\mu (\lambda, \mu = 1, \ldots, n)$ в области $G_{x,y} \equiv G$ изменения переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Непрерывная в G функция $z(x, y_1, \ldots, y_n)$ называется квазирешением уравнения (1) в G, если она имеет в G частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}$, за исключением, быть может, счетного множества точек и почти всюду в G удовлетворяет уравнению (1) (непрерывность упомянутых частных производных не предполагается). Доказываются следующие теоремы: 1) квазирешение уравнения (1) постоянно на каждой характеристической кривой этого уравнения, 2) задача Коши $z|_{x=x_0} = \psi(y_1, \ldots, y_n)$ для уравнения (1) с дифференцируемой в $G_{x_0,y}$ функцией ψ, при некоторых дополнительных предположениях, допускает в G единственное квазирешение, которое в этом случае является решением в обычном смысле (т. е. дифференцируемым в G и всюду в G удовлетворяющим уравнению (1)) ,3) при $n = 1$ всякое квазирешение уравнения (1) является его решением в обычном смысле.

М. Н. Олевский

2657. **Дополнение к моей статье «О линейном однородном дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка». Касуга** (Supplement to my paper «On the homogenous linear partial differential equation of the first order». Kasuga Takashi), Osaka Math. J., 1956, **8**, № 1, 139—143 (англ.)

Автор распространяет здесь теорему 2 предыдущей работы (реф. 2656) на уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\mu} = h(x, y_1, \ldots, y_n)\, z + k(x, y_1, \ldots, y_n);$$

функции h, k и f_μ $(\mu = 1, \ldots, n)$ предполагаются непрерывными в рассматриваемой области G и имеющими непрерывные частные производные первого порядка по $y_1, \ldots, y_n$.

М. Н. Олевский

2658. **Интегрально полурегулярные решения некоторых уравнений с частными производными. Чернер** (Solutions intégralement semi-régulières de certaines équations aux dérivées partielles. Zerner Martin), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 6, 874—877 (франц.)

Пусть u —решение уравнения $\partial^2 u/\partial x \partial y + A\partial u/\partial x + B\partial u/\partial y + Cu = 0$, где A, B, C,—дифференциальные операторы по $z = (z_1, \ldots, z_l)$ с бесконечно дифференцируемыми по x, y, z коэффициентами. Тогда, если u обладает определенной регулярностью по z, оно представимо в качестве суммы двух обобщенных функций, удовлетворяющих некоторым специальным требованиям гладкости по x и y.

А. А. Дезин

2659. **Сведение задачи интегрирования в целом систем уравнений в полных дифференциалах к той же задаче для меньшего числа измерений. Пиконе** (Riduzione dimensionale del problema dell'integrazione, in grande, dei sistemi di equazioni ai differenziali totali. Picone Mauro), Atti. Accad naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **22**, № 3, 242—249 (итал.)

Рассматривается система уравнений в полных дифференциалах

$$du = \sum_{i=1}^{\nu} e^{(i)}(x, u)\, dx_i, \qquad (1)$$

где u—вектор, и изучается вопрос о существовании однозначного решения этой системы в данной области. Указываются случаи, когда интегрируемость системы (1) следует из интегрируемости систем с меньшим числом переменных, полученных определенным образом из данной системы, в областях, которые являются проекциями исходной области. Приведены примеры для случая одной функции трех переменных.

Т. Д. Вентцель

2660. **О точках касания двух интегралов уравнения с частными производными первого порядка. Плись** (On contact points of two integrals of a partial differential equation of the first order. Pliš A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 1, 11—14 (англ.; рез. русск.)

Хорошо известно, что если два решения $\bar{z}$ и $\bar{s}$ уравнения

$$z_x = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, z_{y_1}, \ldots, z_{y_n}) \quad (f \in C^2),$$

принадлежащие C^2, касаются в некоторой точке, то они касаются вдоль всей соответствующей характеристики. Опираясь на свои предыдущие результаты (РЖМат, 1956, 1345 и 195), автор показывает, что это остается справедливым, если: 1) $n = 1$, f, $\bar{z}$, $\bar{s} \in C^1$ и система (полная) уравнений характеристик имеет при соответствующем начальном условии единственное решение или 2) $f \in C^2$, $z, \bar{s} \in C^1$ и $\bar{z}$ удовлетворяет по $y_1, \ldots, y_n$ условию Гёльдера с показателем $> 1/2$. Если же только $f \in C^1$, то на примере показано, что уравнение (при $n = 1$) может иметь два полиномиальных решения, соприкасающихся в единственной точке.

А. Д. Мышкис

2661. **О теоремах сравнения и связанных с ними принципах в теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными. Симода Сэцуро**, Сугаку, 1958, **9**, № 3, 153—166 (японск.)

2662. **Обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Кошелев А. И.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 206—207

2663. **О теореме Харнака. Адамар** (Sur le théorème de A. Harnack. Hadamard J.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 3, 177—181 (франц.)

Дается доказательство теоремы Харнака для функций, удовлетворяющих общему эллиптическому уравнению второго порядка, при условиях, обеспечивающих единственность решения. Метод заключается в сведении к интегральному уравнению и использовании свойств положительности ядра, устанавливаемых путем соответствующей аппроксимации его фундаментальным решением.

А. А. Дезин

2664. **Положительно бесконечные сингулярности решений линейных эллиптических уравнений. Иноуэ** (Positively infinite singularities of solutions of linear elliptic partial differential equations. Inoue Masao), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1957, **A8**, № 1, 43—50 (англ.)

Определения и обозначения. Пусть Ω — замкнутая плоская область и в ней дано уравнение $\mathfrak{F}[u] = 0$. Будем говорить, что u есть $\mathfrak{F}$-функция, если в любой открытой области, содержащейся в Ω, она есть решение уравнения $\mathfrak{F}[u] = 0$.

Если E — замкнутое множество в Ω, то говорят, что оно имеет $\mathfrak{F}$-емкость нуль, и пишут $C_{\mathfrak{F}}(E) = 0$, если существует открытое множество $0 \supset E$ и $\mathfrak{F}$-функция u в $O - E$ такая, что

$$\lim_{(x,y) \to (x'y')} u(x, y) = +\infty$$

для каждой граничной для $O - E$ точки $(x'y') \in E$. Если $\mathfrak{F}[u] \equiv \Delta u$, то $C_{\mathfrak{F}}(E) = 0$ значит, что E имеет логарифмическую емкость нуль. В дальнейшем это пишется просто в виде $C(E) = 0$.

Цель статьи — установление условий того, что из $C_{\mathfrak{F}}(E)=0$ следует $C(E)=0$ и обратно.

Определим обобщенный оператор Лапласа $\Delta^* u$:

$$\Delta^* u = \lim_{\rho\to 0}\frac{4}{\rho^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+\rho\cos\vartheta, y+\rho\sin\vartheta)\,d\vartheta - u(x,y)\right\},$$

$$\Delta^* u = \lim_{\rho\to 0}\frac{8}{\rho^2}\left\{\frac{1}{\pi^2\rho^2}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} u(x+r\cos\vartheta, y+ r\sin\vartheta)\,r\,dr\,d\vartheta - u(x,y)\right\}.$$

Теорема 1. Пусть O — открытое множество на плоскости, E^* — внешняя граница замкнутого множества $E\subset O$ и O^* — часть O, внешняя относительно E^*. Пусть далее $a(x,y)$, $b(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в O^* такие, что a, b, a_x, b_y равномерно ограничены в O^*, и пусть $\varphi(x,y,u)$ — непрерывная функция для $(x,y)\in O^*$, $-\infty < u < \infty$, удовлетворяющая условиям

$$\sup_{(x,y)\in O^*, u>1}\frac{|\varphi(x,y,u)|}{u} < \infty \quad \text{или}$$

$$\inf_{(x,y)\in O^*, u>1}\varphi(x,y,u) > -\infty.$$

Если существует в O^* решение уравнения

$$\Delta^* u + au_x + bu_y + \varphi(x,y,u) = 0,$$

удовлетворяющее на границе $\lim\limits_{(x,y)\to(x^*y^*)} u(x,y) = +\infty$ для всех точек $(x^*y^*)\in E^*$, то логарифмическая мощность E есть O.

Пусть $\{\mathfrak{F}\}$ есть семейство $\mathfrak{F}$-функций, определенных в любой открытой подобласти Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

C_1) Если $f\in\{\mathfrak{F}\}$ и $g\in\{\mathfrak{F}\}$, то и $\lambda f+\mu g\in\{\mathfrak{F}\}$ для любых действительных λ и μ.

C_2) Если $f_n\in\{\mathfrak{F}\}$ в некоторой открытой области O сходятся к функции f равномерно в любом замкнутом подмножестве из O, то $f\in\{\mathfrak{F}\}$ в O.

C_3) Пусть E — замкнутое множество меры O в Ω. Тогда существует область $D\supset E$ такая, что для каждой $z\in E$ существует функция

$$G(\varphi,z) = w(\varphi,z)\log\frac{1}{|\varphi - z|} + v(\zeta,z),$$

принадлежащая к $\{\mathfrak{F}\}$ в $D-E$ как функция ζ, а $w(\zeta,z)$ и $v(\zeta,z)$ удовлетворяют условиям $M > w(\zeta,z) > m$; $|v(\zeta,z)| < N$ для $\varphi\in D-E$, $z\in E$. (M, m, N — положительные постоянные, не зависящие от ζ, z).

Теорема 2. Пусть $\{\mathfrak{F}\}$ удовлетворяет условиям C_i $(i=1,2,3)$ Тогда, если $C(E)=0$, то $C_{\mathfrak{F}}(E)=0$.

Теорема 3 (приложение теорем 1, 2). Пусть $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ и $f(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в Ω. Возьмем за $\mathfrak{F}[u]=0$ уравнение эллиптического типа

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu + f = 0.$$

Тогда $C_{\mathfrak{F}}(E)=0$ эквивалентно $C(E)=0$.

Введем далее условия:

C_4) Пусть D — произвольная область, ограниченная конечным числом гладких кривых в Ω, и f есть $\mathfrak{F}$-функция в $B(D)$ — на границе D (т. е. она есть $\mathfrak{F}$-функция в некоторой открытой области, содержащей $B(D)$). Тогда задача Дирихле для D и f относительно $\mathfrak{F}$ имеет решение — т. е. есть функция, принадлежащая $\mathfrak{F}$ в D, непрерывная в $D\cup B(D)$ и равная f на $B(D)$.

C_5) Пусть D — произвольная подобласть Ω. Если u непрерывна в $D\cup B(D)$, принадлежит $\{\mathfrak{F}\}$ в D и исчезает на $B(D)$, то u тождественно равна нулю в D.

Теорема 4. Пусть $\{\mathfrak{F}\}$ удовлетворяет условиям C_1), C_4), C_5) и пусть O — открытое множество в Ω, а E — замкнутое $\mathfrak{F}$-мощности нуль, содержащееся в O. Тогда, если v — ограниченная $\{\mathfrak{F}\}$-функция в $O-E$, то можно доопределить v на E так, что она останется $\mathfrak{F}$-функцией и в O.

Теорема 5. Пусть E — ограниченное замкнутое множество логарифмической мощности нуль в D и пусть u есть ограниченное решение уравнения

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu + f = 0$$

в $D-E$, где a, b, c и f непрерывно дифференцируемы в D. Тогда можно доопределить u в E так, что u будет удовлетворять уравнению во всем D. А. Л. Крылов

2665. Потенциалы, порождаемые некоторыми особенностями при наличии фиксированной сферы. Е, Мартинек, Ладфорд (The potentials due to certain singularities in the presence of a fixed sphere. Yeh G. C. K., Martinek J., Ludford G. S. S.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, **3**, № 3, 142—152 (англ.)

Под фиксированной понимается сфера, на которой нормальная производная потенциала обращается в нуль. Из особенностей рассматриваются: система источник — сток (положительный и отрицательный заряды суммы 0), дублет (диполь) и вихревое кольцо, расположенное на концентрической сфере. Потенциалы ищутся внутри и вне фиксированной сферы, причем их вычисление основывается на следующей теореме авторов: если $\varphi_0(r)=\varphi_0(r,\theta,\psi)$ — потенциал распределения масс внутри сферы $r=a$ общей массы нуль, то функция

$$\varphi_1(r,\theta,\psi) = \frac{a}{r}\varphi_0\left[\frac{a^2}{r}\right] + \frac{2}{ar}\int_a^{\infty}\lambda\varphi_0\left[\frac{\lambda^2}{r}\right]d\lambda \qquad (1)$$

гармонична внутри и на сфере, и при $r=a$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0+\varphi_1) = 0.$$

Для системы источник — сток в точках с радиус-векторами ω_1 и ω_2 $(\omega_1<a,\ \omega_2<a)$

$$\varphi_0(r) = \frac{m}{|r-\omega_1|} - \frac{m}{|r-\omega_2|}$$

и $$\varphi_1(r) = ma\left[\frac{1}{\omega_1\left|r-\frac{a^2}{\omega_1^2}\omega_1\right|} - \frac{1}{\omega_2\left|r-\frac{a^2}{\omega_2^2}\omega_2\right|}\right] + \frac{m}{a}\log\frac{a^2-\omega_2 r+\omega_2\left|r-\frac{a^2}{\omega_2^2}\omega_2\right|}{a^2-\omega_1 r+\omega_1\left|r-\frac{a^2}{\omega_1^2}\omega_1\right|}.$$

Для дублета M в точке ω $(\omega<a)$, $M=M_1+M_2$, где

$$M_1 = \frac{M\cdot\omega}{\omega^2}\omega, \quad M_2 = M - M_1,$$

имеем

$$\varphi_0(r) = \frac{M_1\cdot(r-\omega)}{|r-\omega|^3} + \frac{M_2 r}{|r-\omega|^3},$$

и находим

$$\varphi_1(r) = \frac{a^3(M_2-M_1)\cdot\left(r-\frac{a^2}{\omega^2}\omega\right)}{\omega^3\left|r-\frac{a^2}{\omega^2}\omega\right|^3} +$$

$$+\frac{M_2 r}{a\omega\left[r^2-\left(\frac{\omega-r}{\omega}\right)^2\right]}\left[\frac{\omega\cdot r}{\omega}+\frac{r^2-\frac{a^2}{\omega^2}(\omega\cdot r)}{\left|r-\frac{a^2}{\omega^2}\omega\right|}\right]-\frac{M_1}{a\omega}$$

— результат, совпадающий (с точностью до некоторых преобразований) с полученным Франком (Frank E., J. Appl. Phys., 1952, 23, 1125).

Аналогично решается вопрос для вихревого кольца, а также — во всех трех случаях — для потенциалов вне сферы. Для вычисления последних потенциалов авторы опираются на теорему Вейсса (Weiss P., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1944, 40, 259—261), которая, за исключением знака перед интегралом, совпадает с формулой (1) и не предполагает равенства нулю общей массы, распределенной вне сферы. В. И. Левин

2666. О третьей краевой задаче теории потенциала для неограниченного кругового цилиндра. Шуберт (Über das dritte Randwertproblem der Potentialtheorie für den beiderseits unendlich langen Kreiszylinder. Schubert Hans), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 5-6, 194—199 (нем.)

Пусть $g(\zeta)$, $-\infty<\zeta<\infty$ — вещественная функция, удовлетворяющая условиям $|g(\zeta+\Delta\zeta)-g(\zeta)|<A|\Delta\zeta|^{\lambda}(0<\lambda<1)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\zeta)|\,d\zeta<\infty,$$

и ищется гармоническая внутри цилиндра $r=1$ функция $\varphi(P)=\varphi(r,z)$, для которой на границе цилиндра

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}(z)+h_i\varphi_i(z)=g(z)\quad(h_i>0)$$

(значок i означает предельное значение при $r\to 1-0$) и

$$\lim_{P\to\infty}\varphi(P)=\lim_{P\to\infty}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(P)=0$$

равномерно по $r\leqslant 1-\delta$ ($\delta>0$). Показывается, что

$$\varphi(P)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{I_0(qr)}{qI_1(q)+h_iI_0(q)}\,dq\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cos q(z-t)\,dt.$$

В. И. Левин

2667. О разрывах второй производной потенциала силы тяжести на поверхностях разрыва плотности. Мауэрсбергер (Über die Unstetigkeiten der zweiten Ableitung des Schwerepotentials an Diskontinuitätsflächen der Dichte. Mauersberger Peter), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 9—10, 398 (нем.)

Эртелем (Ertel H., Z. angew. Math. und Mech., 1947, 25/27, 186—189) установлена связь между скачком $\{\sigma\}$ плотности σ на поверхности S ее разрыва и скачком $\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\right\}$ — второй производной потенциала силы тяжести Φ, взятой по направлениям двух произвольных единичных векторов u и v, а именно:

$$\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\right\}=4\pi k\{\sigma\}\cos(N,u)\cos(N,v),\qquad(1)$$

k — гравитационная постоянная, N — направление нормали к S. В заметке дается векторное доказательство формулы (1). М. Н. Олевский

2668. О сходимости одного предельного процесса в теории потенциала. Сухаревский И. В., Матем. сб., 1956, 38(40), № 2, 167—182

Пусть $z=z(s)$, $(-l''\leqslant s\leqslant l',\ l'>0,\ l''>0, z(-l'')=z(l'))$ уравнение простого гладкого выпуклого (допустимы прямолинейные участки) контура C в плоскости комплексного переменного z с одной угловой точкой $z_0=z(0)$; s — дуговая абсцисса; $K(\sigma,s)=-\frac{1}{\pi}\ln|z(s)-z(\sigma)|$, n_s — внутренняя нормаль в точке $z(s)$. Пусть $C'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ означает часть контура C, где $\varepsilon_1\leqslant s\leqslant l'$, $-\varepsilon_2\geqslant s\geqslant -l''$, $(\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0)$.

Доказываются:

Теорема 1. Пусть $\arg\frac{dz}{ds}\in\mathrm{Lip}\,\varkappa$, $(0<\varkappa\leqslant 1$, $0\leqslant s\leqslant l',\ 0\geqslant s\geqslant -l'')$. Тогда: а) Интегральное уравнение

$$u(s)-\lambda\int_{C'}K(\sigma,s)u(\sigma)\,d\sigma=f(s),\qquad(1)$$
$$z(s)\in C'(\varepsilon',\varepsilon_2)$$

не имеет собственных значений в круге $|\lambda|\leqslant 1$ и, следовательно, для любой непрерывной функции $f(s)$ существует единственное непрерывное решение $u_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(s)$ уравнения (1) при $\lambda=1$. б) Если $f(s)$ непрерывна на C, и z_0 — единственно возможная точка разрыва 1-го рода для $f(s)$, и интегральное уравнение (1′) (получающееся из (1) при $C'=C$, $\lambda=1$) имеет решение $u(s)$, причем $u(0)=0$, то при $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ $\left(0<k'\leqslant\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\leqslant k,\ k,k'-\text{const}\right)$ имеет место равномерная сходимость $u_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(s)\to u(s)$ на всякой дуге контура C, не содержащей точки z_0.

Теорема 2. Если C — гладкий контур и в точке z_0 кривизна отлична от нуля и если $f(s)$ непрерывна на C и $\int_C f(s)\,ds=0$, то существует единственное решение $u(s)$, $u(0)=0$ уравнения (1′), и к $u(s)$ при $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ равномерно на C, стремится функция $u_i(s)$, совпадающая с $u_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(s)$ на $C'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и равная нулю на $C-C'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Пусть $f(s)$ и C удовлетворяют условиям теоремы 2 и $u(s)$ упомянутое в теореме 2 решение (1′). Тогда потенциал простого слоя (ядро $\frac{1}{\pi}\ln|z-z(s)|$) с плотностью $u(s)$ является решением следующей краевой задачи.

Задача N. Найти функцию $\Phi(z)$ на плоскости z, непрерывную, при $z\to\infty$ имеющую вид $\gamma\ln|z|+O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ ($\gamma=\text{const}$), гармоническую внутри и вне C такую, что

$$\frac{\partial\Phi^+}{\partial n_s}=f(s),\qquad\frac{\partial\Phi^+}{\partial n_0}=\frac{\partial\Phi^-}{\partial n_0},$$

где Φ^+ и Φ^- — значения Φ внутри и вне C, n_0 — внутренняя нормаль в точке z_0.

Доказывается единственность решения задачи N.

Пусть теперь C' — простая незамкнутая гладкая дуга с концами z_1 и z_2, а $u_1(z)$ непрерывна на C'. Доказывается, что потенциал $\Phi_1(z)$ простого слоя с плотностью $u_2(z)$ имеет нормальные производные также в точках z_1 и z_2, и если $u_1(z)$ есть решение интегрального уравнения (1) при $\lambda=1$, то $\Phi_1(z)$ есть решение следующей задачи.

Задача N_1. На плоскости с разрезом C^1 найти непрерывную на C^1 гармоническую функцию $\Phi_1(z)$, при $z\to\infty$ имеющую вид $\gamma_1\ln|z|+O\left[\frac{1}{|z|}\right]$ и такую, что

$$\frac{\partial\Phi_1^+}{\partial n_s}=f(s),\ z(s)\in C',\ z\neq z_i\quad(i=1,2)$$

$$\frac{\partial\Phi_1^+}{\partial n_z}=f(z_i)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi^-}{\partial n_{z_i}}-\frac{\partial\Phi^+}{\partial n_{z_i}}\right]\quad(i=1,2),$$

где Φ_1^+ — значение Φ_1 с той стороны C^1, куда направлена нормаль n_s.

Доказывается единственность решения задачи N_1. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть C и f удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ $\left(0 < k' \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \leqslant k\right)$ решение задачи N_1 для $C^1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ стремится к решению задачи N равномерно в каждой конечной части плоскости.

Х. Л. Смолицкий

2669. О суммируемости потенциалов. Смолицкий Х. Л., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 349—356

Обобщаются и развиваются результаты С. Л. Соболева (Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во Ленингр. ун-та, 1950) и Л. В. Канторовича (РЖМат, 1958, 6586) об интегральных операторах и интегралах типа потенциала.

Пусть D — область m-мерного евклидова пространства, либо гладкое m-мерное многообразие конечной m-мерной меры. Аналогично k-мерное пространство D^1. Рассматривается оператор

$$U(P) = \int_{D'} K(P, Q)\, V(Q)\, dQ,$$

$$P \in D, \quad Q \in D', \quad V(Q) \in L_p(D') \quad (1 < p < \infty),$$

причем относительно ядра предполагается, что

$$\int_{D'} |K(P, Q)|^r dQ \leqslant C_1^r; \quad \int_D |K(P, Q)|^t dP \leqslant C_2^t$$

для почти всех P, Q.

Теорема 1. а) Если $p' = \frac{p}{p-1} \leqslant r < \infty$, то $U(P)$ существенно ограничена. б) Если

$$\left(1 - \frac{t}{p}\right) p' \leqslant r < p',$$

то $U(P)$ суммируема с любой степенью q,

$$q \leqslant q^* = \frac{t}{1 - \frac{r}{p'}}.$$

в) Если

$$0 < r < \left(1 - \frac{t}{p}\right) p' \leqslant 1,$$

то $U(P)$ суммируема с любой степенью q,

$$q \leqslant q^{**} = \frac{t - r}{1 - r}.$$

Далее изучается случай, когда D — область m-мерного пространства, D' — гладкое k-мерное многообразие в том же пространстве $(k < m)$, удовлетворяющее некоторым дополнительным требованиям; $R(P, Q) = R$ — расстояние между точками $P \in D$, $Q \in D'$.

Рассматривается оператор

$$U(P) = \int_{D'} V(Q)\, R^{-\lambda}\, dQ, \quad \lambda > 0.$$

Теорема 2. а) если $p' < \frac{k}{\lambda}$, то $U(P)$ ограничена и непрерывна. б) Если

$$\left(1 - \frac{m}{\lambda p}\right) p' < \frac{k}{\lambda} \leqslant p',$$

то $U(P) \in L_q(D)$,

где $$q < q^* = \frac{m}{\lambda - \frac{k}{p'}}.$$

в) Если

$$\frac{\kappa}{\lambda} < \left(1 - \frac{m}{p\lambda}\right) p' < 1,$$

то $U(P) \in L_q(D)$,

где $$q < q^{**} = \frac{m - k}{\lambda - k}.$$

Теорема 3. Оператор теоремы 1 вполне непрерывен из $L_p(D')$ в $L_p(D)$ при: а) $p' < r$, $q < \infty$; б) $\left(1 - \frac{t}{p}\right) \times p' < r \leqslant p'$, $q < q^*$; в) $0 < r \leqslant \left(1 - \frac{t}{p}\right) p' < 1$, $q < q^{**}$

Теорема 4. Оператор теоремы 2 вполне непрерывен а) из $L_p(D')$ в $C(D)$; б), в) из $L_p(D')$ в $L_q(D)$.

В заключение рассматривается пример потенциалов

$$U_1(P) = \int_S \frac{\mu(Q)}{R^{m-2}} dS_Q,$$

$$U_2(P) = \int_S \frac{\mu(Q)}{R^{m-1}} \cos(R, n) dS_Q$$

простого и двойного слоев с плотностью $\mu(Q) \in L_p(S)$ $(p > m - 1)$. Доказательства теорем 1—4 аналогичны доказательствам соответствующих теорем работ С. Л. Соболева и Л. В. Канторовича.

А. Л. Крылов

2670. О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала. Тодоров И. Т., Зидаров Д., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 262—264

Доказываются две теоремы о единственности решения обратной задачи потенциала при более общих предположениях относительно формы тел по сравнению с известными теоремами П. С. Новикова (Докл. АН СССР, 1938, 18, № 3, 165 — 168) и Л. Н. Сретенского (РЖМат, 1955, 4434). Например, теорема 1 формулируется следующим образом. Пусть T_1 и T_2 — два тела с одинаковой постоянной плотностью, ограниченные кусочно-гладкими поверхностями S_1 и S_2 соответственно. Вводятся обозначения: S_α^i $(\alpha = 1,2)$ — часть поверхности S_α, внутренняя для $\overline{T_1 \cup T_2}$; $S^i = S_1^i \cup S_2^i$; S^e — граница тела $\overline{T_1 \cup T_2}$. Пусть существует точка O, такая, что если R — радиус-вектор с началом в O, (R, ν) — скалярное произведение вектора R на единичный вектор ν внешней нормали к S_α, то имеет место неравенство

$$\int_{S^i} |(R, \nu)|\, dS \leqslant \int_{S^e} |(R, \nu)|\, dS.$$

Тогда, если тела T_α порождают одинаковые потенциалы вне $\overline{T_1 \cup T_2}$, то они совпадают.

Ю. А. Шашкин

2671. О неравенстве $\Delta u \geqslant f(u)$. Осерман (On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$. Osserman Robert), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1641—1647 (англ.)

Основной результат статьи составляет

Теорема 1. Пусть функция $f(t)$ положительна, непрерывна, при достаточно больших t монотонно возрастает и

$$\int^{\infty} \left(\int_0^t f(s)\, ds\right)^{-1/2} dt < \infty.$$

Тогда дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не может одновременно удовлетворять

неравенству $\Delta u > 0$ во всем пространстве и неравенству $\Delta u \geqslant f(u)$ вне какой-либо сферы.

Как следствие теоремы 1 получается

Теорема 2. Если гауссова кривизна K односвязной поверхности S удовлетворяет неравенству $K \leqslant -\varepsilon < 0$, $\varepsilon = \text{const}$, то K конформно эквивалентна внутренности круга. С. Г. Михлин

2672. О фундаментальных решениях дифференциальных уравнений анизотропного упругого тела. Башелейшвили М. О., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1957, 19, № 4, 393—400 (груз); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, 19, № 4, 393—400

Для некоторых систем уравнений теорий упругости с постоянными коэффициентами (в частности, для систем трансверсально-изотропных и некоторых случаев ортотропных тел) получены в замкнутой форме и с помощью элементарных функций фундаментальные решения, которые играют существенную роль в теории соответствующих граничных задач. Автор делает шаг вперед по сравнению с Е. Кренером (РЖМат, 1955, 1292), который получил аналогичные решения еще раньше, но для более частных систем и, исходя из известной формулы Фредгольма, дающей общее выражение для фундаментальных решений статических уравнений теории упругости. В. Д. Купрадзе

2673. Обобщенные функции и принцип Дирихле. Темпл (Generalized functions and Dirichlet's principle. Temple G.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A235**, № 1203, 444—453 (англ.)

Дается простое доказательство принципа Дирихле для любой ограниченной области Ω (без каких-либо предположений об ее границе Ω^*). Доказательство проводится методами теории обобщенных функций в форме, введенной автором.

Пусть $R(x)$ — евклидово пространство, $\varphi(x)$ — пробные функции в $R(x)$ (т. е. бесконечно дифференцируемые финитные функции). Обобщенной функцией g автор называет последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{g_m\}$ таких, что для любой φ

$$(g_m, \varphi) \to \Gamma(\varphi) \quad (m \to \infty),$$

где $\Gamma(\varphi)$ — непрерывный в смысле Шварца функционал над $\{\varphi\}$. Легко видеть, что любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема и что любая сходящаяся последовательность обобщенных функций дифференцируема почленно.

Основную роль в доказательстве играет слабая форма теоремы Грина: Если $\operatorname{div} \mathbf{A}$ существует и интегрируема в Ω и если $\mathbf{A} = 0$ на границе Ω^*, то

$$\int \operatorname{div} \mathbf{A}\, d\Omega = 0.$$

(Заметим, что сильная форма теоремы Грина $\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega^*} A_n d\Omega^*$ применима лишь при дополнительных требованиях гладкости границы Ω^* области Ω).

Вводятся обозначения

$$D[f, g] = \int (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\, d\Omega$$
$$D[f] = D[f, f].$$

Обобщенным решением задачи Дирихле в области Ω с граничным условием f, продолжимым на $\Omega^* + \Omega$ с конечным $D[f]$, называется функция u, удовлетворяющая уравнению

$$D[u, h] = D[f, h]$$

для всех функций h, гармонических в $\Omega + \Omega^*$.

Так как интеграл $D[u] \geqslant 0$, то он имеет точную нижнюю грань L и поэтому существует последовательность u_n такая, что $u_n - f = 0$ на Ω^* и

$$L \leqslant D[u_n] \leqslant L + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$.

Основная теорема состоит в следующем:

Теорема 2. Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ задает обобщенную функцию u в Ω в том смысле, что для любой пробной функции φ с компактным в Ω носителем, последовательность $\{(u_n, \varphi)\} \to U(\varphi)$, где $U(\varphi)$ — непрерывный функционал над $\{\varphi\}$.

Далее обычным образом доказывается, что обобщенная функция u: 1) есть обобщенная гармоническая функция, 2) обычная числовая функция, 3) и при этом бесконечно дифференцируема.

Доказательства имеют элементарный характер.

А. Л. Крылов

2674. Замечание об одном новом свойстве гармонических функций. Дельсарт (Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques. Delsarte Jean), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 9, 1358—1360 (франц.)

Пусть функция f определена и непрерывна в R^n ($n \geqslant 2$); $F(x, r)$ — среднее от f по поверхности сферы с центром в x, радиуса r; a и b — фиксированные различные положительные вещественные числа. Тогда, если для всех $x \in R^n$ $F(x, a) = F(x, b) = f(x)$, то f гармонична в R^n. Имеются исключения для конечного числа значений отношения a/b. Эти исключительные значения последнего отношения не зависят от f. А. А. Дезин

2675. Задача Дирихле. Маржик (Dirichletova úloha. Mařík Jan), Čas. pěst. mat., 1957, 82, № 3, 257—282 (чешск.; резюме русск., англ.)

В данной методической статье изложено решение Перрона задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Помимо элементарных доказательств некоторых, в сущности известных, признаков регулярности граничных точек, дается доказательство теоремы существования для краевых условий, абсолютная величина которых имеет субгармоническую мажоранту. При этом ничего не предполагается об ограниченности границы основной области. Приводятся также некоторые признаки однозначности для класса ограниченных функций, и исследуется непрерывная зависимость решения от граничной функции. Далее доказывается еще непрерывная зависимость от области в том случае, когда основная область аппроксимируется изнутри областями специального вида. R. Vyborný

2676. О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Кудрявцев Л. Д., Докл. АН АССР, 1956, **108**, № 1, 16—19

Рассматривается уравнение

$$L_\sigma[u] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = 0,$$

являющееся уравнением Эйлера для функционала

$$K_\sigma[u] = \int_G \cdots \int \sigma \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n,$$

для областей $x_n > 0$, $0 < x_n < a$ и для конечной области. $\sigma(P)$ вырождается на границе (имеет порядок $r^\alpha(P)$, где $r(P)$ — расстояние до границы; $\alpha \geqslant 0$).

Приводятся теоремы о существовании и единственности решения. При дополнительных предположениях, касающихся границы области, устанавливается существование „допустимой" функции (для граничной функции из определенного класса), что обеспечивает применимость вариационного метода. О. В. Бесов

2677. Функция Грина метагармонического оператора задач Дирихле и Нёймана для внешности круга или

сферы (Сообщение второе). Этьенн (Fonction de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet ou de Neumann à l'extérieur d'un cercle ou d'une sphere. (Seconde communication). Etienne J.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, **27**, № 7-8, 189—200 (франц.)

В этом сообщении рассматривается случай трехмерного пространства. Пусть B — шар радиуса „a" с центром в начале O координат, P и P_0 — две точки вне шара, r и r_0 — их расстояния до центра, θ — угол POP_0,

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}.$$

Разыскивается функция Грина для оператора $-\Delta + k^2$ для задач Дирихле или Неймана. Сначала для элементарного решения e^{-kR}/R находится несколько представлений в виде несобственных интегралов или рядов, содержащих функции Бесселя и Лежандра, в том числе и с мнимыми значками. Затем аналогичные представления находятся для указанных функций Грина. Х. Л. Смолицкий

Примечание редакции. Результат не является новым. Он может быть получен, как частный случай, из результата И. Н. Векуа (Тр. Тбилисск. матем. ин-та, АН ГрузССР, 1943, **12**, 105—166).

2678. Полнота системы собственных и присоединенных функций эллиптических дифференциальных операторов. Наймарк Б. М. Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 226

См. РЖМат. 1958, 345.

2679. Нижние границы для частот колебаний упруго опертых мембран и пластин. Пейн, Уэйнбергер (Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates. Payne L. E., Weinberger H. F.), J. Soc. Iudustr. and Appl. Math., 1957, **5**, № 4, 171—182 (англ.)

Рассматривается задача о собственных значениях для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ при краевом условии $\frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0$, которое выполняется на границе B двумерной конечной области R; n — внешняя нормаль к B, k — постоянная. Расположенные в порядке возрастания собственные значения обозначены через $\lambda_i(k)$, $i = 1,2\ldots$ В предположении, что прямые, параллельные осям координат, пересекают R по конечному числу отрезков, устанавливается оценка $\lambda_1(k) \geqslant \mu_1(k_1, L_x) + \mu_2(k_2, L_x)$; через $\mu_i(k, L)$ обозначены расположенные в порядке возрастания собственные числа одномерной краевой задачи $v''(x) + \mu v(x) = 0$, $-v'(0) + kv(0) = v'(L) + kv(L) = 0$, через L_x и L_y — наибольшие длины интервалов, по которым R пересекается с прямыми, параллельными соответственно осям x и y, наконец, k_1 и k_2 — постоянные, удовлетворяющие неравенству $k_1\left|\frac{\partial x}{\partial n}\right| + k_2\left|\frac{\partial y}{\partial n}\right| \leqslant k$. Если вдоль B нормаль меняется непрерывно, то последнее неравенство равносильно такому: $k_1^2 + k_2^2 \leqslant k^2$; для прямоугольника можно положить $k_1 = k_2 = k$. Случай $k = \infty$ (край мембраны неподвижен) не исключен; в этом случае можно положить $k_1 = k_2 = \infty$.

Значение $\lambda_1(k)$ можно оценить также через наименьшее собственное число $\nu_1(\rho, k)$ радиальных колебаний круглой мембраны радиуса ρ при том же условии закрепления $\frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0$. Это дает оценку $\lambda_1(k) \geqslant \nu_1(\rho^*, k)$, где ρ^* — радиус круга, покрывающего область R.

Дается оценка числа $\lambda_2(k)$ при следующих дополнительных предположениях: 1) R симметрично относительно каждой из осей x, y; 2) пересечение R с любой прямой, параллельной какой-либо из координатных осей, односвязно.

Упомянутая оценка имеет вид

$$\lambda_2(k) \geqslant \mathrm{Min}[\mu_2(k_1, L_x) + \mu_1(k_2, L_y), \mu_1(k_1, L_x) + \mu_2(k_2, L_y), \lambda_1(\infty)].$$

Здесь по-прежнему $k_1\left|\frac{\partial x}{\partial n}\right| + k_2\left|\frac{\partial y}{\partial n}\right| \leqslant k$. При $k = 0$ получаем $\lambda_2(0) \geqslant \mu_2(0, L) = \pi^2/L^2$; $L = \mathrm{Max}(L_x, L_y)$.

Перечисленные результаты естественным образом распространяются на большее число измерений. Строится также нижняя граница для первого собственного числа задачи о колебании упругой пластинки, заполняющей ту же область R, с упруго закрепленным краем (σ — постоянная Пуассона, M — изгибающий момент, приложенный к краю пластинки)

$$\Delta\Delta v = \omega v; \quad v = 0, \quad M(v) - k\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } B, \quad k \geqslant 0.$$

Именно,

$$\omega_1(k) \geqslant (1-\sigma)\{\lambda_1(\infty)\,\mathrm{Min}[\mu_1(k_1, L_x), \mu_1(k_2, L_y)] + \varkappa(k_3, L_x) + \varkappa(k_4, L_y)\} + \sigma\lambda_1^2(\infty),$$

где постоянные k_j подчинены неравенству

$$k_1\left|\frac{\partial x}{\partial n}\right|\left|\frac{\partial y}{\partial n}\right|^2 + k_2\left|\frac{\partial y}{\partial n}\right|\left|\frac{\partial x}{\partial n}\right|^2 + k_3\left|\frac{\partial x}{\partial n}\right|^3 + k_4\left|\frac{\partial y}{\partial n}\right|^3 \leqslant \frac{k}{1-\sigma}$$

а $\varkappa(k, L)$ есть наименьшее собственное число одномерной задачи

$$u^{(4)}(x) - \varkappa u(x) = 0; \quad u(0) = u(L) = 0,$$
$$-u''(0) + ku'(0) = u''(L) + ku'(L) = 0.$$

Устанавливаются некоторые неравенства, связывающие i-е собственные числа упомянутых выше задач о колебаниях мембраны и пластинки. С. Г. Михлин

2680. Ядра дробного порядка. Ильин В. А., Матем. сб., 1957, **41**, № 4, 459—480

Рассматривается разложение функций, обладающих особенностями типа $r^\varepsilon(\varepsilon > -N)$ или $r^{2m}\lg r$ ($m = 0,1,\ldots$), в ряд Фурье по собственным функциям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в произвольной области g любого числа измерений N с однородным условием $u|_\Gamma = 0$, или $\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_\Gamma = 0$, или $\left.\frac{\partial u}{\partial\nu} + hu\right|_\Gamma = 0$.

Автору удается уловить специфику в образовании коэффициента Фурье для функции, обладающей в одной точке указанной выше особенностью и удовлетворяющей всюду, кроме этой точки, тем или иным требованиям гладкости. Выясняется поведение ядер дробного порядка, т. е. функций $K_\alpha(P, Q)$, имеющих рядом Фурье ряд

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^\alpha},$$

где α — любое действительное число. Автор называет свои работы, где такие ядра находят применение. В § 1 работы автор находит коэффициенты Фурье для функций с особенностями указанного выше вида. При подробном исследовании оказывается, что коэффициент Фурье распадается на две части, первая из которых характеризует особенность и не изменяется при увеличении гладкости в окрестности особой точки, а вторая зависит от гладкости (убывает с возрастанием ее). § 2 посвящен ядрам дробного порядка. Исследование, различное для случаев $\alpha \neq N/2 + m$ ($m = 0,1,2,\ldots$) и $\alpha = N/2 + m$, приводит к следующим результатам: общий вид ядра в обоих слу-

чаях дается суммой двух функций, первые из которых суть соответственно $\frac{r^{2\alpha-N}}{A_\alpha^{[N]}}$ и $\frac{r^{2m}\lg r}{B_m^{[N]}}$, где $A_\alpha^{[N]}$ и $B_m^{[N]}$ — вычисленные постоянные, а вторая является функцией, имеющей внутри области непрерывные производные всех порядков и непрерывная по созокупности переменных, если одна из точек (аргументов) находится в строго внутренней замкнутой подобласти. А. Л. Крылов

2681. **Об исследовании смешанной задачи в классе обобщенных функций. Джавадов М. Г.**, Мə'рузəляр. АзəрбССР Элмляр Акад., Докл. АН АзербССР, 1958, 14, № 3, 195—199 (рез. азерб.)

Пусть Ω — область n-мерного пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, S — ее граница, Q — цилиндр $[0 \leqslant x_0 \leqslant l] \times \Omega$ в $(n+1)$-мерном пространстве R_{n+1} $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $F = [0 \leqslant x_0 \leqslant l] \times S$,

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{du}{dx_i} + au. \qquad (1)$$

Задача

$$Lu = f,$$

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{du}{dx_0}\Big|_{x_0=0} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad u\Big|_F = \varphi_2(x_0, S)$$

ставится в обобщенных функциях так: пусть G — совокупность всех финитных функций $v \in W_p^{(m)}$ ($W_p^{(m)}$ — пространство С. Л. Соболева), обращающихся в нуль на F и таких, что при $x_0 = l$ $v = \frac{\partial v}{\partial x_0} = 0$; требуется найти обобщенную функцию u, обращающуюся в нуль вне Q и такую, что для всякой функции $v \in G$ имеет место равенство

$$(Lu, v) = (\rho, v), \qquad (2)$$

где ρ — некоторая обобщенная функция, выражающаяся через a_{ij}, a_i, a, f, φ_0, φ_1, φ_2.

Пусть G^* — совокупность всех достаточно гладких функций, удовлетворяющих нулевым начальным ($x_0 = 0$) и граничным (F) условиям; L^* — сопряженный к L в смысле Лагранжа оператор. Доказываются теоремы.

1. Если для любой достаточно гладкой $\psi \in W_{p_1}^{(k)}$ в G^* существует единственное решение уравнения $L^* v = \psi$, причем

$$\| v \|_{W_p^{(m)}} \leqslant M \| \psi \|_{W_{p_1}^{(k)}},$$

то при $\rho \in Z_{m,p}(\overline{Q})$ задача (2) имеет в $Z_{k,p_1}(\overline{Q})$ единственное решение. ($Z_{m,p}(\overline{Q})$ — пространство всех обобщенных функций ρ, обращающихся в нуль вне цилиндра $\overline{Q}$ и таких, что (ρ, v) непрерывен относительно $v \in W_p^{(m)}(R_{n+1})$.

2. Если $\rho \in Z_{3,2}(\overline{Q})$, a_{ij} четырежды, a_i трижды, a и f дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{Q}$, граница S четырежды непрерывно дифференцируема, $\frac{\partial^\nu f}{\partial x_0^\nu}\Big|_{x_0=0} = 0$, $\nu = 0, 1, 2$, $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение в $W_2^{(3)}(Q)$.

Замечание. По-видимому, подразумевается отрицательность формы $\Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j$, хотя в статье об этом не упоминается. Х. Л. Смолицкий

2682. **Заметка в связи с двумя сообщениями. С. Шмидт. Белецкий, Кисынский** (Une remarque à propos de deux notes de Z. Szmydt. Bielecki A., Kisyński J.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 1, 15—17 (франц.; рез. русск.)

Пусть декартово произведение $E_1 \times E_2$ двух полных метрических пространств отображено в себя

$$(\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2) = (\Phi_1(\xi_1, \xi_2), \Phi_2(\xi_1, \xi_2)),$$

причем

$$\rho_i(\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i) \leqslant a_{i1}\rho_1(\xi_1, \eta_1) + a_{i2}\rho_2(\xi_2, \eta_2) \quad (i = 1, 2)$$

для каждых двух пар $(\xi_j, \eta_j) \in E_1 \times E_2$ $(j = 1, 2)$, где

$$0 < a_{11} < 1, \quad 0 < a_{22} < 1, \quad a_{12}a_{21} < (1 - a_{11})(1 - a_{22}).$$

Тогда это отображение имеет ровно одну неподвижную точку. Эта лемма, легко вытекающая из принципа сжатых отображений, обобщает одну лемму С. Шмидт (РЖМат, 1958, 4732) и может быть применена для упрощения доказательства и небольшого уточнения некоторых результатов, полученных ею в трех работах по гиперболическим уравнениям с частными производными. А. Д. Мышкис

2683. **Фундаментальное решение дифференциального уравнения с частными производными ультрагиперболического типа Клейна—Гордона. Судзуки** (Elementary solution of the partial differential equation of ultra-hyperbolic K—G type. Suzuki Yasutaka), J. Coll. Arts and Sci. Chiba Univ. Natur. Sci. Ser., 1957, 2, № 2, 105—106 (англ.)

Для ультрагиперболического дифференциального уравнения типа Клейна—Гордона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial y_q^2} + k^2\right)\varphi = f,$$

где k — положительная постоянная, методом преобразования Фурье построено фундаментальное решение. При четных $p + q = 2m$ это решение имеет вид

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{2^2 i^{p-1}}\left(\frac{k^2}{\pi}\right)^{m-1}\left\{\sum_{\rho=0}^{m-2}\frac{(-)^\rho}{2^{2\rho}\rho!}\delta^{(m-\rho-2)}(k^2 s^2) + (-)^{m-1}\frac{H^+_{m-1}(ks)}{(2ks)^{m-1}}\right\},$$

где $s^2 = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{r=1}^{q} y_r^2$, H^+_{m-1} — функция Ханкеля.

В. Э. Аболиня

2684. **О решении телеграфных уравнений. Ким Сон Рён.** Ким Ир Сон Чонхан техак Хакпо, 1957, № 2, 12—40 (кор.)

2685. **Теорема взаимности для переходных процессов. Шантавый** (Věta o reciprocitě pro přechodné jevy. Santavý Ivan), Aplikace mat., 1957, 2, № 5, 390—397 (чешск.; рез. русск., нем.)

Решение

$$U_A(P; t) = U_A(x, y, z; t) = F\left(t - \frac{r_A}{a}\right)/r_A + U_{0A}(x, y, z; t)$$

уравнения Даламбера

$$\frac{\partial^2 U_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_A}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U_A}{\partial t^2} = 0,$$

обращающееся в нуль на границе области, обладает свойством взаимности: $U_A(B, t) = U_B(A, t)$. Здесь

$$r_A = r_{AP} = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2},$$

функция $F(t)$ вместе с ее первыми двумя производными обращается в нуль для $t \leqslant 0$ и

$$U_A = \frac{\partial U_A}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_A}{\partial t^2} = 0$$

для $t \leqslant 0$. При доказательстве используется преобразование Лапласа. В. И. Левин

2686. Об обобщенных функционально-инвариантных решениях гиперболического уравнения. Галонен Л. М., Тр. Ростовск.-н/Д. инж.-строит. ин-та, 1956, вып. 5, 215—222

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \qquad (1)$$

ищутся обобщенные функционально-инвариантные решения в виде

$$z = u\varphi(v),$$

где u и v — некоторые функции от x и y, а φ — произвольная функция. Для определения функций u и v получается система. Из условия разрешимости этой системы получаются условия на коэффициенты уравнения (1), при которых существуют обобщенные функционально-инвариантные решения. Здесь повторяются прежние результаты Н. П. Еругина (Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, 1948, вып. 16).

Далее автор делает попытку распространить свои рассуждения для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + du = 0, \qquad (2)$$

где a, b, c, d — функции от x, y, z.

Для уравнения (2) не удалось получить аналогичных условий на коэффициенты уравнения, при которых существуют функционально-инвариантные решения уравнения (2) и, следовательно, поставленная задача оказалась нерешенной.

В конце статьи рассматривается задача Коши для уравнения (1), которая сведена к последовательному решению задачи с начальными данными для двух уравнений первого порядка. Без доказательства утверждается, что таким же способом можно рассматривать задачу Коши для уравнения вида

$$X[Y(u)] + aX(u) + bY(u) + Cu = 0,$$

где

$$X[u] = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\frac{\partial u}{\partial z}, \quad Y[u] = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma\frac{\partial u}{\partial y} + \delta\frac{\partial u}{\partial z}.$$

В статье много опечаток. М. М. Смирнов

2687. Преобразования Фурье инвариантных распределений, связанных с решением волнового уравнения. Мете (Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes. Methée P. D.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 71, Paris, 1956, 145—163. Discuss., 163 (франц.)

В диссертации автора (РЖМат, 1956, 5360) найдены все распределения (линейные непрерывные функционалы над пространством K финитных бесконечно дифференцируемых функций) T, инвариантные относительно собственных преобразований Лоренца и удовлетворяющие уравнению

$$(\Box + k)T = 0, \qquad (1)$$

где $\Box$ — волновой оператор. В реферируемой работе рассматриваются те из T, которые являются линейными непрерывными функционалами над пространством S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности. В зависимости от того, будет ли k невещественным, <0, >0 или $=0$, имеется соответственно 0, 1, 2 или 3 линейно независимых инвариантных решения над S; „базисные" решения выписаны. Преобразование Фурье FU функционала U над S определено в „Теории распределений" Л. Шварца (в статье И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (РЖМат, 1955, 3291) оно определено для всех распределений). Основное содержание реферируемой работы состоит в том, что вычислены преобразования Фурье „базисных" решений. Для этого найден общий вид инвариантного решения над S уравнения, в которое (1) переходит при F, что позволяет записать искомые FT в виде линейных комбинаций известных распределений. Коэффициенты подсчитываются при помощи равенства Парсеваля и соображений однородности, симметрии или антисимметрии (инвариантное распределение T называется (анти)симметричным, если $\lambda T = T$ (соответственно $= T$) для всех несобственных преобразований Лоренца λ). Аналогично вычислены преобразования Фурье некоторых других инвариантных распределений. Основные результаты работы анонсированы раньше (РЖМат, 1956, 6710, 6711). В конце работы приведено (на 1/2 стр.) ее обсуждение, в котором приняли участие Дельсарт, Шварц, Йон и др. М. С. Агранович

2688. О функционально-инвариантных решениях волнового уравнения в n-мерной области. Галонен Л. М., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 1, 53—72

Рассматривается задача нахождения функционально-инвариантных решений волнового уравнения

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Эта задача сводится к интегрированию системы уравнений

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2. \qquad (2)$$

Для интегрирования системы (2) применяется несколько видоизмененный метод Н. П. Еругина (Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем., 1948, вып. 15, 101—134).

Полный интеграл второго уравнения из (2) имеет вид

$$u = \sum_1^n a_l x_l + \sqrt{\sum_1^n a_l^2}\, t + a_{n+1}, \qquad (3)$$

где $a_l = \text{const}$.

Чтобы получить из полного интеграла все решения уравнения, нужно подчинить произвольные параметры a_l $1, 2, \ldots, n$ зависимостям. Характер зависимости между a_l определяется из того условия, что найденное таким образом решение еще должно удовлетворять волновому уравнению (1). Рассматривая случаи одной, n и $n-k+1$ ($k = 2, 3, \ldots, n-1$) зависимостей между параметрами a_l полного интеграла (3), автор получает различные классы функционально-инвариантных решений волнового уравнения (1). М. М. Смирнов

2689. Волновое уравнение с инвариантной правой частью. Мете (L'équation des ondes avec second membre invariant. Methée Pierre-Denis), Comment. math. helv., 1957, **32**, № 2, 153—164 (франц.)

Пусть Z — обобщенная функция, инвариантная относительно группы вращений Лоренца. Рассматривается вопрос об отыскании всех обобщенных функций T, инвариантных относительно той же группы и удовлетворяющих уравнению

$$(P(\square + \varkappa))T = Z, \quad (1)$$

где P — полином с постоянными коэффициентами. Задача сводится к изучению решений уравнения $(D_n + \varkappa)U = V$; $D_n \equiv 4u\frac{d^2}{du^2} + 2n\frac{d}{du}$ на прямой (в обобщенных функциях). Доказывается, что инвариантное решение уравнения (1) всегда существует, и выясняется его структура. Приводится обобщение на ультрагиперболический случай.

А. А. Дезин

2690. Об итерированном волновом уравнении. Ia, Ib. Кран (On the iterated wave equation. Ia, Ib. Krahn Dorothee), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 492—497; 498—505; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 492—497, 498—505 (англ.)

Пусть $L_k \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x^2_m} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}$, k—постоянное, u^p — решение уравнения $L_p u = 0$ и $L_0{}^n$ — n-я итерация оператора L_0. Опираясь на представление решения уравнения

$$L_0^n w = 0 \ldots \quad (1)$$

в виде $\sum_{l=-(n-1)}^{n} t^{n-1+l}\, u^{2l}$ (эквивалентное известной формуле Альманси, ср. также РЖМат, 1958, 6727), автор находит решение задачи Коши

$$w\Big|_{t=0} = f_0,\ \frac{\partial^k w}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = f_k \quad (k = 1, \ldots, 2n-1) \ldots \quad (2)$$

для уравнения (1), в предположении надлежащей гладкости функций f_k. Подробно выписываются соответствующие решения для случаев $n = 3$, $m = 1$ и $n = 2$, $m = 3$. Рассматривается также задача Коши (2) для уравнения

$$\left(a_1\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\ldots\left(a_n\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)w = 0 \ldots \quad (3)$$

($a_1, \ldots, a_n$ — постоянные). Другим методом задача (3), (2) при $n = 2$ была решена Кормесом (Kormes J. P., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 942).

М. Н. Олевский

2691. Решение характеристической задачи Коши для волнового уравнения, полиномы Чебышева и функции Лежандра 2-го рода. Зушовк (Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung, Tschebyscheffsche Polynome und Legendresche Funktionen 2. Art. Suschowk Dietrich), Math. Z., 1958, **68**, № 4, 340—361 (нем.)

Вопросы аэродинамики больших скоростей приводят к задаче об отыскании решения $v(t, x, y)$ уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + v_{yy}, \ldots \quad (1)$$

обращающегося в нуль на характеристическом полуконусе (K): $t^2 = x^2 + y^2$, $t \geqslant 0$, вместе с производными v_t, v_x, v_y и неравного тождественно нулю внутри этого полуконуса: $t > r$, $t > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Известно, однако, что заданием решения уравнения (1) на полуконусе (K) оно однозначно определяется всюду внутри (K); поэтому построенные автором „решения" имеют особенности внутри (K). Вводя полярные координаты r, ω, автор ищет $v(t, x, y)$ в форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(t, r)(a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega), \quad (2)$$

где $v^{(k)}(t, r)$ — решение уравнения $v^{(k)}_{tt} - v^{(k)}_{rr} - \frac{1}{r}v^{(k)}_r + \frac{k^2}{r^2}v^{(k)} = 0$, удовлетворяющее условиям $v^{(k)}\big|_{t=r} = v^{(k)}_t\big|_{t=r} = v^{(k)}_r\big|_{t=r} = 0$, $t > 0$, $r > 0$; a_k и b_k — постоянные. Доказывается, что в качестве функций $v^{(k)}$ можно принять

$$v^{(k)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} f_k(t - r\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant r, \ r > 0, \quad (3)$$

где $f_k(\sigma)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция, $f_k(0) = 0$, ($f_k''(\sigma)$ предполагается интегрируемой по Риману в любом конечном интервале), $T_k(\tau)$ — полином Чебышева степени k. Устанавливается, что любое конечное число функций $v^{(k)}(t, r)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ — линейно независимы при $t \geqslant r$, $r > 0$ (в том числе и порождаемые одной и той же функцией $f_k(\sigma) \equiv f(\sigma)$). В предположении, что $f_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\lambda^n$, $0 \leqslant \lambda < \lambda$, из (3) получается представление для $v^{(k)}(t, r)$ в виде сходящегося ряда по функциям Лежандра 2-го рода

$$v^{(k)}(t, r) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} a_{kn}(t^2 - r^2)^{n/2} Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right),$$

$$0 \leqslant t - r < \Lambda, \ r > 0.$$

Устанавливается характер особенности функции $v^{(k)}(t, r)$ на линии $r = 0$: для фиксированного значения $t = t' > 0$ $v^{(k)}(t, r) = 0(r^{-k})$, $k > 0$, если $\int_0^t (t' - \sigma)^{k-1} f_k(\sigma)\, d\sigma \neq 0$; $v^{(0)}(t', r) = 0(\ln r)$, если $f_0(t') \neq 0$. Изучаются дополнительные ограничения на функции f_k, обеспечивающие сходимость рядов (2).

М. Н. Олевский

2692. О задаче Гурса для гиперболических уравнений. Кордуняну (Asupra problemei lui Goursat pentru ecuatiile hiperbolice. Corduneanu C.), An. stiint. Univ. Iasi, 1956, Sec. 1, **2**, № 1-2, 53—59 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается уравнение

$$U_{xy} + AU_x + BU_y + CU = D \quad (1)$$

с условиями $U(x, 0) = F(x)$, $U(\varphi(y), y) = G(y)$, $[F(0) = G(0)]$ в области $R = [0 \leqslant x \leqslant \alpha, \ 0 \leqslant y \leqslant \beta]$.

Пусть функции A, A_x, B, B_y, C, D, F, F', G, G' непрерывны в R и φ, φ' тоже непрерывны и удовлетворяют для $0 \leqslant y \leqslant \beta$ условиям: $\varphi'(y) \geqslant m > 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\beta) = \alpha$. Тогда решение уравнения

$$u_{xy} + au_x + cu = d, \quad (2)$$

получающегося из (1) с помощью преобразования

$$U = ue^{\lambda}, \quad \lambda = -\int_0^x B(\xi, y)\, d\xi,$$

может быть аппроксимировано для $y = p/n$ ($p \leqslant n$ — натуральные числа) решениями системы

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{n,\,k+1} - u_{n,\,k}}{h_n}\right) + a_{n,\,k}\frac{du_{n,\,k}}{dx} + c_{n,\,k}u_{n,\,k} = d_{n,\,k}$$

при условиях

$$u_{n,\,0}(x) = f(x), \ u_{n,\,k}(x_{n,\,k}) = g(y_{n,\,k}), \quad 1 < k < n.$$

Из этого приближения вытекает для рассматриваемой задачи оценка

$$\| U(x,y) \| \leqslant Q\left(N\frac{e^{\beta M}-1}{M}+3P\right);$$

с помощью этой оценки доказывается, что малым изменениям A, A_x, B, B_y, C, D, F, G соответствуют малые изменения решений. Наконец, с помощью одного примера показывается, что малые изменения A, B, C, D, F, G недостаточны для того, чтобы обеспечить малые изменения решения. Резюме автора

2693. Применение метода Фурье к решению смешанной задачи для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda f(t,x,u)$. **Чандиров** (Фурье усулунун бир гейрихэтти гарышыг мэсэлэнин hэллинэ тэтбиги. Чэндиров h. И.), Элми эсэрлэр. Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1958, № 1, 17—29 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda f(t,x,u),$$

$$u(t,x)|_{x=0}=0,\ u(t,x)|_{x=\pi}=0,$$

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=\psi(x),$$

в области $D\{0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant\pi\}$.

Методом Фурье доказывается существование решения поставленной задачи при следующих условиях: а) f имеет частные производные до второго порядка по x и u, причем они непрерывны по u и t для почти всех $x\in[0,\pi]$ и измеримы по x при фиксированном (t,u) и удовлетворяют условиям вида

$$|f'_x(t,x,u)|\leqslant a(t,x)+b(t,x)e^{\alpha|u|^\beta},$$
$$f(t,x,0)\equiv 0,\quad (t,x)\in D;$$

б) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разлагаются в ряд Фурье на отрезке $[0,\pi]$ и коэффициенты Фурье удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|<\infty,\quad \text{где}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\sin kx\,dx,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\psi(x)\sin kx\,dx.$$

Н. И. Мозжерова

2694. О решении нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Карубэ (Karube Takashi), Гифу дайгаку когакубу кэнкю хококу, Res. Repts Fac. Engng Gifu Prefect. Univ., 1956, № 6, 110—114 (японск.; рез. англ.)

Дан метод решения уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{a(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y}\right\}^2$$

для любой заданной $a(x,y)$; в случае, если $a(x,y)$ зависит только от y или имеет вид $p(x)q(y)$, даны явные формулы. Резюме автора

2695. Принципы максимума и дуальность. Редхеффер (Maximum principles and duality. Redheffer Raymond M.), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 1, 56—75 (англ.)

Рассматриваются различные формулировки принципа максимума, включающие пару функций, между которыми существует взаимность определенного характера. Приведем одну из наиболее характерных теорем. Оператор $L(u)=\sum a_{ij}u_{ij}\ \left(u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ тотально параболичен (т. п.), если матрица $a_{ij}\geqslant 0$. Если a_{ij} зависят от u, то считается, что соответствующая подстановка произведена, т. е. $L(u)$ может быть т. п., тогда как $L(v)$ — нет. Если u, v определены в области R и существует такая последозательность компактов, что $R_n\subset R_{n+1}\subset R$; $R_n\to R$ и такая последовательность $\varepsilon_n\to 0$, что $v\geqslant -n\varepsilon_n$; $u\leqslant n^{-1}|v|+n^{-1}$ на границе R, то будем говорить $u\leqslant 0\,(v)$ на границе R. Теорема: Пусть $\inf v>0$ в R; $L(u)=\sum a_{ij}(x,u_i/u)u_{ij}$ $(u\neq 0)$, причем $L(u)$ или $L(v)$ т. п. Пусть $vL(u)-uL(v)=a(x,u,u_i,v,v_i)$, причем $a(x,cv,cv_i,v,v_i)>0$ при всех $c>0$. Тогда $u\leqslant 0\,(v)$ на границе R влечет $u\leqslant 0$ в R.

Если теперь $L(u)/u\geqslant a_1(x,u_i/u)$; $L(v)/v\leqslant a_2(x,v_i/v)$, то условия (1) $|u|\leqslant 0\,(|v|)$; (2) $\inf|v|>0$; (3) $a_1(x,v_i/v)>a_2(x,v_i/v)$ дают $u=0$. Если v ограничена — имеем обычный принцип максимума; если v неограничена — получаем теорему типа Фрагмена-Линделёфа для u. Если для u подобная теорема неверна, а условия (2) и (3) выполнены, то нарушено условие (1) и получается характеристика роста минимума модуля v. Аналогично могут быть получены некоторые теоремы типа Штурма и результаты, относящиеся к собственным значениям. Используемые методы элементарны. А. А. Дезин

2696. Граничная задача для параболического уравнения, коэффициенты которого зависят от неизвестной функции. Погожельский (Problème aux limites pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue. Pogorzelski W.), Ricerche mat., 1956, **5**, № 2, 258—272 (франц.)

Рассматривается параболическое уравнение вида

$$\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}(x,t,u)\frac{\partial^2 u}{dx_\alpha dx_\beta}+\sum_\alpha b_\alpha(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+c(x,t)u-$$
$$-\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda F(x,t,u)$$

в замкнутой области $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega+S$; $0\leqslant t\leqslant T$; $|u|\leqslant R$ (λ — параметр). Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, b_α, c и правая часть F предполагаются ограниченными и удовлетворяющими условиям Гёльдера по x и u, а $a_{\alpha\beta}$ — и по t, с соответствующими показателями. Поверхность S удовлетворяет условиям Ляпунова. Отыскивается решение, удовлетворяющее условиям $\frac{\partial u}{\partial\bar{T}_p}=\nu G(P,t,u(P,t))$; $P\in S$; на $S\times[0\leqslant t\leqslant T]$ $\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{T}_p}-\right.$ — предельное значение трансверсальной производной) и $\lim_{t\to 0}u(t,x)=0$ во всех внутренних точках $x\in\Omega$. Решение ищется в виде суммы потенциалов: ньютоновского и простого слоя. Существование решения соответствующего интегрального уравнения доказывается путем использования теоремы Шаудера о неподвижной точке, которая применима при выполнении ряда условий на константы Гёльдера и параметры λ и ν. А. А. Дезин

2697. О некоторых квазилинейных смешанных задачах. Лион (Sur certains problèmes mixtes quasi linéaires. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 11, 1644—1647 (франц.)

Рассматриваются смешанные задачи для квазилинейного параболического уравнения с эллиптической частью произ-

вольного порядка. Слабое решение задачи отыскивается как реализация в соответствующем пространстве функционала, связанного с основным оператором. Устанавливается единственность решения. А. А. Дезин

2698. Уравнения в частных производных смешанного типа. Чинкуини-Чибрарио (Equazioni a derivate parziali di tipo misto. Cinquini Cibrario Maria), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), 25, 18—40 (итал.; рез. англ.)

Статья носит обзорный характер. Автор, напоминая об иссл дованиях Трикоми, останавливается на ряде своих работ (опубликованных в течение 1932—1942 гг.), касающихся классификации уравнений смешанного типа и вопросов существования и единственности решений некоторых задач для них. Весьма кратко сообщается о задачах для уравнений смешанного типа, рассмотренных в недавних работах Франкля, Жермена и Бадера, Келдыша, Бицадзе, Проттэра, Березина, Конти и др. Библ. 99 назв. М. Н. Олевский

2699. О существовании и единственности решения одной задачи Ф. И. Франкля. Девингталь Ю., Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1958, № 2, 39—51

Для системы

$$k(y)\,u_x = v_y; \quad u_y = v_x \tag{1}$$

($k(y)$ непрерывна с первой производной на $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $k(y)>0$ при $y>0$, $k(-y)=k(y)$) в области D, ограниченной: отрезком $A'A$ оси $x=0$; гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y>0$ с концами в точках $A(0, 1)$ и $B(a, 0)$; характеристикой $A'C$ системы (1), $A'(0, -1)$, $C(a_1, 0)$, где $a_1 \leqslant a$, и отрезком CB оси $y=0$, $a_1 \leqslant x \leqslant a$,— рассматривается краевая задача Ф. И. Франкля, состоящая в определении непрерывного в $\bar{D}$ решения системы (1), удовлетворяющего краевым условиям:

$$u|_\Gamma = \psi_1(s); \quad u|_{CB} = \psi_2(x), \tag{2}$$

$$v(0, y) = 0; \quad -1 < y < 1, \tag{3}$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y); \quad -1 < y < 1, \tag{4}$$

где ψ_1, ψ_2 и f — заданные функции, s — длина дуги Γ, отсчитываемая от B.

Единственность решения задачи устанавливается при условиях: $dy/ds|_\Gamma \geqslant 0$ в окрестности точки A; $0 < \theta \leqslant 2\pi$ вдоль Γ, где θ — угол между положительными направлениями оси $X=0$ и касательной к Γ, методом, аналогичным методу Моравец (РЖМат, 1958, 8875, см. также РЖМат, 1958, 1227).

Существование решения задачи Ф. И. Франкля доказывается для случая: $k(y) = \operatorname{sgn} y\,|\,y\,|^m$, $m>0$ и для уравнения

$$k(y)\,u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5}$$

эквивалентного системе (1) (при этом краевое условие (3) заменяется условием: $u_x|_{x=0} = 0$, $-1 < y < 1$), в классе решений уравнения (5), непрерывных со своими первыми производными в $\bar{D}$, кроме, может быть, точек $O(0, 0)$; A; A'; C; B, где u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы. Зеркальным отражением в оси $x=0$ область D продолжается в полуплоскость $x<0$, краевые условия (2) продолжаются в полуплоскость $x<0$ четным образом. Пусть D_{1+} (D_{1-}) — часть области $D_1 = DUD^*/D^*$ отражение D, лежащая в полуплоскости $y>0$ ($y<0$), обозначим: $\tau(x) = u(x, 0)$; $\nu(x) = u_y(x, 0)$; $-2/(m+2) < x < 2/(m+2)$. Решая в области D_{1-} задачу Коши для уравнения (5) с начальными данными $u(x, 0) = \tau(x)$ и $u_y|_{x=0} = \nu(x)$ на отрезке $C'C$: $-2/(m+2) < x < 2/(m+2)$, автор находит одно соотношение между $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $\varphi(y) = u(0, y)$; $0 \leqslant y \leqslant 1$, используя также условие (4). Из решения задачи Дирихле для уравнения (5) в области D_{1+} с краевыми условиями (2) и условием $u|_{c'c} = \tau(x)$ определяются $\nu(x)$ и $\varphi(y)$ через $\tau(x)$. После исключения $\nu(x)$ из этой системы равенств для неизвестной функции $\tau(x)$ получается интегральное уравнение второго рода следующего вида:

$$\tau(x) - 4\lambda \int_0^{1-2\beta} \tau(\xi)\, x^{1-2\beta} \left(\frac{\xi^{2+2\beta}}{\xi^4 - x^4} - \frac{a^{2+2\beta}}{a^4 - x^4 \xi^4 a^{-4}} \right) d\xi -$$

$$- 2\lambda \int_0^{1-2\beta} \tau(\xi)\, H_1(\xi, x)\, d\xi = F(x), \tag{6}$$

где $\beta = \dfrac{m}{2(m+2)}$; $\lambda = \dfrac{\cos \beta\pi}{\pi(1 + \sin \beta\pi)}$; $H_1(\xi, x)$ — некоторая, непрерывная и ограниченная по обеим переменным функциям, а $F(x)$ — известная функция, зависящая от краевых данных. Сингулярный оператор, стоящий в левой части уравнения (6), обращается обычным методом сведением к краевой задаче Римана—Гильберта, после чего для определения $\tau(x)$ получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода, существование решения которого следует из единственности решения рассматриваемой краевой задачи.

Аналогичным образом решается краевая задача для уравнения (5), в которой второе условие (2) заменяется условием

$$u_y|_{x=0} = \psi_3(x), \quad a_1 < x < a.$$

Примечание референта. В работе пропущено необходимое предположение: $\psi_2(C) = \psi_2(2/m+2) = 0$, которое, впрочем, не ограничивает общность результата. И. Л. Кароль

2700. О существовании решения одной задачи Ф. И. Франкля. Девингталь Ю. В., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 1, 15—18

См. реф. 2699.

2701. К вопросу о решении задачи Трикоми для уравнения типа Чаплыгина. Пулькин С. П., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 219—226

Для уравнения

$$y u_{xx} + u_{yy} + c(y)\,u = 0, \tag{1}$$

к которому приводится уравнение Чаплыгина, в области D, ограниченной: в полуплоскости $y>0$ гладкой кривой Γ, опирающейся на отрезок AB оси $y=0$; в полуплоскости $y<0$ двумя характеристиками AC и BC уравнения (1) разных семейств,—рассматривается краевая задача T Трикоми, состоящая в определении непрерывного в $\bar{D}$ решения уравнения (1) по заданным значениям решения на Γ и на AC.

К. И. Бабенко (К теории уравнений смешанного типа. Дисс. М., 1952) доказал существование и единственность решения задачи T для уравнения (1) в некотором классе R_1 функций, являющихся обычными решениями (1) в области D_1 и обобщенными решениями (1) в области D_2 (D_1 (D_2) — часть D, лежащая в полуплоскости $y>0$ ($y<0$)) и при некоторых ограничениях на контур Γ и на коэфф.циент $c(y)$ в области D_2.

Используя обобщение принципа максимума на уравнения гиперболического типа, данное Агмо ом, Ниренбергом и Проттером (Agmon S., Nirenberg L., Protter M., РЖМат, 1955, 3212), автор показывает, что условие Бабенко на $c(y)$ при $y<0$ можно ослабить. Например, при $c(y) \leqslant 0$ достаточно $|\,c(y)\,| \leqslant {}^5/_{16}\, y^2$ при $-({}^3/_4)^{2/5} < y < 0$. И. Л. Кароль

2702. К решению краевой задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} u\, y_{vy} = 0$. Чибрикова Л. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 48—51

Для уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в односвязной области D, ограниченной: в полуплоскости $y > 0$ линией Жордана σ_0 с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$; в полуплоскости $y < 0$ — характеристиками AC и BC уравнения (1), — рассматривается краевая задача Трикоми в классе непрерывных в $\bar{D}$ решений (1) с непрерывными в D первыми производными и с краевыми условиями:

$$u|_{\sigma_0} = \varphi; \quad u|_{AC} = \psi(x), \qquad (2)$$

где φ и ψ — заданные функции, причем φ непрерывно дифференцируема, ψ дважды дифференцируема и $\varphi(A) = \psi(B) = \psi(A) = 0$.

В случае, когда σ_0 — полуокружность, решение задачи в явном виде дано А. В. Бицадзе (РЖМат, 1954, 2965), случай произвольной σ_0 приводится к случаю полуокружности конформным отображением.

Автор решает задачу Трикоми для случая, когда σ_0 есть половина границы одной из фундаментальных областей некоторой элементарной или фуксовой группы Γ дробно-линейных подстановок

$$\omega_k(z) = \alpha_k(z) + \beta_k/(\gamma_k z + \delta_k); \; z = x + iy; \; \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k \neq 0.$$

Введением в эллиптической части D_1 области D аналитической функции $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $v(0, 0) = 0$ задача Трикоми сводится к краевой задаче Римана—Гильберта

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t); \; t \in L = \sigma_0 \cup AB \qquad (3)$$

с разрывными в точках A и B коэффициентами: $a(t) = 1$, $t \in L$;

$$b(t) = \begin{cases} 0, & t \in \sigma_0 \\ 1, & t \in AB \end{cases}; \qquad c(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in \sigma_0 \\ 2\psi(t/2), & t \in AB. \end{cases}$$

Для решения этой задачи вводится кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, равная $F(z)$ в D_1 и $\overline{F(\bar{z})} = \bar{F}(z)$ в области, симметричной с D_1 относительно оси $y = 0$, которая распространяется затем автоморфно относительно группы Γ на всю область существования простых автоморфных функций этой группы: $\Phi[\omega_k(z)] = \Phi(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Для определения $\Phi(z)$ из (3) получается краевая задача Римана—Гильберта с разрывными в A и B коэффициентами для автоморфных функций, принадлежащих группе Γ. Ограниченное, непрерывное вплоть до L решение этой задачи строится в явном виде (РЖМат, 1957, 7828). Рассмотрены примеры. И. Л. Кароль

2703. Об одном обобщении основной краевой задачи для итерированного уравнения теплопроводности. Пини (Su una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per l'equazione del calore iterata. Pini Bruno), Rend. Seminar. Fac. sci. Univ. Cagliari, 1956, 26, № 1-2, 30—57 (итал.)

Пусть D — область

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \; \chi_1(y) \leqslant x \leqslant \chi_2(y),$$

c — отрезок оси x — $b\,\chi_1(y) \leqslant x \leqslant \chi_2(y)$, γ_i — кривые $x = \chi_i(y)$.

Ищется решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0 \qquad (1)$$

в D — c — γ_1 — γ_2, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \to +0} \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 \left(|(u)_{\gamma_i(t)} - f_i| + \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\gamma_i(t)} - \varphi_i\right| \right) dy = 0,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{на } c, \qquad (2)$$

где $\gamma_i(t)$ — кривая, $x = \chi_i(y) - (-1)^i t$.

Доказывается существование и единственность решения этой задачи в предположении, что функции f_i обращаются в нуль при $y = 0$ и абсолютно непрерывны на отрезке $0 \leqslant y \leqslant 1$, а функции φ_i суммируемы на этом отрезке.

Решение задачи (1), (2) получается как предел решений обычных краевых задач для уравнения (1).

Т. Д. Вентцель

2704. Элементарное решение уравнения в частных производных 4-го порядка с двойными характеристиками. Антохи-Теодореску (Solutia elementara a ecuatiei cu derivate partiale de ordinul al patrulea cu pînza caracteristica dubla. II. Antohi-Teodorescu Veronica), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. stiint. natur., 1958, № 17, 9—21 (рум.; рез. русск., франц.)

Дается два вида элементарного решения дифференциального уравнения в частных производных 4-го порядка

$$(\Delta_2 + \theta_1)\Delta_2 u + c^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} + d^{\alpha} u_{\alpha} + eu = 0,$$

где $\Delta_2 u = g^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}$, $\theta_1 u = \beta^{\gamma} u_{\gamma}$, в римановом пространстве $2n$ измерений. Случай $2n + 1$ измерения рассмотрен автором ранее (РЖМат, 1958, 6729). Н. И. Мозжерова

2705. О единственности решения задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений с двумя переменными. Пини (Osservazioni sulla soluzione di un problema biarmonico generalizzato. Pini Bruno), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 219—224 (итал.)

Для эллиптического уравнения

$$\sum_{0 < i+j < 2n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y)$$

рассматривается задача Дирихле в области D:

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = f_k \text{ на } FD, \; k = 0, 1, \ldots, n - 1,$$

где FD — граница D, а ν — нормаль к границе. Доказывается, что решение этой задачи единственно, если диаметр области D достаточно мал. Получена явная оценка верхней границы диаметра D. Т. Д. Вентцель

2706. Об асимптотике решений задач с быстро осциллирующими граничными условиями для уравнений с частными производными. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 4, 636—639

В плоской области Q с границей Γ рассматривается эллиптическое уравнение

$$L_{2k} u = 0 \qquad (1)$$

порядка $2k$, разрешимое при любых граничных условиях первой краевой задачи. Разбираются два случая:

1. На участке границы задаются условия $\left.\frac{\partial^l u_\omega}{\partial n^l}\right|_\Gamma =$ $A_l(\varphi) e^{l\omega\varphi}$, $l = 0, \ldots, k - 1$ ($\varphi \in \Gamma$ — параметр) $A_l(\varphi)$ — гладкие функции.

2. На участке границы μ ($\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$) задается семейство функций $\{f_{l,\varepsilon}\}$; $\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi} f_{l\xi}(\varphi) d\varphi\right| < k_l \varepsilon$ при любом $\varphi \in \mu$ (K_l не зависит от ε) и условия $\partial^l u_\varepsilon / \partial n^l |_\Gamma = \alpha_l(\varphi) f_{l,\xi}(\varphi)$ (α—гладкие). В обоих случаях строится асимптотика решений уравнения (1) в окрестности границы при больших ω и малых ε. Для условий второго типа приводится обобщение. Указывается, что многомерный случай может быть рассмотрен аналогично. А. А. Дезин

2707. О свойствах регулярности решений эллиптических дифференциальных уравнений. Браудер (On the regularity properties of solutions of elliptic differen-

tial equations. Browder Felix F.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 351—361 (англ.)

Обозначения: G — ограниченная область n-мерного пространства E^n с границей Γ класса C^m, $m \geqslant 1$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$; $D^\alpha = \dfrac{\partial^r}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_r}}$ при $|\alpha| = r$; $L^p(G) = \{f \mid |f|^p$ суммируема относительно n-мерной лебеговой меры в $G\}$,

$$\|f\|^p_{L^p(G)} = \int_G |f|^p dx; \quad (f, g) = \int_G f\bar{g}\, dx, f, g \in L^2(G);$$

$C^j(G) = \{f \mid D^\alpha f$ непрерывна в G при $|\alpha| \leqslant j\}$;

$C^\infty(G) = \bigcap_j C^j(G)$; $C^j(\bar{G}) = \bigcup_{G_1 \supset G} C^j(G_1)$; $C_c^\infty(G) = \{f \mid f \in C^\infty(G)$, $f = 0$ вне некоторого компактного подмножества $G\}$.

Для $0 < \lambda < 1$; $C^{j,\lambda}(G) = \{f \mid f \in C^j(G)$; для каждого α при $|\alpha| = j$ существует $c_{\alpha,\lambda}(f)$, что $|D^\alpha f(x_1) - D^\alpha f(x)| \leqslant c_{\alpha,\lambda}(f) |x_1 - x|^\lambda$ для всех $x, x_1 \in G\}$; $c^0_{\alpha,\lambda}(f)$ — наименьшее из таких $c_{\alpha,\lambda}(f)$;

$$\|f\|_{C^{j,\lambda}(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant j} \max_{x \in G} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| = j} c^0_{\alpha,\lambda}(f);$$

$\|f\|_{H^{j,p}(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant j} \|D^\alpha f\|_{L^p(G)}$, $f \in C^j(\bar{G})$; $H^{j,p}(G)$ — пополнение $C^j(\bar{G})$ по норме $\|f\|_{H^{j,p}(G)}$.

Рассматриваются: 1) эллиптический оператор $A = \sum_{|\varsigma| < 2m} C_\varsigma(x) D^\varsigma$ в G; 2) форма $a(f, g) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha f, D^\beta g)$ такая, что $Au = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{m+|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta} D^\alpha u)$, причем предполагается, что $a_{\alpha\beta}$ ограничены и измеримы в G;

3) линейное многообразие V функций на G, $G_0^\infty(G) \subset V \subset C^r(\bar{G})$ (Γ предполагается класса C^r);

4) симметричные граничные формы $\zeta(f, g)$, $\varnothing(f, g)$, удовлетворяющие ряду условий, в основном состоящих в оценках для $\zeta(f, f)$ и $\varnothing(f, f)$ через нормы производных функции f.

Пополнение V по скалярному произведению $[f, g] = \frac{1}{2}[a(f, g) + a(\overline{g, f})] + \zeta(f, g) + k_0(f, g)$ обозначается через H.

Ставится эллиптическая краевая задача B, состоящая в определении решения $u \in C^{2m}(G)$ уравнения $Au = f$, удовлетворяющего условию

$$a(u, g) + \zeta(u, g) + \varphi(u, g) = (-1)^m (Au, g) \qquad (1)$$

при данном $f \in H$ и всех $g \in V$; условие (1) заменяет краевые условия. Для задачи B формулируется ряд теорем о регулярности решения внутри и на границе G.

Например:

Теорема 1. 1) Если $a_{\alpha\beta} \in C^r(G)$, $r \geqslant 0$, то $u \in H^{m+r, p}(G_1)$ для каждой компактной подобласти $G_1 \subset G$, если только $f \in L^{p_1}(G)$, $p_1 = pn/[n + p(m - r)]$ для $r \leqslant m$; $f \in H^{r-m, p}(G)$ для $r > m$. 2) Для каждого компактного подмножества $G_1 \subset G$ существует такая постоянная c_{G_1}, что

$$\|U\|_{H^{m+r, p}(G_1)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{G_1} \begin{cases} \|f\|_{L^{p_1}(G)} + \|u\|_{L^1(G)} & \text{при } r \leqslant m \\ \|f\|_{H^{r-m, p}(G)} + \|u\|_{L^1(G)} & \text{при } r > m. \end{cases}$$

3) Если $a_{\alpha\beta} \in C^{r,\lambda}(G)$, $0 < \lambda$, то $u \in C^{m+r,\lambda}(G_1)$ для каждой компактной подобласти G_1, если только $f \in C^{0,\lambda}(G)$ при $r \leqslant m$, $f \in C^{r-m,\lambda}(G)$ при $r > m$.

4) При выполнении условий предложения 3) существует постоянная c_{G_1}, для которой $\|u\|_{C^{m+r,\lambda}(G_1)} \leqslant c_{G_1} \{\|f\|_{C^{\max(r-m, 0),\lambda}(G)} + \|u\|_{L^1(G)}\}$.

Теорема. 4. Если $a_{\alpha\beta} \in C^{m+s}(\bar{G}) \cap C^{2m+s}$ и $f \in H^{s,2}(G)$ для $s + 2m > n/2 + t$, $t \geqslant 0$, то $u \in C^t(\bar{G})$. Если, кроме того, решение u единственно для каждого f, то $u = Gf$, где G^r при $r > n/4m$ есть оператор типа Гальберта-Шмидта в $L^2(G)$.

Доказательства только намечены. Опечатки: на стр. 355 в условии (а) вместо $C_C^\infty(G) \subset V \subset C^r(\bar{G})$ напечатано $C_C^\infty(G) \subset G \subset C^r(\bar{G})$.

М. А. Наймарк

2708. Поправка. Докл. АН СССР, 1955, № 3, 396

К РЖМат, 1956, 2240

2709. О существовании решений некоторых новых задач для гиперболической системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Шмидт (Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Szmydt Z.), Ann. polon. math., 1957, 4, № 1, 40—60 (франц.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$U_{xy} = F(x, y, U, U_x, U_y) \qquad (1)$$

($U = (U^{(1)}, \ldots, U^{(n)})$, $F = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$, записанная в векторной форме. Пусть $D(-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha, -\beta \leqslant y \leqslant \beta)$ — прямоугольник, ограниченный четырьмя характеристиками системы (1), а $\Gamma(y = \gamma(x), -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha)$ и $\Lambda(x = \lambda(y), -\beta \leqslant y \leqslant \beta)$ — две кривые, лежащие в D.

Решаются следующие две задачи.

Задача 1. Найти в D регулярное решение системы (1) (т. е. имеющее непрерывные производные, входящие в систему), удовлетворяющее условиям

$$U(x_0, y_0) = \overset{\circ}{U}, \qquad (2)$$

$$U_x = G(x, U, U_y) \text{ на } \Gamma, \qquad (3)$$

$$U_y = H(y, U, U_x) \text{ на } \Lambda, \qquad (4)$$

где (x_0, y_0) — точка из D, $\overset{\circ}{U}$ — заданный вектор и G, H — заданные вектор-функции.

Задача 2. Найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям (3) и

$$U(\lambda(y), y) = \overset{\circ}{U} + \int_{y_0}^{y} B(t, U(\lambda(t), t), U_x(\lambda(t), t))\, dt. \qquad (5)$$

Обе задачи сводятся к эквивалентным им интегральным уравнениям. С помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке доказывается, при некоторых условиях гладкости вектор-функций F, G, H, B, что интегральные уравнения (а следовательно, и задачи (1) и (2)) разрешимы, если прямоугольник D достаточно мал.

В конце работы автор показывает, что из его результатов следует, в частности, разрешимость классических задач Коши, Дарбу, Пикара, Гурса, а также смешанных задач для системы (1).

Л. Н. Слободецкий

2710. О единственности обобщенного решения задачи Коши для одной нелинейной системы уравнений, встречающейся в механике. Олейник О. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 169—176

Рассматривается гиперболическая система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\varphi'(v) < 0, \qquad \varphi''(v) > 0,$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad v|_{t=0} = v_0(x). \tag{2}$$

Обобщенным решением задачи (1)—(2) в области D, ограниченной осью $t = 0$ и гладкой кривой Γ в полуплоскости $t \geqslant 0$, называется пара ограниченных, измеримых функций $u(t, x)$, $v(t, x)$, удовлетворяющих для любых гладких функций $f(t, x)$, $\psi(t, x)$, обращающихся в нуль в окрестности Γ, интегральным тождеством

$$\begin{cases} \iint_D \left[\dfrac{\partial f}{\partial x} u + \dfrac{\partial f}{\partial x}\ \varphi(t, x, v)\right] dx\, dt + \int_a^b u_0(x) f(0, x)\, dx = 0, \\ \iint_D \left[\dfrac{\partial \psi}{\partial x} v - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} u\right] dx\, dt + \int_a^b v_0(x) \psi(0, x)\, dx = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Далее предполагается, что

$$u(t, x_1) - u(t, x_2) < K(x_1 - x_2). \tag{4}$$

Теорема 1. Если $(u_1(t, x), v_1(t, x))$ и $(u_2(t, x), v_2(t, x))$ — обобщенные решения (1)—(2), удовлетворяющие (4), то они совпадают в области D_τ, ограниченной прямыми $t = 0$,

$t = \tau$, $x - a = At$, $x - b = -At$, где $A = \max_D \sqrt{-\Phi(t, x)}$,

$$\Phi(t, x) = \frac{\varphi(t, x, v_1) - \varphi(t, x, v_2)}{v_1 - v_2}; \quad \tau > 0,\ D_\tau \subset D.$$

Далее рассматривается решение системы (1) в классе кусочно-непрерывных функций, имеющих разрывы первого рода на конечном числе гладких линий и разрывы специального вида в конечном числе точек, называемых центрами волн разряжения. Пусть $\varphi \to \infty$ при $v \to 0$ и $\varphi'_v \to 0$ при $v \to \infty$ и пусть для решения (u, v) в полосе $(0 \leqslant t \leqslant T)$ выполнено условие

$$v(t_1, x) - v(t_2, x) < \widetilde{K}(t_1, t_2, x)(t_1 - t_2), \tag{5}$$

где $\widetilde{K}(t_1, t_2, x)$ непрерывна и конечна всюду, кроме центров волн разряжения.

Предполагается, что в окрестности центра волны разряжения $P(t_0, x_0)$ при $t \geqslant t_0$ решение (u, v) имеет следующую структуру: в окрестности точки P имеется конечное число секторов вида $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 \left(\lambda = \dfrac{x - x_0}{t - t_0},\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0\right)$, где решение (u, v) представляется в виде

$$v(t, x) = \alpha(\lambda^2) + \delta(t, x),$$

$$u(t, x) = \sigma(\lambda^2) + \delta_1(t, x) + c_1 \text{ при } \lambda_1 > 0,$$

$$u(t, x) = -\sigma(\lambda^2) + \delta_2(t, x) + c_2 \text{ при } \lambda < 0,$$

и $\alpha^{-1}(s) = -\varphi'_v(t_0, x_0, s)$, $\alpha' < 0$, $\sigma' > 0$, δ, δ_1, δ_2 — непрерывные функции, стремящиеся к нулю при $(t, x) \to (t_0, x_0)$. Говорят, что в секторе $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ решение имеет волну разряжения. Для (t, x) вне этих секторов и близких к P функция $\widetilde{K}(t_1, t_2, x)$ непрерывна и ограничена. При $\lambda > \lambda_1$ (при $\lambda_1 > 0$) для (t, x), близких к P, и $t \geqslant t_0$ предполагается выполненным неравенство

$$v(t_1, x) - v(t_2, x) > H(t_1 - t_2), \tag{6}$$

где H — постоянная. Естественность этих ограничений выясняется при рассмотрении автомодельных решений. Для таких решений доказывается следующая теорема:

Теорема 2. Решение (u, v) в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$ системы (1) для кусочно-непрерывных начальных данных $(u_0(x), v_0(x))$, удовлетворяющее неравенствам (6) — (5) и имеющее конечное число центров волн разряжения, единственно.

А. Л. Крылов

2711. Некоторые теоремы об устойчивости решений параболических систем. Эйдельман С. Д., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 2, 253—255

В заметке излагается несколько теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову решений систем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \sum_{k=0}^{2b} P_k\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u \tag{1}$$

параболических в смысле И. Г. Петровского, определенных в полупространстве $t \geqslant 0$ и принадлежащих в каждой полосе $[0, T]$ классу единственности задачи Коши. Результаты получаются с помощью матрицы Грина. Некоторые критерии являются непосредственным обобщением теоремы Ляпунова об устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений на системы параболического типа.

Определение 1. Матрица Грина $G(t, \tau, x)$ системы (1) удовлетворяет условию $Л_1$ ($Л_2$), если для любого $t > \tau \geqslant 0$ и $x_1, \ldots, x_n$

$$(Л_1) \quad \left|G(t, \tau, x)\right| \leqslant C_0 a(t, \tau)^{-n} \exp\left\{-c_0 \left|\frac{x}{a}\right|^q\right\}; \quad q = \frac{2b}{2b - 1};$$

$$(Л_2) \quad \left|G(t, \tau, x)\right| \leqslant C_0 a(t, \tau)^{-n} \exp\left\{-\delta_0 a(t, \tau)^{2b} - c_0 \left|\frac{x}{a}\right|^q\right\},$$

C_0, δ_0, c_0 — положительные постоянные; $a(t, t) = 0$; $a(t, \tau)$ — монотонно возрастающая функция аргумента t; в $(Л_2)$ $a(t, \tau) \underset{t \to \infty}{\to} \infty$ при фиксированном τ.

Определение 2. Тривиальное решение системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого решения $u(x, t) \in E$ такого, что $|u(x, 0)| \leqslant \delta e^{k|x|}$, имеет место неравенство $|u(x, t)| \leqslant \varepsilon e^{k|x|}$ (E_k-устойчивость). Тривиальное решение асимптотически устойчиво, если дополнительно $|u(x, t)|\, e^{-k|x|} \underset{t \to \infty}{\to} 0$ равномерно по x (E_k-асимптотическая устойчивость).

Из оценок $Л_1$, $Л_2$ и представления решения через матрицу Грина следует:

Теорема 1. Если выполнено условие $Л_1$, то тривиальное решение системы (1) E_0-устойчиво. Если же выполнено условие $Л_2$, то тривиальное решение E_k-асимптотически устойчиво, $k < (2b\delta_0)^{1/2b}(c_0 q)^{-1/q}$.

Определение 3. Тривиальное решение системы (1) называется неустойчивым, если существует такое $\varepsilon > 0$, что, какое бы $\delta > 0$ не было выбрано, всегда найдется такое решение системы (1) $u(x, t) \in E_k$, $|u(x, 0)| < \delta e^{k|x|}$ и такое $T > 0$, что $\sup_x \{|u(x, T)|\, e^{-k|x|}\} > \varepsilon_0$.

Теорема 2. 1) Тривиальное решение системы (1) будет E_0-неустойчивым, если для каждого вектора $a = (c_1, \ldots, c_j, b_{j+1}, \ldots, b_{j+m} c_{j+m+1}, \ldots, c_N)$, $b = (0, \ldots, 0, b_{j+1}, \ldots, b_{j+m}, 0, \ldots, 0)$, $c = a - b$, $m \geqslant 1$, и хотя бы одного набора $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$

$$R\{(P(t, \sigma^*) a, b) - (P(t, \sigma^*) a, c)\} \geqslant f(t)\, |b|^2; \int_0^\infty f(t)\, dt = +\infty$$

2) Для системы с постоянными коэффициентами тривиальное решение будет E_0-неустойчиво, если хотя бы для одного набора $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*$ хотя бы один корень определителя матрицы $P(\sigma) - \lambda E$ имеет положительную вещественную часть.

С необходимыми изменениями некоторые из результатов распространяются на нелинейные системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(t, x, u),$$

где $f(t, x, u)$ — нелинейное слагаемое, удовлетворяющее некоторым общим требованиям.

В работе указано несколько признаков выполнения условий $Л_1$ и $Л_2$. А. Л. Крылов

2712. Обобщенные решения *p*-параболической квазилинейной системы. Фояш, Гусси, Поенару (Verallgemeinerte Lösungen für *p*-parabolische quasilineare Systeme. Foias Ciprian, Gussi George, Poenaru Valentin), Math. Nachr., 1958, **17**, № 1-2, 1—8 (нем.)

Рассматривается задача Коши для *p*-параболической в смысле И. Г. Петровского системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{\substack{j=1 \\ (k)}}^{N} A_{ij}^{(k)} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots$$

$$\ldots, u_N) \ (i = 1, \ldots, N).$$

С помощью результатов Петровского (Бюлл. МГУ, 1938, сер. А 1, № 7) и авторов (РЖМат, 1958, 356) в работе доказано, что если функции f_i и начальные данные равномерно непрерывны, причем

$$|f_i(t, x, u) - f_i(t, x, v)| \leqslant k(t)\,\omega\left(\sum_1^N |u_j - v_j|\right)$$

$$(i = 1, \ldots, N),$$

где функция k суммируемая, а ω „типа О" (Осгуда), то на некотором интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ существует обобщенное решение задачи (определенное как решение интегрального уравнения, ядром которого служит матрица Грина для однородной системы (1)). Это решение единственно и непрерывно зависит от начальных данных (в смысле равномерной сходимости). Приведены условия аналогичного вида, достаточные для существования решения при всех $t \in [0, \infty)$. Все эти результаты получаются как следствие доказываемых теорем о решении уравнения $du/dt = Au + f(t, u)$ $(t > 0)$, $u(0) = \varphi$ в банаховом пространстве, причем априори предполагается, что решения той же задачи при $f \equiv 0$ обладают рядом достаточно хороших свойств. А. Д. Мышкис

2713 К. Элементы дифференциальных уравнений в частных производных. Снеддон (Elements of partial differential equations. Sneddon Ian Naismith. New York, McGraw-Hill, 1956, 336 pp., 7.50 doll.), Publishers Weekly, 1957, **171**, № 6, 149 (англ.)

2714 К. Лекции по уравнениям в частных производных. Трикоми Ф. Перев. с итал. М., Изд-во ин. лит., 1957, 443 стр., илл., 17 р. 10 к.
См. РЖМат, 1959, 1542 К.

2715 Д. Некоторые краевые задачи для одного дифференциального уравнения смешанного типа. Агишев Р. Я., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. гос. пед. ин-т, Казань, 1958

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

2716. О методе избыточных координат в динамике системы переменных масс. Зуннунов Н. З., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 2, 11—15 (рез. узб.)

Рассматривается задача о движении системы N материальных точек с массами, зависящими от времени, подчиненных k голономным связям. Устанавливается каноническая форма уравнений движения и доказываются некоторые теоремы, относящиеся к их интегрированию.
Г. Н. Дубошин

2717. Некоторые вопросы синтеза импульсных автоматических систем. Цыпкин (Деякі питання синтезу імпульсних автоматичних систем. Ципкін Я. З.). Автоматика (Київ), 1958, № 1, 3—19 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются импульсные автоматические системы, к которым относятся системы прерывистого регулирования технологических процессов; импульсные следящие системы, которые применяются в импульсной связи и радиолокации; системы регулирования, содержащие в качестве элемента цифровые вычислительные устройства.

Описывается связь между передаточными функциями, частотными и временными характеристиками импульсной системы и ее непрерывной части, которая положена в основу синтеза.

Определяются условия оптимального процесса, обеспечивающего минимальную и конечную длительность переходного процесса при заданном воздействии и минимальную среднеквадратическую ошибку при случайных воздействиях. Излагаются аналитический и графический способы синтеза оптимальных импульсных систем, которые могут быть осуществлены на основе непрерывной и импульсной коррекции. Приводится пример импульсной коррекции, выполняемой цифровым вычислительным устройством с заданной программой. Резюме автора

2718. Определение возмущающих сил по движениям небесных тел. Дебердеев А. А., Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, **6**, №9, 581—591 (рез. нем.)

Рассматривается задача о возмущенном движении, приводящаяся к уравнениям вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} = X;$$

предполагается, что координаты суть известные функции времени, и ставится задача о нахождении величин X. Уравнения движения автор переписывает в виде интегральных уравнений

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \int_0^t (t-\tau)\left[X - k^2 \frac{x}{r^3}\right] d\tau$$

и занимается подробно приближенным определением величин X из этих интегральных уравнений.
Г. Н. Дубошин

2719. Поправка. Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, **6**, № 10, 772

2720. О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Темченко М. Е., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 8, 53—61

2721. Общие решения задачи *n* тел, представленные с помощью рядов Ли. Грёбнер (Le soluzioni generali del problema degli *n* corpi rappresentate mediante serie di Lie. Gröbner Wolfgang), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 1, 11—15 (итал.)

Общее решение задачи n тел:

$$\dot{x}_k = u_k, \quad \dot{y}_k = v_k, \quad \dot{z}_k = w_k,$$

$$\dot{u}_k = -\frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad \dot{v}_k = -\frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad \dot{w}_k = -\frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial z_k} \ (k = 1, \ldots, n),$$

где x_k, y_k, z_k — их координаты, u_k, v_k, w_k — скорости. U — силовая функция:

$$U = -\sum_{k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

$$r_{kl} = r_{lk} = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2} \ (k, l = 1, \ldots, n)$$

представляется в виде степенных рядов Ли:

$$x_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu x_k^{(0)},\quad y_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu y_k^{(0)},$$

$$z_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu z_k^{(0)},\quad u_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu u_k^{(0)},$$

$$v_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu v_k^{(0)},\quad w_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu w_k^{(0)},$$

где $x_k^{(0)}$, $y_k^{(0)}$, $z_k^{(0)}$, $u_k^{(0)}$, $v_k^{(0)}$, $w_k^{(0)}$ — начальные значения координат и скоростей, D — оператор Ли:

$$D=\sum_{k=1}^{n}\left\{u_k\frac{\partial}{\partial x_k}+v_k\frac{\partial}{\partial y_k}+w_k\frac{\partial}{\partial z_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial u_k}-\frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial v_k}-\frac{1}{m_k}\frac{\partial U}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial w_k}\right\}.$$

Любая аналитическая функция $F(x_k,\ldots,w_k)$ представляется рядом:

$$F(x_k,\ldots,w_k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu F(x_k^{(0)},\ldots,w_k^{(0)}).$$

В частности, для взаимных расстояний получаются разложения:

$$r_{ke}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu r_{kl}^{(0)}.$$

Автор приводит также результат обращения этих степенных рядов относительно любой из переменных $x_k,\ldots,w_k$. Все ряды сходятся в круге $|t|\leqslant T$, где T есть момент соударения, при котором выполняется хотя бы одно из соотношений $r_{kl}=0$. Вопрос о продолжении решения за момент соударения не рассматривается. Г. А. Мерман

2722. Простой приближенный метод расчета процессов в цепях с переменными по времени параметрами. Богатырев О. М., Изв. высш. учебн. заведений. Энергетика, 1958, № 7, 53—62

2723. К определению области устойчивой работы инерционной системы телевизионной синхронизации. Бакаев Ю. Н., Кузнецов П. И., Радиотехника, 1956, 11, № 11, 17—24

Выводится система дифференциальных уравнений инерционного синхронизирующего устройства, которая после усреднения по времени имеет вид:

$$\gamma\frac{dx}{d\tau}=-x+\sin\psi,$$

$$\frac{d\psi}{d\tau}=(1-\lambda)x+\lambda\sin\psi+\beta,$$

$\tau=\Delta\omega_1 t$, $x=\xi\dfrac{T}{t_1 U}$; ξ и ψ — усредненные значения напряжения и фазы, γ^2, λ, β, $\Delta\omega_1$, T, t_1, U — параметры.

Написана приближенная формула для x в случае апериодического режима, соответствующего сильному затуханию, т. е. малым γ^2.

Рассматривается вопрос об устойчивости работы устройства. Методом усреднения (посредством исследования соответствующего квазистатического решения усредненного уравнения с учетом ошибки усреднения) получена нижняя граница значений коэффициента затухания $\alpha=1/\gamma$, при которых имеет место устойчивый периодический режим, в зависимости от β. А. Б. Васильева

2724. Об устойчивости периодических режимов в системах автоматического регулирования, найденных приближенно, исходя из гипотезы фильтра. Тафт В. А., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 6, 558—563 (рез. англ.)

Исследуется устойчивость периодического режима $x=\bar{x}(t)$ системы автоматического регулирования, которая описывается уравнением

$$D(p)X=-K(p)Y,\quad p=\frac{d}{dt},\quad Y=F(X),$$

где D и K — полиномы с постоянным коэффициентом (степень D выше степени K), а $F(X)$ — заданная нелинейная функция. Предполагается, что полиномы D и K удовлетворяют „условию фильтра", т. е. что существует такое конечное число ω_{cp}, что $\dfrac{K(i\omega)}{D(i\omega)}=0$ при $\omega\geqslant\omega_{cp}$.

Обычным приемом задача об устойчивости периодического режима сводится к исследованию устойчивости тривиального решения уравнения в приращениях

$$D(p)x+K(p)A_x(t)x=0, \qquad (1)$$

где $A_x(t)=\left[\dfrac{dF(X)}{dX}\right]_{X=\overline{X(t)}}$ — периодическая функция, а $x=X(t)-\overline{\lambda(t)}$.

Функция $A_x(t)$ заменяется ее разложением в ряд Фурье и после этого решение (1) ищется в форме

$$x(t)=\mathrm{Re}\sum X_k\exp[\lambda t+j(k\Omega t+\varphi_k)].$$

Приравнивание коэффициентов при комплексных амплитудах приводит сразу к бесконечной системе уравнений. Приравненный нулю определитель служит характеристическим уравнением с комплексными коэффициентами, его корни — искомые значения λ.

Чтобы сделать этот путь исследования устойчивости пригодным для практического использования, предлагается, учитывая „условия фильтра", заменить эту бесконечную систему уравнений конечной и, соответственно, в ее определителе удерживать лишь конечное число столбцов и строк.

Действительно, из условий фильтра следует, что при

$$|\mathrm{Im}\,A_i\pm k\Omega|\geqslant\omega_{cp}$$

соответствующие комплексные амплитуды — нули. Автор на этом основании удерживает лишь значения $k<\dfrac{\omega_{cp}}{\Omega}$ и, например, при $\omega_{cp}=2\Omega$ бесконечную систему уравнений заменяет системой из пяти уравнений.

В заключение показывается, что найденные таким образом условия устойчивости периодического режима отличаются от условий, к которым приводят методы малого параметра (например, метод Пуанкаре или метод гармонического баланса). М. А. Айзерман

2725. Семинар Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний автоматического регулирования. Гамкрелидзе Р. В., Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 2, 313—317 (кит.)

Перевод с русского, см. РЖМат, 1958, 3422.

2726. Колебания загруженных стержней. Кондратьев А. С., Чистовская Н. И., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7(а), 9—29

В работе составлено уравнение собственных частот для стержня, несущего одну сосредоточенную массу M. Указанное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\rho'}{M}=p^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(\xi)}{p_\nu^2-p^2}=p^2\rho'\omega(\xi,\xi,p), \qquad (1)$$

где ρ' — линейная массовая плотность стержня, p — собственная частота нагруженного стержня, p_ν — собственные частоты ненагруженного стержня, φ_ν — собственные функ-

ции ненагруженного стержня, нормированные условием $\int_0^l \varphi_\nu^2 d\xi = 1$; $\omega(\xi,\tau,p)$ резольвента функции влияния ненагруженного стержня.

Удерживая в бесконечной сумме формулы (1) один или два члена, авторы получают разной степени точности приближенные формулы для p.

При этом формула первого приближения для основной частоты имеет вид:

$$p^2 = \frac{p_1^2 \cdot \frac{p'}{M}}{\frac{p'}{M} + \varphi_1^2(\xi)}. \qquad (2)$$

Формула второго приближения громоздка и здесь приводиться не будет.

Произведена серия расчетов по точной формуле (1) и по формулам первого и второго приближения для шарнирно-опертого стержня с массой посредине и для консоли с массой на свободном конце. Для сравнения приведены также результаты расчета по формулам Релея, когда присоединенная масса учитывается коэффициентом $\frac{17}{35}$ для шарнирно-опертого стержня и коэффициентом $\frac{33}{140}$ для консоли. Результаты работы дают основание заключить, что для практических расчетов формула Релея может, безусловно, использоваться даже, если отношение массы стержня к сосредоточенной массе оказывается порядка 100. И. И. Ворович

2727. Нестационарное течение с теплопередачей в вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками при наличии вдува. Тирский Г. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 2, 226—228

Рассматривается нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными дисками, которые вращаются неравномерно в своих плоскостях и с которых происходит вдув той же жидкости со скоростями, зависящими от времени начальных условий нулевых. Для решения уравнений Навье—Стокса при заданных граничных условиях применяются известные подстановки для компонентов скорости и давления (Долидзе Д. Е., Прикл. матем. и механ., 1954, **18**, № 3; 1955, **19**, № 6), в результате чего автор приходит к новой граничной задаче.

Указывается, что после решения динамической задачи может быть решена задача теплопередачи в водной несжимаемой жидкости. Последняя сводится к решению бесконечной системы одномерных уравнений теплопроводности.

Решение полученных граничных задач в работе не приводится. Д. Е. Долидзе

2728. Заметка о спектральной функции Кармана для изотропной турбулентности. Гхош (A note on the Kármán's spectrum function of isotropic turbulence. Ghosh K. M.), Proc. Nat. Inst. Sci, India, 1954, **20**, 336—340 (англ.)

Гейзенберг (W. Heisenberg) предложил уравнение для вычисления спектральной функции $F(k,t)$ изотропной турбулентности и нашел решение, удовлетворяющее закону подобия Затем Сен (N. R. Sen) получил для малых значений ν общее решение вида

$$F(k,t) = \frac{1}{K^2}\frac{1}{k_0^3 t_0^2}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{2-3c} f\left[\frac{k}{k_0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^c\right].$$

Автор показывает, что решение такого типа удовлетворяет и уравнению, предложенному Карманом. Из последнего как частный случай следует уравнение Гейзенберга. Вид функции f зависит от параметров, содержащихся в уравнении Кармана. Далее автор исследует асимптотическое поведение функции $f(x)$ для малых и больших значений f. J. Bass

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 191.

2729. Обращение одного класса сингулярных интегралов. Зушовк (Die Umkehrung einer Klasse singulärer Integrale. Suschowk Dietrich), Math. Z., 1958, **69**, № 4, 363—365 (нем.)

Пусть

$$u^{(k)}(t,r) = \int_0^{t-r} \left[(t-\tau)^2 - r^2\right]^{-1/2} T_k\left(\frac{t-\tau}{r}\right) f(\tau)d\tau,\ t \geqslant r > 0,$$

где T_k — чебышевский полином степени k и $f(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, — вещественная функция с абсолютно непрерывной первой производной (автор не вполне точно требует только суммируемости второй производной) на любом конечном промежутке, причем $f(0)$. Устанавливаются формулы обращения

$$f(t) = -\lim_{r\to 0} r u_r^{(0)}(t,r),$$

$$f(t) = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{d^k}{dt^k}\left[\lim_{r\to 0} r^k u^{(k)}(t,r)\right],\ k>0.$$

С. Г. Михлин

2730. К вопросу о затухании поперечной циркуляции. Похсарян М. С., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 2, 233—236

Рассматривается затухание поперечной циркуляции на прямолинейном участке русла при заданной циркуляции в начальном участке. Вводятся предположения: продольная скорость постоянна, поперечные скорости малы по сравнению с продольной скоростью, давление подчиняется гидростатическому закону. Пренебрегая в дифференциальных уравнениях движения вязкой несжимаемости жидкости нелинейными членами, автор решает задачу методом разделения переменных и получает приближенный закон затухания поперечной скорости, зависящий от геометрических размеров и шероховатости канала. Приводится сравнение результатов с экспериментальными данными.

Д. Е. Долидзе

2731. Установившееся течение неньютоновской жидкости в трубах. Грин, Ривлин (Steady flow of non-newtonian fluids through tubes. Green A. E., Rivlin R. S.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 3, 299—308 (англ.)

Рассмотрено установившееся течение неньютоновской жидкости в трубе эллиптического сечения. Показано, что при постоянном градиенте давления результирующее течение состоит из двух различных по характеру течений: ламинарного течения вдоль оси трубы и четырех вихревых течений в каждом из квадрантов нормального к оси сечения трубы. Р. В. Торнер

2732. Стационарная краевая задача для вязкой несжимаемой жидкости. Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 219—220

2733. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 4, 671—674

Рассмотрено асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения нестационарной фильтрации газа Л. С. Лейбензона:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}$$

(где u — плотность газа, a^2 — константа, зависящая от свойств среды и газа, x — координата ($-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$), t — время, n — показатель политропы), которые соответствуют ограниченным начальным распределениям $u(x,0) = U(x)$, обращающимся в нуль вне некоторого конечного

интервала оси x. Вначале рассмотрен линейный случай ($n=0$), а затем полученные результаты обобщены на случай $n\neq 0$.

Установлено, что поведение асимптотических решений этого уравнения определяется его автомодельными решениями, которые были получены авторами ранее (Зельдович Я. Б., Компанеец А. С., Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, 1950; Баренблатт Г. И. ,Прикл. матем. и механ., 1952, 16, вып. 1).

Отмечено, что аналогичным способом можно выяснить асимптотический характер автомодельных решений, соответствующих различным смешанным краевым задачам, в частности, решения типа диполя, соответствующего нулевому граничному условию на границе полубесконечного пласта. Библ. 7 назв. П. Ф. Фильчаков

2734. О вытеснении нефти краевой водой. Булыгин В. Я., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 9, 140—145

Рассмотрена плоская задача вытеснения нефти краевой водой из горизонтального неограниченного по простиранию пласта постоянной мощности и проницаемости. Режим пласта водонапорный.

Следуя Л. С. Лейбензону и М. Маскату, автор предлагает решать задачу о движении водонефтяного контакта графоаналитическим способом: 1) определить давление Φ^+ в нефтяной зоне g^+ и давление Φ^- в водной зоне g^- в начальный момент; 2) построить новое положение границы раздела нефти и воды через небольшой промежуток времени, откладывая векторы перемещения, вычисленные исходя из известного положения границы. Затем процедура повторяется. При такой постановке задачи основные трудности заключаются в определении функций Φ^+ и Φ^-.

Для их отыскания автор предлагает воспользоваться методом конформного преобразования. Нефтяная зона g^+ отображается на внутренность круга единичного радиуса, а водная зона g^- — на внешность этого круга. Если отображающие функции известны, то соблюдение условий на границе раздела дает связь между граничными значениями функций давления. После нахождения граничных значений (с точностью до постоянного слагаемого) сами функции давления находятся решением внутренней и внешней задач Дирихле соответственно для нефтяной и водной областей. В качестве примера рассмотрен случай, когда граница раздела — окружность.

Далее, используя результаты М. А. Лаврентьева, автор решает задачу для границы раздела, близкой к окружности. Нормальная скорость движения границы получена в форме тригонометрических рядов.

В заключение приведено описание эксперимента по моделированию вытеснения нефти водой на лотке, заполненном стеклянной крошкой. Моделью нефти служила смесь керосина и α-монобромнафталина.

Опечатка: в формуле (2.8) вместо C_1, C_2, должны быть c_1, c_2. В. Л. Данилов

2735. К простейшей задаче продвижения контура нефтеносности. Пудовкин М. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 86—90

Рассматривается одномерная задача управления движением контура нефтеносности в постановке Г. С. Салехова для случая полубесконечного однородного горизонтального пласта постоянной мощности при упруговодонапорном режиме. Если пласт занимает полуплоскость $x>0$, то задача сводится к определению функций p_1 и p_2 (гидродинамических давлений соответственно в нефтяной и водной зонах), удовлетворяющих уравнениям

$$a_1^2\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t},\quad 0\leqslant x\leqslant x_0,\ t>0,$$

$$a_2\frac{\partial^2 p_2(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial t},\quad x>x_0,\ t>0$$

при начальных условиях

$$p_1(x,0)=p_2(x,0)=0,$$

условии на бесконечности

$$p_2(\infty,t)=0$$

и условиях сопряжения на заданной границе раздела нефти и воды $x=x_0(t)$:

$$p_1(x_0,t)=p_2(x_0,t), \tag{1}$$

$$c_1\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)}=c_2\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)}=-m\frac{dx_0(t)}{dt}. \tag{2}$$

Здесь c_1, c_2, m — определенные постоянные.

Применяя метод тепловых потенциалов, автор сводит задачу к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода:

$$\int_0^t\frac{H(t,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-\frac{x_0^2(t)}{4a_1^2(t-\tau)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

где $H(t,\tau)$ — известная регулярная функция, $f(t)$ — известная, а $\varphi(t)$ — искомая функция.

Для частного случая закона движения границы $x_0=A\sqrt{t}$ задача решается до конца, при этом

$$p_1(x,t)=A_1\operatorname{erf}\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}+B_1,$$

$$p_2(x,t)=A_2\operatorname{erf}\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}+B_2,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — постоянные, определяемые из условий (1), (2). В. Л. Данилов

2736. К решению простейшей задачи радикальной фильтрации. Пудовкин М. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 3—5

В начале координат помещена нагнетательная скважина радиуса r_0, на окружности радиуса R находится отборочная галерея. Для однородного пласта, при упруговодонапорном режиме и с учетом различия вязкостей воды и нефти ставится задача: по заданному закону продвижения водонефтяного контакта $r=\rho(t)$ $(r_0\leqslant\rho\leqslant R)$ определить давление в водяной и нефтяной зонах и режим работы скважины и галереи.

Математическая задача заключается в решении системы

$$a_1^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_1}{\partial t},\ r_0\leqslant r\leqslant\rho(t),\ t>0,$$

$$a_2^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_2}{\partial t},\ \rho(t)\leqslant r\leqslant R,\ t>0,$$

при начальном условии

$$p_2(r,\Theta)=0$$

и условиях на контуре нефтеностности $r=\rho(t)$

$$\left.\begin{aligned}p_1&=p_2,\\ c_1\frac{\partial p_1}{\partial r}&=c_2\frac{\partial p_2}{\partial r},\end{aligned}\right\}\ r=\rho(t).$$

Решение задачи дается в явном виде через функции $E_i(x)$, если $\rho(t)=A\sqrt{t}$. Указано, что в общем случае задача приводится к решению системы интегральных уравнений типа Вольтерра. М. Т. Нужин

2737. Определение поля давлений в пласте с учетом переходной зоны. Стрежнев В. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 104—109

При исследовании задачи предполагается, что давления p_H и p_B в нефтяной и водяной зонах удовлетворяют

уравнению Лапласа, а давление p в переходной зоне — уравнению

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[c(r,\theta)r\frac{\partial p}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[c(r,\theta)\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]=0;$$

а на границах раздела имеет место непрерывность давлений и их нормальных производных.

В случае, когда переходная зона, насыщенная смесью нефти и воды, является круговым кольцом и коэффициент текучести в ней c изменяется линейно от c_H до c_B, задача решается обычным методом разделения переменных. При этом решение $p(r, \theta)$ в переходной зоне выражается в виде ряда по гипергеометрическим функциям.

В общем случае переходная зона разделяется на несколько зон, в каждой из которых c считается постоянным; задача определения p сводится к решению системы интегральных уравнений. М. Т. Нужин

2738. К вопросу определения поля давлений в кусочно-однородных по проницаемости пластах. Тумашев Г. Г., Стрежнев В. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 110—113

Указанная в заглавии задача изучается с помощью известных методов теории потенциала и приводится к решению системы интегральных уравнений. Рассматривается частный случай, когда пласт состоит из $N+1$ кольцевых однородных областей, ограниченных концентрическими окружностями; в этом случае задача приводится к решению системы алгебраических уравнений. М. Т. Нужин

2739. Определение поля давлений в пласте с учетом различия вязкостей воды и нефти. Стрежнев В. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 114—118

Задача рассматривается для безграничного горизонтального пласта постоянной мощности h и проницаемости k при водонапорном режиме. Давления p_1 и p_2, удовлетворяющие уравнению Лапласа в нефтяной и водяной зонах, отыскиваются в форме:

$$p_1=p_0+\lambda\left[\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(a_n^{(1)}\cos n\theta+b_n^{(1)}\sin n\theta\right)+A\right],$$

$$p_2=p_0+\lambda\left[\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\left(a_n^{(2)}\cos n\theta+b_n^{(2)}\sin n\theta\right)+B\ln r\right].$$

где p_0 содержит члены, отражающие наличие скважин Неизвестные коэффициенты определяются из условий сопряжения на контуре нефтеносности приближенно численным методом. В случае, когда нефтяная зона представляет собой круг с центром в начале координат, для коэффициентов даются явные выражения. Указывается форма для p_2, когда контур питания является также окружностью с постоянным давлением p_n. М. Т. Нужин

2740. Принципы электроаналогий для определения коэффициентов фильтрационного расхода под плотинами. Нугаро, Грюа, Комье (Principes d'analogie électrique pour l'étude des coefficients de débit d'infiltration sous un barrage. Nougaro Jean, Gruat Jean, Comier Jean-Jacques), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 11, 1661—1664 (франц.)

Излагается применение метода электрогидродинамических аналогий к решению плоских задач напорной фильтрации в однородном грунте, в частности, для определения приведенного фильтрационного расхода. В качестве проводящей среды используется электропроводящая бумага télédeltos.

Эти же вопросы рассматривались ранее референтом (Фильчаков П. Ф., Докл. АН СССР, 1952, 84, № 2; Фильчаков П.Ф., Панчишин В. И., Прибор для исследования фильтрации по методу ЭГДА, „Гидротехническое строительство", 1953, № 9; Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И., Интеграторы ЭГДА-6/51 ЭГДА-6/53. Инструкция по эксплуатации и методика моделирования задач. Изд-во КГУ, 1955), а также Юар-де-ла-Маром (Huard de la Marre P., Nouvelles méthodes pour le calcul expérimental des écoulements dans les massifs poreux. Houille blanche, 8, N-spécial A, 1953). П. Ф. Фильчаков

2741. О вычислении коротких волн, параллельных берегу, на поверхности тяжелой жидкости над наклонным дном. Розо (Sur le calcul des ondes courtes parallèles au bord dans un liquide pesant sur un fond incliné. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 26, 2472—2474 (франц.)

Задача определения возможных стоячих волн на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости над наклонным дном, при условии что фронт волны параллелен берегу, сводится к следующей краевой задаче. Определить функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую внутри угла, ограниченного прямыми

$y=0$, $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0,\ x>0\right)$, дифференциальному

уравнению $$\Delta\varphi-k^2\varphi=0 \qquad (1)$$

и условиям:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi=0 \quad \text{на } Ox \qquad (2)$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \qquad (3)$$

на прямой $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x$.

В своей первой заметке на эту тему (G. r. Acad. sci., 1951, 211) автор рассмотрел случай $\kappa=0$ (плоские волны). Им было показано существование решений вида

$$\varphi(x, y)=\operatorname{Re}\lambda\int_C e^{\zeta z}\frac{g(\zeta)}{\zeta+i}d\zeta, \qquad (4)$$

где λ — некоторое комплексное число, C — специально выбранный контур, $g(\zeta)$ — аналитическая функция, решающая некоторую вспомогательную краевую задачу, эффективное решение которой автор находит в виде контурных интегралов. Формула (4) описывает 2 класса решений, одно из которых регулярно на ∞ и имеет логарифмическую особенность в нуле, другое регулярно в 0, но имеет логарифмическую особенность на ∞.

В следующей заметке (C.r. Acad sci., 1951, 481) автором был рассмотрен случай $k<1$. Решение типа (4) в этом случае имеет вид

$$\varphi=\operatorname{Re}\lambda\int_C\exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)+i\,y\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\}\cdot\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\frac{k}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)+i}. \qquad (5)$$

Условие $k<1$ соответствует случаю волн достаточно большой длины. В реферируемой заметке рассматривается случай коротких волн $k>1$. Утверждается, что формула (5) также определяет решение при условии специального выбора контура C. Если $\kappa>1$, то решение вспомогательной краевой задачи для аналитической функции $g(\zeta)$ будет функцией многозначной и контур C должен быть проведен по определенным листам ее римановой поверхности.

Показывается, что формула (5) определяет 2 линейно независимых решения, одно из которых имеет логарифмическую особенность в 0 и ограничено на ∞. Другое решение ограничено в 0 и имеет логарифмическую особенность на ∞.

В отличие от предыдущих заметок, автор в данном случае не предлагает эффективного способа построения функции $g(\zeta)$. Н. Н. Моисеев

2742. О решениях одной смешанной граничной задачи. Розо (Sur les solutions d'un problème aux limites de type mixte. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 2, 226—227 (франц.)

Рассматривается та же задача, что и в предыдущей заметке для случая $k=0$. Показывается, что наряду с найденным ранее решением этой задачи является функция

$$\varphi_j^{(p)} = \mathrm{Re}\,\lambda_j \int_{c_j} e^{\zeta z}\cdot\zeta^{p\frac{\pi}{\alpha}}\frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta+i}, i=1,2, \qquad (1')$$

где p — целое положительное число. Контур c_j $(j=1,2)$ выбран определенным образом. В отличие от найденного ранее решения, функция $\varphi_j^{(p)}$ ограничена на бесконечности и имеет полярную особенность в 0 типа $r^{p\frac{\pi}{\alpha}}$. Утверждается, что формула (1) определяет 2 линейно независимых решения, которые вместе с их линейными комбинациями полностью исчерпывают все возможные решения, ограниченные на ∞ и обладающие данной особенностью в 0 при условии $\cos p\pi^2\alpha \neq 0$ и $\sin p\pi^2\alpha \neq 0$.

Н. Н. Моисеев

2743. О решениях одной смешанной граничной задачи. Розо (Sur les solutions d'un problème aux limites de type mixte. Roseau Maurice), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 3, 369—371 (франц.)

Рассматривается та же задача, что и в предыдущей заметке (реф. 2742) для случая $\kappa < 1$.

Показывается, что наряду с найденным ранее решением интеграл

$$\varphi_j^{(p)} = \mathrm{Re}\int_{c_j} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)+iy\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\}\zeta^{p\frac{\pi}{\alpha}}\cdot \frac{g(\zeta)d\zeta}{\frac{k}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)+i},$$

p — целое >0, определяет 2 линейно независимых решения, которые вместе с их линейными комбинациями полностью исчерпывают решения указанной граничной задачи в классе функций, ограниченных на ∞ и имеющих сингулярность в нуле типа $r^{p\frac{\pi}{\alpha}}$ при условии $\cos p\pi^2\alpha \neq 0$ и $\sin p\pi^2\alpha \neq 0$.

Н. Н. Моисеев

2744. Задачи неустановившегося волнового движения поверхности тяжелой жидкости. Финкелстейн (The initial value problem for transient water waves. Finkelstein A. B.), Communs Pure and Appl. Math. 1957, **10**, № 4, 511—522 (англ.)

В тяжелой несжимаемой идеальной жидкости конечной глубины с момента времени $t=\tau$ действует сферический источник, сосредоточенный в точке (ξ, η, ζ). Возникающее движение жидкости считается потенциальным и применяются обычные предпосылки линейной теории волн, на основании которых находится функция источника $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t, \tau)$, содержащая сингулярность в точке (ξ, η, ζ) и удовлетворяющая начальным условиям $G = G_t = 0$ при $t=\tau$, и обычным граничным условиям $y=0$ и $y=-h$, где $y=0$ — невозмущенный уровень свободной поверхности, а $y=-h$ — дно. Функция G определяется при помощи дельта-формализма, как функция Грина для трехмерного уравнения Лапласа при соответствующих граничных и начальных условиях. Для нее приведены асимптотические оценки на бесконечности.

В дальнейшем рассматривается общий случай определения потенциала скоростей Φ при заданном распределении давлений на свободной поверхности и заданных значениях нормальной скорости на поверхности тела, находящегося в жидкости. Формулируются соответствующие теоремы единственности.

М. Д. Хаскинд

2745. Излучение поверхностных волн вертикально плавающей пластиной, совершающей поперечные колебания. Аяблас (On the generation of water waves by a vibrating strip. Albias J. B.), Appl. Scient. Res., 1958, **A7**, № 2-3, 224—236 (англ.)

Вертикально плавающая пластина неограниченной протяженности совершает поперечные деформационные колебания частоты ω в тяжелой жидкости. Потенциал скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ волнового движения несжимаемой жидкости определяется как решение уравнения Лапласа на основании граничных условий линейной теории волн

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -iah\omega e^{i(\lambda z+\omega t)} \quad \text{при } x=0,\ 0<y<1,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \sigma\Phi = 0 \text{ при } y=0\ (\sigma=\omega^2h/g),$$

где x, y, z — безразмерные координаты, приведенные к ширине пластины h, лежащей в плоскости yz; плоскость xz совпадает с невозмущенным уровнем жидкости, ось y направлена вертикально вниз, a — амплитуда поперечных колебаний пластины и g — ускорение силы тяжести.

В соответствии с характером граничных условий функция Φ ищется в форме $\Phi(x, y, z, t) = \chi(x, y)e^{i(\lambda z+\omega t)}$. При этом функция $\chi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \lambda^2\chi = 0$$

и условиям

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = -iah\omega \text{ при } x=0,\ 0<y<1;$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} + \sigma\chi = 0 \text{ при } y=0,$$

χ и $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ непрерывны при $x=0$ и $y>1$; χ — удовлетворяет условиям излучения при $|x|\to\infty$.

Общее решение для функции $\chi(x, y)$ строится при помощи интеграла плоских волн и на основании граничных условий составляется интегральное уравнение для функции $f(y)$, через которую выражается решение χ:

$$\int_0^\infty f(\eta)\left[\frac{1}{2}K_0(\lambda|y-\eta|) - \frac{1}{2}K_0(\lambda(y+\eta)) + \int_\lambda^\infty \frac{\mu e^{-\mu(y+\eta)}}{(\mu-\sigma)\sqrt{\mu^2-\lambda^2}}d\mu\right]d\eta = -\frac{\pi}{2}ce^{-\sigma y};\ y>1;$$

$$f(y) = iah\omega;\ 0<y<1;\ \left(c = -\frac{2i\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\lambda^2}}\int_0^\infty f(y)e^{-\sigma y}dy\right)$$

(K_0 — модифицированная функция Ганкеля).

Рассматриваются два случая решения этого уравнения: $\lambda=0$ и $\lambda\gg1$. В первом случае дается решение, полученное уже этим путем Эрселлом (Ursell F., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, **43**, 374), причем эффективный метод решения при помощи функции комлексного переменного содержится в работе референта (Инженерный сб., 1948, **4**, вып. 2).

Во втором же случае ($\lambda\gg1$) делается пренебрежение несингулярной частью ядра. Упрощенное таким путем интегральное уравнение принадлежит к классу уравнений типа Винера—Хопфа и приводятся формулы обращения этого уравнения.

Автору, по-видимому, не известна работа референта (РЖМат, 1954, 2967), в которой дан общий метод рассмотрения подобного рода задач для любых λ, основанный на изучении свойств функциональной комбинации $d\chi/dy+\sigma\chi$ и применении функций Матьё. М. Д. Хаскинд

2746. О распространении волн, вызванных периодически пульсирующим источником, сосредоточенным в глубоком бассейне, по поверхности мелкого бассейна, сообщающегося с глубоким. (Пространственная задача). Славянович В. Я., Уч. зап. Чкаловск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 205—220

Пульсирующий источник находится под поверхностью тяжелой жидкости неограниченной глубины, резко переходящей в мелководье, и изучается распространение образовавшихся поверхностных волн на мелководье.

Потенциалы скоростей $\Phi(x, y, z)$ и $\varphi(x, y)$ в глубоком ($y>0$) и мелком ($y<0$) бассейнах для установившихся колебаний определяются из обычных соотношений линейной теории волн

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g}\Phi = 0 \quad \text{при } z=0 \ (y>0),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0 \text{ и } z<-h$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2}{gh}\varphi = 0 \text{ при } y<0.$$

На границе сопряжения при $y=0$, $0>z>-h$ принимается $\varphi(x, 0)=\Phi(x, 0, 0)$ и $\partial\Phi/\partial y=\partial\varphi/\partial y$ при $y=0$.

Из потенциала скоростей $\Phi(x, y, z)$ выделяется сингулярная часть, соответствующая сферическому источнику вблизи вертикальной плоскости $y=0$. Оставшаяся несингулярная часть этого потенциала вместе с функцией φ представляются интегралами Фурье и окончательно отыскиваются при помощи граничных условий и условий сопряжения на границе перехода глубокого бассейна в мелкий ($y=0$, $0>z>-h$). К полученному выражению для функции φ применяется метод установившихся фаз, который приводит к асимптотической оценке распространения поверхностных волн на мелководье.

М. Д. Хаскинд

2747. Отражение длинных волн на поверхности тяжелой жидкости при скачкообразном изменении глубины. Бартоломеус (The reflexion of long waves at a step. Bartholomeusz E. F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 1, 106—118 (англ.)

Рассматривается задача о распространении волн, бегущих по поверхности тяжелой жидкости в канале, глубина которого меняется скачком со значения h_1 на h_2. Длина волны λ многим больше h_1 и h_2. Для построения решения используются полные системы ортогональных функций краевых задач, соответствующие конечным глубинам h_1 и h_2, и на основании условия сопряжения на границе перехода составляется интегральное уравнение, содержащее в качестве неизвестной функции горизонтальную скорость на границе перехода. Детально анализируется предельный случай $\alpha_0 = \frac{2\pi h_1}{\lambda_0} \to 0$, где λ_0 — длина набегающих волн, и на основе полученных результатов предлагается метод последовательных приближений решения интегрального уравнения, пригодный для малых значений α_0. В качестве примера производится расчет коэффициента отражения с точностью до α_0^2 и при $\alpha_0 = 0$ показывается его совпадение с известным значением коэффициента отражения для мелководья.

М. Д. Хаскинд

2748. Очерки по проблемам краевых значений. Часть II. Характеристические функции для прямоугольных плит. Эдман (Studies of boundary value problems. Part II. Characteristic functions of rectangular plates. Odman Sven T. A. Handl. Svenska forskningsinst. cement och betong, 1955, № 24, 283 pp.) (англ.)

Часть I см. Handl. Svenska forskningsinst. cement och betong, 1953, № 20, 44 pp.; РЖМех, 1957, 13059.

Рассматривается задача о собственных колебаниях упругих прямоугольных плит с равномерно распределенной массой. Дан обзор работ, которые выполняли в этой области Релей, Ритц, Игуши, Вайнштейн, Плейель и др., а также краткий анализ методов Навье, Мориса Леви, Надаи, Ритца, Тимошенко, Галеркина, Тейлора, Игуши и др.

Все решения представлены в виде гиперболо-тригонометрических функций. Большая часть книги содержит весьма ценные данные в виде таблиц значений частоты собственных колебаний. Для плит с отношением сторон $\varepsilon = b/a$ 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 при различных краевых условиях. Приведено много графиков нормализованных характеристик функций и их вторых производных для ряда случаев.

Д. В. Вайнберг

2749. Основные собственные частоты систем с эллиптическими границами. Деймонд (The principal frequencies of vibrating systems with elliptic boundaries. Daymond S. D.), Quart. J. Mech. Appl. Math., 1955, **8**, № 3, 361—372 (англ.)

Пусть R — плоская область с площадью π, ограниченная эллипсом c, имеющим эксцентриситет e. Автор рассматривает две задачи на собственные значения:

$$\nabla^2\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } c, \tag{1}$$

$$\nabla^2\varphi + \mu\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } c \ (\mu \neq 0), \tag{2}$$

и ищет в обоих случаях наименьшие положительные собственные значения λ и μ. Для решения определяются нули некоторых функций Матье и их производных. λ и μ протабулированы с 4 и более десятичными знаками для $e = 0(0,1)1$ и $(1-e^2)^{1/2} = 0(0,1)1$. Когда e возрастает от 0 до 1, то λ возрастает до ∞ и μ убывает до 0, в обоих случаях монотонно. Однако если $e \to 1$, то $\lambda(1-e^2)^{1/2} \to \frac{1}{4}\pi^2 = 2{,}46740$ сверху и $\mu(1-e^2)^{-1/2} \to 3{,}55928$ снизу, в обоих случаях монотонно (на стр. 362, строка 31, вместо $m_1 = 0$ нужно читать $m_1 = 3{,}55928$). λ и μ (в особенности λ) изменяются довольно медленно при изменении e от 0 до 0,9. Для эллиптической области $\bar{R}$ с площадью A соответствующие $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ для любого эксцентриситета даются формулами $\bar{\lambda} = \frac{\pi}{A}\lambda$, $\bar{\mu} = \frac{\pi}{A}\mu$.

M. A. Hyman

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, №7, 792.

2750. Распространение теоремы о верхней границе на предельные нагрузки чрезмерно выгнутых связок. Мазур (An extended upper bound theorem on the ultimate loads of buckled redundant trusses. Masur E. F.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 3, 315—317 (англ.)

См. РЖМех, 1957, 934.

2751. Концентрация напряжений в растянутой балке. Пиккетт, Айенгар (Stress concentration in post-tensioned prestressed concrete beams. Pickett Gerald, Iyengar K. T., Sundara Baja), J. Technol., 1956, **1**, № 2, 105—112 (англ.)

Рассматривается плоская задача теории упругости для полубесконечной балки, свободной от напряжений на продольных кромках и нагруженной нормальными усилиями вдоль поперечной кромки.

Путем представления бигармонической функции в виде суммы несобственных интегралов и рядов с неопределенными коэффициентами, задача сведена к двум бесконечным линейным алгебраическим системам. При исследовании соответствующей пространственной задачи вводится вектор Галеркина и намечается возможный путь решения.

Я. С. Уфлянд

2752. К решению контактных задач теории упругости для однородного анизотропного тела с осью симметрии бесконечного порядка. Сунчелеев Р. Я., Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1956, (1957), вып. 38, 53—65

См. РЖМех, 1958, 3131.

2753. О равновесии упругого цилиндра конечных размеров. Плиев С. Б., АзәрбСср Элмләр Акад. хәбәрләри Физ.-техн. вә кимя элмләри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и хим. н., 1958, № 1, 25—36 (рез. азерб.)

Рассматривается решение задачи о равновесии цилиндра конечных размеров при следующих граничных условиях:

$$\text{при } z = \pm l \quad \tau = 0, \quad \sigma_z = \Phi(r)$$

$$\text{при } r = a \quad \tau = 0, \quad \sigma_r = F(z).$$

Для решения задачи автор ищет функцию напряжения, удовлетворяющую бигармоническому уравнению в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\sin\frac{n\pi}{l}z, \qquad (1)$$

и представляет заданную функцию $F(z)$ в виде четного ряда Фурье

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}z. \qquad (2)$$

Затем вычислены напряжения σ_r, σ_θ, σ_z, τ и нормальное торцовое напряжение. Рассмотрен пример. И. П. Цай

2754. Динамические упругие смещения в круговом кольце. Сидляр (Динамічні пружні зміщення в круговому кільці. Сідляр М. М.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1954, **13**, № 8, 133—147 (укр.; рез. русск.)

В начальный момент радиальное смещение и скорость точек упругого кругового кольца нулевые. Под действием приложенных напряжений

$$\sigma_r\Big|_{r=r_1} = R_1(t), \qquad \sigma_r\Big|_{r=r_2} = R_2(t)$$

кольцо совершает радиальные колебания. Динамическое уравнение радиальных колебаний преобразуется с помощью трансформации Лапласа. Полученное уравнение интегрируется в цилиндрических функциях (постоянные определяются из граничных условий).

Для перехода от изображения к оригиналу исследуется знаменатель полученного решения в области изображений и выясняются свойства его корней (корни простые, чисто мнимые). Это позволяет написать оригинал в общем случае. Подробно рассмотрен случай $R_k = \text{const}$. Приводится таблица больших корней определяющего уравнения. И. С. Аржаных

2755. Задача изгиба поперечной силой слегка конического бруса, составленного из различных материалов. Бердзенишвили С. В., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 4 (52), 97—106 (груз.; рез. русск.)

Под слегка коническим составным брусом, следуя Д. Ю. Панову (Докл. АН СССР, 1938, 20, вып. 4), понимается брус, составленный из различных упругих материалов, разграниченный поверхностями вида:

$$F_j[x(1 - kz),\ y(1 - kz)] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

и двумя плоскостями $z = 0$, $z = l$, где k — малый параметр, квадраты и высшие степени которого отбрасываются.

Рассматривается задача изгиба поперечной силой такого тела. Методом, развитым в работах Д. Ю. Панова (Прикл. матем. и механ., 1938, 2), П. М. Риза (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1939, 4) и референта (Прикл. матем. и механ., 1942, 6; Тр. Груз. политехн. ин-та, 1949, № 19), поставленная пространственная задача теории упругости приводится к пяти граничным задачам относительно плоской составной области (поперечное сечение бруса при $z = 0$); доказывается разрешимость всех полученных граничных задач. А. К. Рухадзе

2756. О кручении цилиндрических валов с круговыми выточками. Скоробагатько А. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 896—898

Рассматривается бесконечно длинный цилиндрический вал с кольцевой выточкой круговой формы, скручиваемый моментом M и свободный от усилий на боковой поверхности. При помощи метода мажорантных областей (РЖМат, 1957, 8599) находится приближенная формула для максимальных напряжений в следующем виде:

$$\max|\mathbf{V}| \cong \frac{M}{\Pi R_0^3}\{\Pi(\mu) + \Pi_1(\mu)(1 - \delta^4) + \delta^4\}, \qquad (1)$$

где $$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0}{\rho}}}, \qquad \delta = \frac{R_0}{R},$$

$$\Pi(\mu) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\,\frac{3\mu^2 + 1}{2\mu^2 + 1}, \quad \Pi_1(\mu) = \frac{3}{4}\frac{(1 + \mu)^2}{\mu(\mu + 2)},$$

R — радиус вала, $R_0 = R - a$, a — глубина выточки, ρ — радиус выточки. Существенно то, что даются строго обоснованные пределы погрешностей формулы (1), которые, как видно из приведенной в работе таблицы, являются незначительными, особенно для наиболее распространенных случаев параметров μ и δ. Г. Н. Положий

2757. Разрывные краевые условия и линейные опоры в задачах статики цилиндрических оболочек. Олесяк (Discontinuous boundary conditions and linear supports in statical problems of cylindrical shells. Olesiak Zbigniew), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 5, 549—563 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматривается схема расчета круговой цилиндрической панели, контур срединной поверхности которой совпадает с линиями кривизн, нагруженной нормальной нагрузкой, причем панель 1) свободно оперта на часть контура, а на остальной части защемлена, 2) внутри контура оперта или даже защемлена по некоторым линиям. Для расчета этих задач предлагается метод функции влияния, приводящий к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода. Например, при решении задачи 1) неизвестными являются моменты защемления на контуре, ядра же определяют угол поворота срединной поверхности на контуре от действия сосредоточенного единичного изгибающего момента, когда оболочка во всех остальных точках контура свободно оперта.

Приводятся выражения для ядер в форме, вытекающей из представления прогиба двойным тригонометрическим рядом. Отмечается, что в точке приложения момента ряды для угла поворота имеют расходимость логарифмического типа.

Решение полученных уравнений предлагается производить путем замены интегральных уравнений конечной системой алгебраических, принимая за неизвестные значения моментов заделки в середине отдельных отрезков защемленной части контура. Н. А. Алумяэ

2758. Поправка (Correction to A. E. Green and R. S. Rivlin, The mechanics of non-linear materials with memory, vol. I, 1-21 (1957)). Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 5, 470 (англ.)
См. РЖМат, 1958, 7789.

2759. Теория гравитации и электромагнетизма. Хямеен-Анттила (Eine Theorie der Gravitation und des Elektromagnetismus. Hämeen-Anttila K. A. Comment. phys.-math. Soc. scient. fennica, 1957, **20**, № 4, 50 S.) (нем.)

Закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона в электростатике имеют одинаковую математическую структуру. Это наводит на мысль искать объединяющую теорию, что и было в свое время предпринято, в частности, Лоренцем. Автор поставил себе задачу построить единую теорию поля, основанную на некоторых выводах

специальной теории относительности. Вначале анализируется уравнение движения при одновременном действии гравитационного и электрического полей, а затем это уравнение записывается в общем лоренц-ковариантном виде. С этой целью вводится "вектор заряда" e, имеющий три пространственных проекции и гравитационный заряд, имеющий смысл скаляра m, так что вводится четырехмерный заряд (e, m). Вводится также система потенциалов

$$A = \{A_{ik}\},\ B = \{B_i\},\ \varphi = \{\varphi_i\},\ \psi$$

($i, k = 1, 2, 3$) и закон движения представляется в виде

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}}\frac{dR}{dt}\right) = \frac{1}{c}\frac{dR}{dt}\left\{(\operatorname{grad} A)\,\mathrm{e} - [(\operatorname{grad} A)\,\mathrm{e}]^*\right\} + \left(\frac{1}{c}\frac{dA}{dt} + \operatorname{grad}\varphi\right)\mathrm{e} + \frac{m}{c}\frac{dR}{dt}\left\{\operatorname{grad} B - (\operatorname{grad} B)^*\right\} + m\left(\frac{1}{c}\frac{dB}{dt} + \operatorname{grad}\psi\right).$$

Для потенциалов получена система волновых уравнений. Показано, что в случае медленных движений система уравнений автора переходит в систему классических уравнений Максвелла и Пуассона. При этом тензон A переходит в векторный потенциал магнитного поля, вектор φ переходит в скалярный потенциал электрического поля, ψ соответствует гравитационному потенциалу, а вектор B обращается в нуль. Таким образом, автор предлагает определять электромагнитное поле в общем релятивистском случае тензором-потенциалом A, вектором-потенциалом φ и постоянным вектором зарядов e, а гравитационное поле — вектором-потенциалом B, скалярным потенциалом ψ и постоянным скалярным зарядом m. В качестве приложения развиваемой теории рассматривается задача одного тела в центральном поле. Уравнения движения допускают интегралы, на основании которых устанавливается эффект вращения перигелия как в случае электрона, так и в случае планеты. Элементы орбиты, полученные по теории автора, сравниваются с элементами классической теории. Все изложение ведется в тензорном виде. Библ. 12 назв. И. С. Аржаных

2760. Сверхпроводящий эллиптический цилиндр в поперечном магнитном поле. Шуберт, Шмаух (Der supraleitende elliptische Zylinder im transversalen Magnetfeld. Schubert G. U., Schmauch H.), Z. Phys., 1958, 151, № 4, 396—407 (нем.)

Рассматривается сверхпроводящий эллиптический цилиндр с полуосями a и b, помещенный в однородное магнитное поле, вектор напряженности которого лежит в плоскости поперечного сечения цилиндра. По теории Лондона рассчитывается распределение магнитного поля и тока в цилиндре.

Вне цилиндра вводится потенциал магнитного поля Φ

$$H = -\operatorname{grad}\Phi,$$

удовлетворяющий уравнению $\Delta\Phi = 0$ и условию на бесконечности

$$\Phi \to -H_0(x\cos\Theta + y\sin\Theta) \text{ при } \sqrt{x^2+y^2} \to \infty,$$

где Θ — угол, который внешнее магнитное поле составляет с осью x.

Внутри цилиндра:

$$H = -c\lambda\operatorname{rot} j;$$

здесь λ — константа Лондона, j — плотность тока. В данном случае отлична от нуля лишь одна компонента вектора j, $j_z = \psi$, причем

$$\Delta\psi - \beta^2\psi = 0,\quad \beta = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

На границе цилиндра магнитное поле должно быть непрерывным.

Поставленная задача рассматривается в случаях $\Theta = \pi/2$ и $\Theta = 0$. Решение задачи в общем случае может быть получено отсюда с помощью суперпозиции. Функции Φ и ψ разлагаются в ряды по собственным функциям эллиптического цилиндра. Условия сопряжения на поверхности цилиндра, записанные в эллиптических координатах:

$$\left[\frac{\partial\Phi}{c\xi} - c\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]_{\xi=\xi_0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + c\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]_{\xi=\xi_0} = 0,$$

приводят к бесконечной системе уравнений относительно коэффициентов разложения a_{2m+1} и b_{2m+1}, которая после исключения a_{2m+1}, в случае $\Theta = \pi/2$ принимает вид:

$$b_{2n+1}Ce'_{2n+1}(\xi_0, -q) = \frac{h}{c\lambda}H_0 e^{\xi_0}(-1)^n B_1^{2n+1}(q) - \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[(-1)^{n+\mu}b_{2\mu+1}Ce_{2\mu+1}(\xi_0, -q)(2\nu+1)\times B_{2\nu+1}^{2n+1}(q)\,B_{2\nu+1}^{2\mu+1}(q)\Big].$$

Здесь $Ce_{2n+1}(\xi, -q)$ — функция Матье; $q = \left(\frac{\beta h}{2}\right)^2$ — безразмерный параметр; $h = \sqrt{a^2-b^2}$; $(-1)^{\nu+\mu}B_{2\mu+1}^{2\nu+1}(q)$ — коэффициенты Фурье функции Матье $Ce_{2\nu+1}(\eta, -q)$.

Предполагая далее, что $q \ll 1$ (h мало), и проводя разложение по степеням q, автор решает полученную систему и находит явные выражения для H и j с точностью до членов $O(q^2)$.

Случай $\Theta = 0$ исследуется аналогично.

Д. П. Костомаров

2761. О затухании в круглых волноводах с поглощающими стенками. Каприоли (Sulla attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti. Caprioli Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 526—534 (итал.; рез. англ.)

Рассматриваются нормальные волны волновода с хорошо проводящими стенками (на стенках справедливо граничное условие $\mathbf{E} = z[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]$). Математическая задача заключается в определении собственных значений уравнения $\Delta u + h^2 u = 0$ внутри круга радиуса a с несамосопряженными граничными условиями третьего рода, сводящаяся к отысканию корней трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix} h_n^2 Z J_n(h_n a) - i\omega\mu h_n J_n'(h_n a) - n\frac{i\omega\alpha_n}{a}J_n(h_n a) & \\ -n\frac{i\omega\alpha_n}{a}Z J_n(h_n a)\,h_n^2 j_n(h_n a) - i\omega\varepsilon h_n Z J_n'(h_n a) & \end{vmatrix} = 0$$

ω, μ, ε — постоянные, $\alpha_n^2 = \omega^2\varepsilon\mu - h_n^2$.

Эта задача решается методом последовательных приближений. Исследуется физический смысл полученных результатов. М. А. Гинцбург

2762. Средняя скорость потока энергии в поглощающих кристаллах. Цуффи (Sulla velocità media dell'

energia nei cristalli assorbenti. Zuffi Lina), Boll. Unione mat. ital., 1958, 13, № 1, 126—127 (итал.; рез. англ.)

Доказывается следующая теорема: В анизотропной проводящей среде фазовая скорость численно равна составляющей в направлении распространения волны вектора средней скорости потока энергии. М. А. Гинцбург

2763. **О плоских магнитогидродинамических волнах.** Крупи (Sulle onde piane magneto-idrodinamiche. Crupi Giovanni), Boll. Unione mat ital., 1957, 12, № 3, 439—442 (итал.; рез. англ.)

Показывается, что уравнения магнитной гидродинамики для проводящей среды (совокупность уравнений Эйлера и уравнений электродинамики движущихся сред, уравнений Максвелла-Минковского) допускают (с точностью до членов 1-го порядка относительно $\beta = v/c$) решение в виде плоских незатухающих волн. Скорость волны при этом равна скорости электромагнитных волн в покоящемся диэлектрике с параметрами проводящей жидкости ε и μ, а магнитное поле должно удовлетворять условию

$$B_0^2 = c^2 \frac{\mu}{\varepsilon\mu - 1}\rho,$$

где B_0 — продольная компонента магнитной индукции, ρ — плотность проводящей жидкости. М. А. Гинцбург

2764. **Задача типа Стефана для цилиндра.** Мура, Киносита (Stefan like problem of a cylinder. Mura Toshio, Kinosita Nobuo. Proc. 4th Japan Nat Congr. Appl. Mech., 1954. Tokyo, Sci. Council Japan, 1955, 345—348) (англ.)

Рассматривается задача о времени охлаждения цилиндрической железной отливки. В безразмерных координатах задача заключается в определении функции $\theta(x, \tau)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности

1) $\theta_{RR} + \frac{1}{R}\theta_R = \theta_\tau$, $\bar{R}(\tau) < R < 1$,

краевым условиям

2) $\theta = 0$ при $R = 1$,

3) $\theta = 1$ при $R = \bar{R}(\tau)$,

4) $\theta_R = \mu \bar{R}_\tau$ при $R = \bar{R}(\tau)$

и начальным условиям

5) $\bar{R}(\tau) = 1$ при $\tau = 0$,

6) $\theta = 1$ при $\tau = 0$.

Для нахождения решения вблизи боковой поверхности цилиндра автор применяет метод преобразований Лапласа. Для исследования решения в окрестности центра цилиндра применяются методы конформного преобразования. Оба решения представлены графически и таблично. C. G. Maple. Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 374—375.

2765. **Одномерный процесс диффузии с коэффициентом диффузии, являющимся нелинейной функцией концентрации.** Парсонс (One-dimensional diffusion, with the diffusion coefficient a nonlinear function of concentration. Parsons D. H.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 2, 246—251 (англ.)

Рассматривается одномерная диффузионная задача в предположении, что в начальный момент времени $t = 0$ концентрация $c = c_1$ при $x < 0$, $c = c_2$ при $x > 0$ $(c_1 > c_2)$, а коэффициент диффузии D зависит от концентрации, причем эта зависимость характеризуется одной из следующих двух формул:

$$\left(\frac{D}{D^*}\right)^n = 1 + \frac{1-b^n}{1+b^n} \cdot \frac{{}^1/_2(c_1+c_2) - c}{{}^1/_2(c_1 - c_2)} \quad (n \neq 0), \qquad (1)$$

$$\frac{D}{D^*} = b^{\frac{c - {}^1/_2(c_1+c_2)}{c_1 - c_2}} \qquad (2)$$

где D^* и b — постоянные. Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$2\frac{d}{dy}\left(D\frac{dc}{dy}\right) + y\frac{dc}{dy} = 0$$

при краевых условиях

$$c \to c_1 \text{ при } y \to -\infty,$$
$$c \to c_2 \text{ при } y \to +\infty,$$

где $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

Производя в исходном уравнении замену переменных

$$\left\{1 + \frac{1-b^n}{1+b^n} \cdot \frac{\frac{1}{2}(c_1+c_2) - c}{\frac{1}{2}(c_1 - c_2)}\right\}^{1/n} = \left\{\frac{2}{1+b^n}\right\}^{1/n} e^{-2w},$$

$$y = (2D^*)^{1/2}\left\{\frac{2}{1+b^n}\right\}^{1/2n} u e^{-w}$$

при условии (1), или

$$b^{\frac{c - \frac{1}{2}(c_1+c_2)}{c_1 - c_2}} = b^{-1/2} e^{-2w},$$

$$y = (2D^*)^{1/2} b^{-1/4} u e^{-w}$$

при условии (2), получим краевую задачу для уравнения

$$\frac{d^2w}{du^2} + u\frac{dw}{du} - 2(n + u^2)\left(\frac{dw}{du}\right)^2 +$$
$$+ u(1 + 2n + u^2)\left(\frac{dw}{du}\right)^3 = 0 \qquad (3)$$
$$w \to -\frac{1}{2}\log b \text{ при } u \to -\infty,$$
$$w \to 0 \quad \text{при } u \to +\infty,$$

причем во втором случае в уравнении (3) следует положить $n = 0$. Уравнение (3) введением новой неизвестной функции $P = -\frac{dw}{du}$ преобразуется в уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{du} + up + 2(n + u^2)p^2 + u(1 + 2n + u^2)p^3 = 0. \qquad (4)$$

Исследуются свойства решений данного уравнения. В заключение рассматривается случай $n = -1$, когда уравнение (4) интегрируется в явном виде. Д. П. Костомаров

2766. **Решение дифференциального уравнения процесса диффузии при помощи δ-функции.** Валко (Riešenie diferenciálnej rovnice difúzneho deja pomocou δ-funkcie. Valko Ladislav), Chem. zvesti., 1958, 12, № 3, 133—139 (словацк.; рез. русск., нем.)

С помощью формального применения аппарата δ-функции решается следующая задача для уравнения диффузии на полуограниченной прямой

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + c_0\delta(x - x_0)\delta(t),$$

$$c(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x}(+0, t) = 0.$$

Автор по существу пересказывает решение аналогичной задачи, приведенное в учебнике А. Н. Тихонова и А. А. Самарского (РЖМат, 1955, 3218 К). Д. П. Костомаров

2767. Распределение температуры в твердом теле с переменными термическими свойствами, нагреваемом движущимся источником тепла. Грош, Трейбант, Хокинс (Temperature distribution in solids of variable thermal properties heated by moving heat sources. Grosh R. J., Trabant E. A., Hawkins G. A.), Quart. Appl. Math., 1955, 13, № 1, 161—167 (англ.)

В предположении, что коэффициент теплопроводности и произведение плотности и удельной теплоемкости являются линейными функциями температуры, находится распределение температуры в бесконечном стержне с движущимся источником тепла. Этот же метод применим для решения соответствующих двух- и трехмерных задач. Устанавливается, что указанный метод остается в силе, если термические свойства тела меняются по параболическому закону, а также и при других формах зависимости от температуры, при условии, что коэффициент температуропроводности остается постоянным. C. G. Maple

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 3, 271.

2768. О решении одной задачи теплопроводности. Седельников Т. Х., Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 6, 766—767

2769. Решения уравнения Лапласа в области, внешней к сфероиду. Бернаскони (La risoluzione dell' equazione di Laplace nel campo esterno a uno sferoide. Bernasconi Carlo), Geofis. pura e appl., 1958, 39, № 1, 26—34 (итал.; рез. англ.)

Полагая $x = \sin\varphi$, автор записывает уравнение меридиана геоида вращения в виде

$$\rho_\sigma = a(1 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4 - \ldots - \alpha_n x^{2n}),$$

где ρ, φ, λ — сферические координаты, а значок σ означает, что рассматривается значение соответствующей величины на геоиде. Ньютонов потенциал V удовлетворяет уравнению Лапласа вне геоида, а на его поверхности

$$V_\sigma = c - \frac{w^2}{2}\rho_\sigma^2\cos^2\varphi =$$

$$= c - \frac{w^2}{2}a^2\left[1 - (1 + 2\alpha_1)x^2 + (\alpha_1^2 + 2\alpha_1 - 2\alpha_2)x^4 + \ldots\right], \quad (1)$$

где c — постоянная, а w — скорость вращения геоида вокруг его оси. Автор ищет V в виде

$$V = \frac{Q_1(\varphi)}{\rho} + \frac{Q_3(\varphi)}{\rho^3} + \ldots + \frac{Q_{2s-1}(\varphi)}{\rho^{2s-1}},$$

где

$$Q_n(\varphi) = q_{n0} + q_{n1}x^2 + \ldots + q_{ni}x^{2i},$$

и находит для постоянных коэффициентов q_{nh} рекуррентные соотношения, при помощи которых определяет Q_n. Входящие в полученные формулы постоянные определяются через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ из условия (1) ($V = V_\sigma$ при $\rho = \rho_\sigma$). В. И. Левин

2770. Об одном методе нахождения асимптотических фаз. Тиц (About a certain method for finding the asymptotic phases. Tietz T.), Nuovo cimento, 1958, 8, № 5, 765—766 (англ.)

Рассматривается волновое уравнение для радиальных функций в задаче рассеивания

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) + \left[k^2 - \frac{C}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r)\right]R_l = 0$$

при наличии кулоновского члена $\frac{C}{r}$. Предполагается, что потенциальная энергия на бесконечности убывает быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а в нуле имеет особенность не более чем $\frac{1}{r^p}$, $1 \leqslant p < 2$.

Для ограниченного в нуле решения уравнения (1) при больших значениях r справедлива следующая асимптотическая формула:

$$R_l(r) \to (kr)^{-1}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_{c,l} + \eta_{u,l} - \alpha\ln 2kr\right),$$

здесь $\eta_{c,l} = \Gamma(l + i + \alpha i)$, $\alpha = C/2k$, $\eta_{u,l}$ — подлежащая определению асимптотическая фаза.

Пусть при $r > r_0$ $|u(r)| << \frac{|c|}{r}$, тогда в данной области

$$R_l = C_{1_l}\,{}_1R_l + C_{2_l}\,{}_2R_l,$$

где ${}_1R_l$ и ${}_2R_l$ — известные решения уравнения (1) при $u(x) \equiv 0$. Если найден корень функции $R_l - r_0$, удовлетворяющий условию $r_0 > r_1$, то для определения фазы получаем

$$\operatorname{tg}\eta_{u,l} = -\frac{{}_1R_l(r_0)}{{}_2R_l(r_0)},$$

Д. П. Костомаров

2771. Об одной задаче для некоторого класса дифференциальных уравнений второго порядка. Дёйвестейн (Enige aspecten van een bepaald type tweede orde differentiaalvergelijkingen. Duijvestijn A. J. W.), Rapp. Math. centrum, 1954, № 11, 1—13 (гол.)

Рассматривается краевая задача для уравнения Шрёдингера.

2772 Д. Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек. Воровичи И. И. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

2773 Д. О решении плоской задачи динамической теории упругости для полупространства. Бородачев Н. М. Автореф. дисс. канд. техн. н., Куйбышевск. индустр. ин-т, Куйбышев, 1958

См. также: 2149, 2781, 2789, 2790, 2830, 2833, 2862, 2885, 3195, 3230—3240

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

2774. Поправка. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 4, 232

См. РЖМат, 1959, 1505

2775. Интегральные уравнения с однопарным кососимметрическим ядром. Калафати П. Д., Тр. Николаевского кораблестроит. ин-та, 1956, вып. 8, 246—255

Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\int_\alpha^\beta K(x, s)\varphi(s)\,ds, \quad (1)$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} a(x)c(s), & \text{если } x < s \\ -a(s)c(x), & \text{если } x > s \end{cases} \quad (\alpha \leqslant x, s \leqslant \beta). \quad (2)$$

В предположении, что a, c непрерывны на $[\alpha, \beta]$, получены следующие факты:

1) Определитель Фредгольма $D(\lambda)$ уравнения (1) дается представлением

$$D(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \tag{3}$$

где λ_k — характеристические числа уравнения (1), причем все λ_k чисто мнимые и простые.

2) Если $a > 0$, $c > 0$, то фундаментальные решения однородного уравнения с ядром $K(x, s)$ образуют полную в L_2 систему.

3) Каждое фундаментальное решение U_k, λ_k краевой задачи

$$u'(x) = \lambda^2 c^2 v;\ v' = a^2 u \tag{4}$$

$$u'(\alpha) = u(\beta) = 0 \tag{5}$$

является фундаментальным решением однородного уравнения с ядром $K(x, s)$.

4) Каждое фундаментальное решение U_k, λ_k краевой задачи

$$u' = \lambda^2 a^2 v;\ v' = c^2 u; \tag{6}$$

$$u(\alpha) = u'(\beta) = 0 \tag{7}$$

является фундаментальным решением однородного уравнения с ядром $K(x, s)$.

В работе также показано, что резольвента и минор Фредгольма уравнения (1) могут быть выписаны в явной форме, если известны решения $u(x, \lambda)$ систем (4), (6) при граничных условиях $u(0, \lambda) = 1$; $u'(0, \lambda) = 0$. Кроме того, в работе приведено в явной форме решение уравнения (1), если $a \equiv c$. Для этого случая даны также некоторые соображения об асимптотике λ_k. И. И. Ворович

2776. Приближенные решения некоторого класса интегральных уравнений. Латтер (Approximate solutions for a class of integral equations. Latter Richard), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 1, 21—31 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^a k(x - y) f(y)\, dy,\ 0 < x < a,$$

где ядро k вещественно и симметрично и все функции принадлежат L_2. По аналогии с известным методом Хопфа-Винера автор доопределяет функции на всей оси x и применяет преобразование Фурье. В результате получена пара интегральных уравнений с мероморфными функциями под знаками интегралов. Вычисляя эти интегралы с помощью вычетов и отбрасывая вычеты в полюсах, лежащих вне некоторой полосы $-\beta < \operatorname{Im} w < \alpha$, автор приходит к системе линейных алгебраических уравнений, из которой находится приближенное решение и приближенные величины собственных значений. Указывается, что ошибка приближения решения меньше

$$Ae^{-(a-x)\alpha} + Be^{-\beta x},$$

где A и B — постоянные. В случае, когда преобразование Фурье ядра — рациональная функция, указанный метод позволяет получить точное решение. Приведены примеры: $k = e^{-|x|}$ — точное решение; $k = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ — приближенное вычисление наименьшего собственного значения. Ю. И. Черский

2777. О неразложимых векторах некоторых конусов. Генчев Т. (За неразложимите вектори на някои конуси. Генчев Т.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1958, **3**, № 1, 69—88 (болг.; рез. русск., нем.)

Вводится конус L вещественных симметричных положительно определенных ядер $K(x, t)$, непрерывных в квадрате $\Delta: a \leqslant x, t \leqslant B$. В L вводится норма

$$P(K) = \int_a^b K(x, x)\, dx.$$

Ядро $K(x, t)$ называется разложимым, если $K(x, t) = K_1(x, t) + K_2(x, t)$; $K_1, K_2 \in L$, причем K_1 и K_2 линейно независимы. Доказывается, что ядро $K(x, t)$ неразложимо тогда и только тогда, когда $K(x, t) = \varphi(x)\varphi(t)$, где $\varphi(x)$ непрерывна в $[a, b]$. В L вводится так называемая координатная система функционалов

$$\Phi_{\mu\nu}(K) = \iint_{\Delta} K(x, t)\, \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(t)\, dx\, dt;\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}$ — некоторая полная ортонормированная в $[a, b]$ система непрерывных функций.

Вводится конус L_1 вещественных, квадратично суммируемых положительно определенных ядер, которые могут быть получены как сверхслабые пределы последовательностей $K_n(x, t) \in L$ с ограниченными нормами; последовательность $\{K_n\}$ сверхслабо сходится к K, если $\Phi_{\mu\nu}(K_n - K) \to 0$; $\mu, \nu = 1, 2, \ldots$ Доказывается, что в конусе L_1 ядро неразложимо тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\psi(x)\psi(t)$, где $\psi(x)$ квадратично суммируема в (a, b).

Пусть $K \in L_1$, и пусть $S(K)$ — множество последовательностей $\{K_n\}$, $K_n \in L$, которые сверхслабо сходятся к K и для которых существует $\lim_{n\to\infty} P(K_n)$. Норма в L_1 определяется как функционал

$$P_1(K) = \operatorname*{Inf}_{\{K_n\} \in S(K)} \lim_{n\to\infty} P(K_n)$$

доказывается, что этот функционал выпуклый.

Доказываются следующие теоремы: 1) любое ядро $K \in L_1$ есть предел, в смысле сходимости в среднем, последовательности вырожденных ядер $K_n \in L$, причем нормы $P(K_n)$ ограничены в совокупности; 2) для того чтобы симметричное, положительно определенное, суммируемое с квадратом ядро $K(x, t)$ принадлежало конусу L_1, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной ортонормированной последовательности $\{\psi_n\}$ сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{\Delta} K(x, t)\, \psi_n(x)\, \psi_n(t)\, dx dt;$$

3) сумма последнего ряда равна $P_1(K)$. С. Г. Михлин

2778. Решение парных интегральных уравнений упругого равновесия. Фредерикс (Solution of a pair of integral equations from elastostatics. Fredricks R. W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 4, 309—312 (англ.)

Рассматриваются уравнения

$$\begin{cases} \int_0^\infty \xi^{-1} P(\xi) \cos(\xi x)\, d\xi = g(x), & 0 \leqslant x < a; \\ \int_0^\infty P(\xi) \cos(\xi x)\, d\xi = 0, & a < x \leqslant \infty; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \xi^{-1} Q(\xi) \sin(\xi x)\, d\xi = h(x), & 0 \leqslant x < a; \\ \int_0^\infty Q(\xi) \sin(\xi x)\, d\xi = 0, & a < x \leqslant \infty; \end{cases} \tag{2}$$

где $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ — неизвестные функции. Предполагается, что известные функции $h(x)$ и $g(x)$ представимы следующими рядами Фурье:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(n\pi x/a);\quad h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(n\pi x/a).$$

Используя разложения

$$\cos(n\pi x/a)=J_0(n\pi)+2\sum_{q=1}^{\infty}J_{2q}(n\pi)\cos(2q\arcsin(x/a)),$$

$$\sin(n\pi x/a)=2\sum_{q=0}^{\infty}J_{2q+1}(n\pi)\sin[(2q+1)\arcsin(x/a)],$$

автор получает решения в виде абсолютно сходящихся рядов по бесселевым функциям:

$$P(\xi)=a\xi J_1(a\xi)\sum_{n=0}^{\infty}C_nJ_0(n\pi)+4\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}qC_nJ_{2q}(a\xi),$$

$$Q(\xi)=2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}(2q+1)D_nJ_{q+1}(n\pi)J_{2q+1}(a\xi).$$

Ю. К. Ландо

2779. В редакцию УМН. Бицадзе А. В., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 4, 232
См. РЖМат, 1958, 5796.

2780. Об исследовании решения одного типа нелинейного интегрального уравнения. Юсиф-заде (Бир. синишт хәтти олмаян интеграл тәнликләр һаггында. Юсифзадә Ч. Г.), Элми әсәрләр. Азәрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-т, 1958, № 2, 11—19 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается уравнение вида

$$U(x)=\sum_{j=0}^{m}\lambda^j\int_0^1K_j(x,s)f_j(s,U(s))\,ds.$$

Методом вырожденных ядер, используя принцип неподвижной точки, доказывается теорема:

1) $K_j(x,s)$, $j=\overline{0,m}$ — регулярные ядра при $0\leqslant x,s\leqslant 1$, $\{\varphi_{ij}(x)\}$, $\{\Psi_{ij}(s)\}$ — собственные функции этих ядер, а $\lambda_{0i},\ldots,\lambda_{mi}$ — соответствующие собственные числа, $\lambda_{1j}\neq 0$ — наименьшее собственное число.

2) $f_j(s,u(s))$ непрерывные при $0\leqslant s\leqslant 1$ и удовлетворяют условию

$$f_j^2(s,u(s))\leqslant M_j^2|u|^2+\sum_{j=2}^{p}N_{ij}^2(s)\,|u|^{2\alpha_j}+L_j^2(s),$$

где M_j^2 — постоянные числа, $N_{ij}^2(s)$ и $L_j(s)$ таковы, что

$$\int_0^1L_j^2(s)\,ds=L_j^2\left\{\int_0^1|N_{ij}(s)|^{2/(1-\alpha_i)}\,ds\right\}^{1-\alpha_i}=N_{ij}^2.$$

3) $$R^2\sum_{j=0}^{m}\frac{M_j^2}{\lambda_{1j}^2}\sum_{k=0}^{m}\lambda^{2k}+R^{2\alpha}\sum_{j=0}^{m}\frac{\left(\sum_{k=0}^{m}\lambda^{2k}\right)^{\alpha}}{\lambda_{1j}^2}\cdot\sum_{i=2}^{p}N_{ij}^2+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\frac{L_j^2}{\lambda_{1j}}\leqslant R^2.$$

Если удовлетворяются все эти условия, то уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение.

Н. И. Мозжерова

2781. О некоторых новых граничных задачах для определения классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Василаке (Asupra unor noi probleme la limita pentru anumite clase de ecuatii integrodiferentiale sau cu derivate partiale. Vasilache Sergiu), Studii si cercetări mat., 1955, 6, № 1-2, 55—78 (рум.; рез. русск., франц.)

В работе исследуются интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\sum_{0}^{m}\sum_{0}^{n}{}_pH_{pq}(x,y)\,\varphi_{x^py^q}^{(p+q)}(x,y)=f(x,y)+$$

$$+\lambda\int_a^x\int_b^y\sum_{0}^{m}\sum_{0}^{n}{}_pK_{pq}(x,y,u,v)\,\varphi_{u^pv^q}^{(p+q)}(u,v)\,du\,dv,\qquad(1)$$

где функции H_{pq}, f, k непрерывные и необходимое число раз дифференцируемые в области D, определенной неравенствами $a\leqslant u\leqslant x\leqslant a_1$, $b\leqslant v\leqslant y\leqslant b_1$.

Под $\varphi_{x^py^q}^{(p+q)}$ понимается частная производная неизвестной функции φ p-го порядка по x и q-го порядка по y. Ищутся решения уравнения (1) при граничных условиях: $(\varphi_{x^s}^{(s)}(x,y))_{x=a}$ для $(s=0,1,\ldots,n-1)$ заданы на отрезке $b\leqslant y\leqslant b_1$, $x=a$ и m раз дифференцируемые по y.

Вводится обозначение $\varphi_{x^n}^{(n)}(x,y)=\varphi(x,y)$.

Задаются также функции

$$\left(\varphi_{y^r}^{r}(x,y)\right)_{y=b}=\left(\varphi_{x^ny^r}^{(n+r)}(x,y)\right)_{y=b}\quad\text{для } r=0,1,\ldots,m-1$$

на отрезке $a\leqslant u\leqslant x\leqslant a_1$, $y=b$.

В этих условиях уравнение (1) сводится к интегральному уравнению

$$H_{um}(x,y)\,\Phi(x,y)+$$

$$+\int_a^x\sum_{0}^{n-1}{}_pH_{pm}(x,y)\,\frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\,\Phi(u,y)\,du+$$

$$+\int_b^y\sum_{0}^{m-1}{}_qH_{uq}(x,y)\,\frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\,\Phi(x,v)\,dv+$$

$$+\int_a^x\int_b^y\sum_{0}^{m-1}{}_q\sum_{0}^{n-1}{}_pH_{pq}(x,y)\,\frac{(x-u)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\,\frac{(y-v)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}\times$$

$$\times\Phi(u,v)\,du\,dv=f(x,y)-F(x,y)+\lambda H(x,y)+$$

$$+\lambda\int_a^x\int_b^y[K_{um}(x,y,u,v)+P(x,y,u,v)]\,\Phi(u,v)\,du\,dv,$$

где $\Phi(u,v)=\varphi_{u^nv^m}^{(n+m)}(u,v)$, а остальные функции, которые входят в уравнение, известны из условий задачи.

С помощью интегрального уравнения доказывается, что если $H_{um}(x,y)\neq 0$, уравнение (1) при упомянутых выше граничных условиях допускает в качестве решения целую функцию от λ. Если $H_{um}(x,y)\equiv 0$, уравнение разрешимо только в случае, если

$$H_{nq}(x,y)\equiv 0\quad(q=0,1,\ldots,m-1),$$
$$H_{pm}(x,y)\equiv 0\quad(p=0,1,\ldots,n-1).$$

Эти результаты применяются к различным типам интегро-дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных и обобщаются на случай n независимых переменных.

Упомянутые выше граничные условия эквивалентны условиям Коши относительно каждой независимой переменной, а именно, автор показывает, что они могут быть представлены в виде

$$\left(\varphi_{x^r}^{(r)}(x, y)\right)_{x=a} = p_r(y) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\left(\varphi_{y^k}^{(k)}(x, y)\right)_{y=b} = r_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Эти результаты распространены автором на уравнения произвольного конечного порядка с конечным числом независимых переменных. M. Nedelcu

2782. О нелинейном интегро-дифференциальном уравнении теплопередачи при теплопроводности и теплоизлучении. Бауман (Eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung der Wärmeübertragung bei Wärmeleitung und -strahlung. Baumann Volker), Math. Z., 1956, 64, № 3, 353—384 (нем.)

При решении одномерной стационарной задачи распространения тепла с излучением встречается следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$E_g \frac{1}{2\pi n^2} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\,\mathrm{sign}(x-t)\,K_1(k(\lambda)\,|x-t|)\,E(\lambda, T(t))\,dt\,d\lambda -$$

$$- \int_0^\infty \left\{K_2(k(\lambda)x)\,E(\lambda, T_0) - K_2(k(\lambda)(h-x)) \times \right.$$

$$\left. \times E(\lambda, T_h)\right\} d\lambda - \frac{\varkappa}{2\pi n^2} T'(x), \qquad (1)$$

где T_x и E_g (постоянная) являются неизвестными, $k(\lambda)$ — известная неотрицательная функция, непрерывная (или кусочно непрерывная) для $0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$, $T_0 \geqslant 0$, $T_h \geqslant 0$, $\varkappa \geqslant 0$, $n > 0$ и $h > 0$ — действительные постоянные;

$$K_0(t) = E_1(-t) = -\int_t^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds, \; t > 0;$$

$$K_i(t) = -\int_t^\infty K_{i-1}(s)\,ds, \quad i = 1, 2, \ldots, t \geqslant 0;$$

$$E(\lambda, T) = \begin{cases} 2c_1 \lambda^{-5} (e^{c_2/\lambda T} - 1)^{-1}, & T \neq 0, \; \lambda \neq 0 \\ 0, & T = 0 \text{ или } \lambda = 0 \end{cases}$$

с действительными постоянными c_1 и c_2. Неизвестная функция $T(x)$ ищется в классе непрерывных и неотрицательных для $0 \leqslant x \leqslant h$ и дифференцируемых для $\varkappa > 0$ функций. Для заданного E_g предполагаются справедливыми соотношения: $T(0) = R_0 \geqslant 0$ и $T(h) = R_h \geqslant 0$.

Вспоминая несколько основных свойств функций $K_i(t)$ и $E(\lambda, T)$ и применяя классический метод решения к уравнению, полученному из (1) дифференцированием по x, получаем теорему единственности для решения уравнения (1). Довольно громоздкое доказательство теоремы единственности для случая $\varkappa > 0$ основано на известной теореме о неподвижной точке (Шаудера), которая применяется к специально сконструированному функциональному пространству. В случае $\varkappa = 0$ уравнение (1) сводится к нелинейному интегральному уравнению. G. Sestini.

Перевод из Zbl. Math., 1957, **70**, № 1, 104 — 105.

2783 Д. Интегральные уравнения равновесия тонких упругих цилиндрических оболочек. Ремизова Н. И. Автореф. дисс. канд. физ-матем. н., Киевск. политехн. ин-т, Киев, 1958

2784 Д. Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки. Говорухина А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск.-н/Д. ун-т, Ростов-на-Дону, 1958

См. также: 2618, 2622, 2634, 2663, 2668, 2696

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

2785. Теорема Морри о представлении для поверхностей в метрическом пространстве. Силверман (Morrey's representation theorem for surfaces in metric spaces. Silverman E.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1677—1690 (англ.)

Теорему Морри (Morrey C. B., Amer. J. Math., 1935, **57**) об аналитическом представлении для поверхностей с конечной лебеговой площадью, которая часто используется при исследовании двумерных задач вариационного исчисления, автор доказывает методом Чезари для случая поверхностей в метрическом пространстве. Р. С. Гутер

2786. О сходимости методов типа Галеркина. Ляшко А. Д., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 2, 242—244

Рассматривается общая схема применения прямых методов типа Галеркина (метод Галеркина-Петрова) для уравнения

$$Au + \lambda Ku = v, \qquad (1)$$

где операторы A и K действуют из гильбертова пространства X в пространство Y; оператор A имеет ограниченный обратный оператор.

Если $\{\varphi_i\}$ — полная ортонормированная система в X, а $\{\psi_i\}$ — система элементов из Y, удовлетворяющая при любом n условию

$$\left| \begin{matrix} (A\varphi_1, \psi_1) \ldots (A\varphi_1, \psi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\varphi_n, \psi_1) \ldots (A\varphi_n, \psi_n) \end{matrix} \right| \neq 0, \qquad (2)$$

то приближенное решение (1) ищется в виде $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$, где a_k определяются из системы

$$(Au_n + \lambda Ku_n - v, \psi_m) = 0; \quad (m = 1, \ldots, n). \qquad (3)$$

На оператор K накладывается условие гладкости: для любого $x \in X$ найдутся такие α_k, что

$$\| A^{-1}Kx - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \| \leqslant \varepsilon_n \| x \|, \qquad (4)$$

причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказывается, что если оператор $A + \lambda K$ имеет обратный и выполнены условия (2) и (4), то начиная с некоторого n, уравнения (3) разрешимы и u_n сильно сходятся к решению (1). В качестве частного случая получаются прежние результаты автора (РЖМат, 1958, 8926).

Формулы (4) и (7) работы содержат опечатки.

Е. Д. Гарбер

2787. Определение оптимальной линейной динамической системы по критерию экстремума функционала частного вида. Андреев Н. И., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 7, 615—619 (рез. англ.)

Предлагается следующий прием для отыскания экстремума функционала $I(I_1, \ldots, I_n)$, где $I_i[k(\tau)]$ — квадратичные функционалы. Необходимое условие экстремума формально совпадает с таковым для функционала $I_{II} = \sum a_i I_i$, где $a_i = \partial I / \partial I_i$.

Если можно найти аналитическое выражение экстремального элемента I_{II} в виде $k^0_{II}(a_i, \tau)$, то первая задача сводится к решению системы $a_i = f_i(a_j) \equiv \left.\frac{\partial I}{\partial I_i}\right|_{k(\tau)=k^0_{II}}$ или к минимизации $F(a_1, \ldots, a_n) = I_{II}[k^0_{II}(a_i; \tau)]$, для чего можно применять метод наискорейшего спуска. В примерах при $n = 4 - 6$ четвертое приближение давало удовлетворительный результат.

Автор не указывает на связь способа сведения задачи к функционалу I_{II} с методом неопределенных множителей Лагранжа. Две задачи: $\mathrm{extr} I$ и $\mathrm{extr} I_n$ при $I_i = I^0_i$, $i < n$, равносильны в части необходимых условий; I_{II} есть функция Лагранжа для последней. Б. А. Самокиш

2788. Конечное регулирование, запаздывание по времени, динамическое программирование. Белман (Terminal control, time lags, and dynamic programming. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 10. 927—930 (англ.)

Рассматривается задача о нахождении максимума функционала вида

$$I(v) = \int_0^T h(x)\, dG(t) + \int_0^T k(v)\, dt$$

на всех вектор-функциях $v(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$R_i(x, v) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где $x(t)$ есть n-мерный вектор, определяемый уравнением

$$\frac{dx}{dt} = g(x, v), \quad x(0) = c.$$

К задачам такого типа принадлежит, в частности, такая: минимизировать $|u(T)|$ на всех функциях, удовлетворяющих условиям $|v(t)| \leqslant k_1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\int_0^T v^2(t)\, dt \leqslant k_2$, где u и v связаны посредством линейных уравнений

$$u'' + au' + bu = v, \quad u(0) = c_1, \quad u'(0) = c_2.$$

Л. Я. Цлаф

2789. Вариационные методы в аэронавтике. Фрайс-де-Вёбеке (Méthodes variationnelles et performances optimales en aéronautique. Fraeys de Veubeke Baudouin), Bull. Soc. math. Belgique, 1956, 8, № 2, 136—157 (франц.)

Пусть M — переменная масса летающей установки, V — скорость ее центра тяжести, образующая угол θ с горизонтом, L — подъемная сила, D — сила сопротивления движению, z — высота, T — сила, движущая в направлении скорости. Предполагается, что $D = D(V, z, L^2)$ и $T = T(V, z, m)$ суть известные функции (m — расход горючего).

Уравнения движения имеют вид:

$$M\frac{dV}{dt} = T - D - Mg\sin\theta,$$

$$MV\frac{d\theta}{dt} = L - Mg\cos\theta,$$

$$\frac{dz}{dt} = V\sin\theta, \quad \frac{dM}{dt} = -m.$$

Последнее уравнение характеризует изменение массы, вызываемое потреблением горючего.

Ставятся задачи об отыскании траектории наименьшего потребления горючего, о брахистохроне и др. Указанные выше задачи решаются посредством приведения их к задаче Майера. Л. Я. Цлаф

2790. Проблема максимума дальности в однородном поле тяжести. Фраэйс-де-Вёбеке (Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme. Fraeijs de Veubeke B.), Astronaut. acta, 1958, 4, № 1, 1—14 (франц.; рез. англ., нем.)

Уравнения движения снаряда имеют вид:

$$MV^0 - (T - D - Mg\sin\theta)\, t^0 = 0,$$

$$MV\theta^0 - (L - Mg\cos\theta)\, t^0 = 0,$$

$$\frac{dM}{dt} = -m(t) \quad \text{или} \quad M(t) = M_1 - \int_0^t m(t)\, dt,$$

$$z^0 - Vt^0\sin\theta = 0, \quad x^0 - Vt^0\cos\theta = 0.$$

Здесь ось Ox горизонтальна, ось Oz имеет направление, противоположное направлению силы тяжести, σ — параметр, монотонно возрастающий в фиксированных пределах σ_1 и σ_2, $V(\sigma)$ — скорость полета, $\theta(\sigma)$ — угол вектора скорости с горизонтом, $z(\sigma)$ — высота, $x(\sigma)$ — расстояние по горизонтали, $t(\sigma)$ — время полета, M — начальная масса снаряда, T — движущая сила, направленная по касательной к траектории $T = T(m(t), V, z)$, D — сопротивление движению, принимаемое в форме $D = D_0(z, V) + L^2 D_1(z, V)$, где L — подъемная сила. Значок нуль сверху означает дифференцирование по параметру σ. Траектория изменяется в зависимости от переменной наведения L; в том случае, когда эта переменная есть известная функция параметра и других переменных, траектория вполне определена. Задача состоит в следующем: определить L как функцию указанных аргументов так, чтобы горизонтальная дальность полета снаряда была максимальной.

Эта задача является задачей Майера. Для установления характера экстремали используется достаточное условие Вейерштрасса. Л. Я. Цлаф

См. также: 2676

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

2791. Основные понятия математического анализа. Моллаков (Математики анализин эсасы душунжелери. Моллаков М.), Ылмы язгылар. Туркм. унив., Уч. зап. Туркм. ун-та, 1957, вып. 11, 253—306 (туркм.)

2792. Некоторые неравенства для монотонных последовательностей. Островский (Mathematische Miszellen. XXII. Über gewisse Ungleichungen zwischen monotonen Zahlenfolgen. Ostrowski Alexander),

Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, 57, № 2, 85—89 (нем.)

Установлена теорема: Пусть заданы две группы по n действительных чисел x_ν, y_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) и пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n;\ y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n, \quad (1)$$

$$x_{\nu+1} - x_\nu \leqslant 2\varepsilon,\ y_{\nu+1} - y_\nu \leqslant 2\varepsilon,\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \quad (2)$$

Пусть далее каждому x_ν можно поставить в соответствие некоторое y_{μ_ν} и каждому y_ν такое x_{λ_ν} так, что

$$\left| x_\nu - y_{\mu_\nu} \right| \leqslant \varepsilon,\ \left| y_\nu - x_{\lambda_\nu} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$| y_\nu - x_\nu | \leqslant u\varepsilon, \quad u = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

(т. е. u — наибольшее нечетное число $\leqslant n$), граница, указанная в (3) для u, наилучшая для каждого n.

В. В. Немыцкий

2793. О последовательностях целых сумм. Пападимитриу И., Дельтион тис матиматикис этериас, Bull. Soc. math. Grèce, 1956, **30**, № 1-3, 54—63 (греч.; рез. франц.)

Пусть дана последовательность чисел $A: u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$

Из нее составим следующие последовательности:

$$A_1: u_1 + u_2,\ u_2 + u_3, \ldots, u_\nu + u_{\nu+1}, \ldots$$

$$A_2: u_1 + 2u_2 + u_3,\ u_2 + 2u_3 + u_4, \ldots$$

$$A_\lambda: u_1 + \sum_1^\lambda u_2 + \sum_\lambda^2 u_3 + \ldots + u_{\lambda+1}, \ldots$$

Предположим, что все члены последовательности A_λ равны постоянной $c \neq 0$. В этом случае последовательность A называется аддитивной (additionnelle) порядка λ. В работе найдены формулы, которые дают общий член такой последовательности и сумму ν первых членов. Резюме автора

2794. Подразделение интервала последовательностью точек. Тулмин (Subdivision of an interval by a sequence of points. Toulmin G. H.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 158—161 (англ.)

Интервал $[0; 1]$ делится на n частичных интервалов посредством точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $a_1 = 0$, $0 \leqslant a_k < 1$. Через u_n, v_n обозначены длины наименьшего и наибольшего из частичных интервалов. Доказывается, что для любой последовательности разбиений

$$\underline{\lim}\ n u_n \leqslant 1/\lg 4,$$

причем верхняя граница $1/\lg 4$ достигается для такой последовательности разбиений, когда $a_k = \{\log_2(2k-1)\}$ ($\{x\}$ есть дробная часть x).

Доказывается также, что

$$\overline{\lim}\ n v_n \geqslant 1/\lg 2,$$

причем нижняя граница $1/\lg 2$ достигается на той же последовательности. Полученный автором результат уточняет результат Островского (РЖМат, 1958, 2701).

С. П. Пулькин

2795. Элементарное доказательство одной теоремы теории средних. Левин В. И., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 177—181

Известная формула

$$\lim_{r \to 0} A_r^{(n)}(a) = G^{(n)}(a),$$

где $A_r^{(n)}(a)$ — среднее порядка $r \neq 0$ n положительных чисел, $G^{(n)}(a)$ — их геометрическое среднее, доказывается применением правила Лопиталя и элементарно.

И. П. Макаров

2796. Об эллипсоидальных координатах. Брусенцов Н. П., Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 235—238

2797. Векторное исчисление на плоскости и комплексные числа. Грунский (Vektorrechnung in der Ebene und komplexe Analysis. Grunsky Helmut), Math.-phys. Semesterber., 1958, **6**, № 1-2, 46—56 (нем.)

Изложение известных фактов. В. В. Немыцкий

2798. О понятии кривой. Френкель, Фукс (Sur la notion de courbe. Frenkel J., Fuchs A.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 188, 125—128 (франц.)

2799. Применение неравенства Буняковского. Оу Цихуань, Шусюэ тунбао, 1955, № 11, 17 (кит.)

2800. Симметрические типы выпуклых областей. Собчик (Symmetrical types of convex regions. Sobczyk Andrew), Math. Mag., 1956, **29**, № 4, 175—192 (англ.)

Рассматриваются свойства инволюторной и вращательной симметрии выпуклых и звездообразных областей в n-мерном пространстве. Если область A выпуклая или звездообразная и начало координат Θ находится внутри или на границе области, то метрической функцией $p(x)$ этой области называется нижняя грань множества чисел $r > 0$, для которых $x \in rA$. Устанавливаются свойства метрической функции. Например, всякая положительно однородная неотрицательная функция $p(x)$, $p(\Theta) = 0$ есть метрическая функция некоторой звездообразной области; всякая положительно однородная неотрицательная функция $q(x)$ такая, что $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$, $q(\Theta) = 0$, есть метрическая функция для некоторой выпуклой области. С помощью понятия метрической функции изучаются свойства симметричных областей. Так, доказывается, что если выпуклая область C имеет инволюторную симметрию относительно каждого из дополнительных подпространств то она симметрична относительно начала. Применение свойств вращательной симметрии позволяет доказать, что если произвольная область C инвариантна относительно подынтервала вращения, то она инвариантна относительно целого интервала. Устанавливаются типы областей, инвариантных относительно некоторых групп преобразований. Устанавливаются некоторые свойства преобразований, относительно которых инвариантна данная выпуклая или звездообразная область. С. П. Пулькин

2801. Выпуклые функции. Курепа (Convex functions. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, **11**, № 2, 89—94 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Доказываются три теоремы и формулируются следствия из них. В первой теореме утверждается, что если выпуклая функция $f(x)$ ограничена на множестве T, обладающем свойством $m_i(T+T) > 0$, (символ m_i означает внутреннюю меру множества $T+T$, знак $+$ здесь означает топологическое произведение T на T), то она непрерывна. Отсюда следует: 1) теорема Серпинского о том, что выпуклая измеримая функция непрерывна, 2) если выпуклая функция $f(x)$ ограничена на множестве T меры нуль, причем $T+T$ содержит множество положительной меры, то $f(x)$ непрерывна, 3) пусть вещественная функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех x и y. Если $f(x)$ ограничена на множестве T таком, что $m_i(T+T) > 0$ го, $f(x) = \exp(cx)$. Теорема 2 в том виде, как она дана автором, неверна и противоречит следствию 3. Условие $|f(x)| = 1$ является излишним. Без этого условия утверждение теоремы является частным случаем следствия 3. В теореме 3 и ее следствиях рассматриваются метрические свойства базиса Хамеля.

При доказательстве теоремы 1 допущена ошибка, которая повторяется при доказательстве теоремы 2.

С. П. Пулькин

2802. **Об одном неравенстве для выпуклых функций.** Бранк (On an inequality for convex functions. Brunk H. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 817—824 (англ.)

Пусть $X(t)$ — не убывающая функция на $[a, b]$ и $G(t)$ измерима в смысле меры Лебега—Стилтьеса, порожденной функцией $X(t)$. Вводится функция

$$G^*(t_0) = \sup_u \inf_{v, t_0 \in \{u,v\}} \int_{\{u,v\}} G(t)\, dX(t) \Big/ \int_{\{u,v\}} dX(t).$$

Доказывается теорема: Пусть $X(t)$ — функция не убывающая и непрерывная слева (справа) на $[a, b]$, $G(t)$ — функция ограниченной вариации и непрерывная справа (слева) на $[a, b]$, причем $G(a) = 0, G(b) = 1$. Для выполнимости неравенства

$$\int_{[a,b]} f[X(t)]\, dG(t) \geqslant f\left[\int_{[a,b]} X(t)\, dG(t)\right]$$

для любой непрерывной выпуклой функции f необходимо и достаточно: $G^*(a) = 0, G^* b = 1$. Теорема является следствием аналогичной теоремы Харди, Литлвуда и Пойа. Следствием доказанной теоремы является неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} h_k f(a_k) \geqslant f\left[\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} h_k a_k\right],$$

которое имеет место для любой функции, выпуклой в $[0, b]$, $f(0) \leqslant 0$. Здесь $b \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_m \geqslant 0$, $1 \geqslant h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_m \geqslant 0$.

С. П. Пулькин

2803. **Доказательство теоремы о среднем.** Ван Чжунли (Proof of the mean value theorem. Wang Chung Lie), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 5, 362—364 (англ.)

2804. **Замечание о формуле Тейлора.** Годфруа (Remarque sur la formule de Taylor. Godefroid Michel), Enseign. math., 1958, 4, № 2, 120—123 (франц.)

Даются несколько более общие, чем обычные, формулировки для теорем Ролля, Коши и Тейлора.

В. В. Немыцкий

2805. **Об одном вронскиане.** Зейтлин (A Wronskian. Zeitlin David), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 5, 345—349 (англ.)

Считая u и v функциями от x, дифференцируемыми нужное число раз, автор устанавливает для вронскиана функций $u, uv, \ldots, uv^n$ формулу

$$W(u, uv, \ldots, uv^n) = u^{n+1}[Dv]^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{t=1}^{n} t!.$$

В частности, при $v = u$, $n = k - 1$ получается

$$W(u, u^2, \ldots, u^k) = u^k [Du]^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{t=1}^{k-1} t!.$$

С помощью этих формул вычисляется ряд вронскианов, представляющих интерес в тех или иных разделах анализа.

Г. М. Фихтенгольц

2806. **Определители, элементы которых суть интегралы.** Дьиреш (Über Determinanten, deren Elemente Integrale von Funktionen sind. Gyires B.), Acta Univ. debrecen., 1956 (1957), 3, № 2, 41—48 (нем.; рез. венг.)

Рассматриваются функциональные матрицы некоторых видов и устанавливаются соотношения для определителей, составленных из интегралов от этих матриц. Так, при обозначениях

$$A_{kl}(x) = \left\| a_{ij}^k(x) \right\| \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p_k \\ j = 1, 2, \ldots, p_l \end{pmatrix}, \quad k, l = 1, 2, \ldots, m;$$

$$A_{kl}(x_1, \ldots, x_{p_l}) = \left\| a_{ij}^k(x_j) \right\|,$$

$$A(x^1, \ldots, x^m) = \left\| A_{rs}(x^s_1, x^s_2, \ldots, x^s_{p_s}) \right\|, \quad r, s = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{m_\nu}) = \| \varphi_h(x_q) \| \begin{pmatrix} h, q = 1, 2, \ldots, m_\nu \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix};$$

$$D(x) = \| A_{kl}(x) \varphi_l(x) \|;$$

$$p_1 + \ldots + p_m = m_1 + \ldots + m_p = n,$$

имеет место равенство

$$\det \int_\alpha^\beta D(x)\, dx = \frac{1}{m_1! \ldots m_p!} \times$$

$$\times \underbrace{\int_\alpha^\beta \ldots \int_\alpha^\beta}_{n} \det A(x^1, \ldots, x^m) \prod_{\nu=1}^{p} \det \varphi(x_\nu^1, \ldots, x_\nu^{m_\nu})\, dx^1, \ldots, dx^m,$$

где $dx^\nu = dx_1^\nu \ldots dx_{p_\nu}^\nu$. При $p_1 = \ldots = p_m = 1$ это соотношение превращается в равенство Ландсберга.

Другие рассмотренные автором матрицы и определители обобщают матрицы и определители Грама, Тёплица, Ханкеля.

С. П. Пулькин

2807. **Асимптотические представления интегралов и рядов с приложениями.** Берг (Asymptotische Darstellungen für Integrale und Reihen mit Anwendungen. Berg Lothar), Math. Nachr., 1958, 17, № 1-2, 101—135 (нем.)

I. Асимптотические представления интегралов в действительной области.

Рассматриваются интегралы

$$\int e^{-g(s,t)} dt,$$

где s и t — действительные переменные, а $g(s, t)$ при $t \geqslant t_1$ имеет две непрерывные частные производные по t:

$$\partial g/\partial t = g_1; \quad \partial^2 g/\partial t^2 = g_2.$$

Доказывается теорема: Пусть существует решение $x(s)$ уравнения $g_1(s, x) = 0$ и вспомогательная функция $\omega(s)$ такая, что

$$x(s) - t_1 \geqslant \omega(s) > 0; \quad \lim_{s \to S} \{\omega^2(s)\, g_2[s, x(s)]\} = \infty, \quad (1)$$

и пусть для любой функции $\xi(s)$, удовлетворяющей условию $|\xi(s) - x(s)| \leqslant \omega(s)$, имеет место соотношение

$$g_2(s, \xi(s)) \sim g_2(s, x(s)) \text{ при } s \to S. \quad (2)$$

Тогда

$$\int_{x-\omega}^{x+\omega} e^{-g(s,t)}\, dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(s,x)}}\, e^{-g(s,x)} \quad \text{при } s \to S,$$

где $x = x(s)$, $\omega = \omega(s)$.

Если, кроме условий (1) и (2), имеют место соотношения

$$\lim_{s\to S}\left[\sqrt{g_2(s,x)}\int_a^{x-\omega} e^{-g(s,t)+g(s,x)}\,dt\right]=$$

$$=\lim_{s\to S}\left[\sqrt{g_2(s,x)}\int_{x+\omega}^{b} e^{-g(s,t)+g(s,x)}\,dt\right]=0, \qquad (3)$$

то

$$\int_a^b e^{-g(s,t)}\,dt\sim\sqrt{\frac{2\pi}{g_2(s,x)}}\,e^{-g(s,x)}, \quad \text{при } s\to S. \qquad (4)$$

Условие (3) выполняется, если $g(s,t)$ является при $t<x$ монотонно убывающей, а при $t>x$ монотонно возрастающей функцией t и если выполняются условия (1), (2) и

$$\frac{\ln(x^2 g_2(s,x))}{\omega^2 g_2(s,x)}\leqslant q<1,$$

причем a и b конечны, $a+\omega\leqslant x\leqslant b-\omega$.

Условие (3) выполняется, если при $|s-S|<\delta$ и $a\leqslant t\leqslant b$ функция $g_1(s,t)$ является монотонно возрастающей функцией t и если при этом имеют место условия (1) и (2), причем допускается случай $a=-\infty$ или $b=+\infty$.

В качестве примера приводится интеграл

$$\int_0^\infty e^{-ct^\alpha+\chi(t)}\,t^s\,dt\sim\sqrt{\frac{2\pi}{c\alpha}}\,\frac{x}{a}\,e^{-cx^\alpha+\chi(x)}\,x^s,$$

где $c>0$, $\alpha>0$, $\chi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $t\geqslant t_1$, $\chi^{(\nu)}(t)=o(t^{\alpha-\nu})|_{t\to\infty}$, а x определяется уравнением

$$c_\alpha x^\alpha-x\chi'(x)=s.$$

Теорема 4. (Преобразование Лапласа). Пусть дан интеграл

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st-f(t)}\,dt,$$

в котором функция f удовлетворяет следующим условиям:

а) $\int_0^a e^{-f(t)}\,dt$ существует;

б) $f''(x)$ непрерывна и положительна при $x\geqslant a$;

в) $\lim_{x\to\infty}f'(x)=-\sigma$;

г) Существует функция $\omega(x)$ такая, что $0<\omega(x)\leqslant x-a$; $\lim_{x\to\infty}[\omega^2 f''(x)]=\infty$ и $f''(x+\delta(x)\omega(x))\sim f''(x)$ при $x\to\infty$,

где $\delta(x)$ — любая функция, для которой $|\delta(x)|<1$.

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\int_0^\infty e^{-st-f(t)}\,dt\sim\sqrt{\frac{2\pi}{f''(x)}}\,e^{-sx-f(x)} \quad \text{при } s\to\sigma+0,$$

причем x определяется уравнением $s+f'(x)=0$.

II. Асимптотические представления бесконечных рядов.

Все предыдущие теоремы переносятся на бесконечные ряды с помощью формулы суммирования Эйлера

$$\sum_{\nu=p}^{q}F(\nu)=\int_p^q F(t)\,dt+\frac{1}{2}\,[F(p)+F(q)]+\int_p^q P(t)F'(t)\,dt,$$

причем $P(t)=t-[t]-1/2$, где $[t]$ — наибольшее целое число, содержащееся в t, откуда следует, что $|P(t)|<1/2$.

III. Асимптотические представления интегралов в комплексной области.

Пусть $g(s,t)$ — функция комплексного переменного s и действительного переменного t, имеющая при $t\geqslant t_1$ три непрерывные частные производные по t: $\partial g/\partial t=g_1$; $\partial^2 g/\partial t^2=g_2$; $\partial^3 g/\partial t^3=g_3$. Обозначив через $x(s)$ корень уравнения $g_1(s,x(s))=0$, через $s(x)$ — обратную функцию, допустим, что s стремится к S вдоль линии, на которой $x(s)$ принимает действительные значения, причем $x(S)=X$, $s(X)=S$. Предположим, что существует функция $\omega(s)$, удовлетворяющая условиям

$$x(s)-t_1\geqslant\omega(s)>0;\ \lim_{s\to S}[\omega^2 g_2(s,x(s))]=\infty; \qquad (5)$$

$$\lim_{s\to S}[\omega^3 g_3(s,\zeta(s))]=0$$

для любой функции $\zeta(s)$ такой, что

$$|x(s)-\zeta(s)|\leqslant\omega(s);\ |\arg g_2(s,\zeta(s))|\leqslant w<\pi/2 \qquad (6)$$

при $|s-S|<\delta$, причем

$$|\arg g_2(s,x(s))|\leqslant w<\pi/2. \qquad (7)$$

Если, кроме того, выполняются условия (3), то имеет место формула (4).

Переходя к случаю, когда оба аргумента функции g комплексны, заменим x на $y=xe^{i\vartheta}$, где x — действительное и положительное число; пусть при $s\to S$ точка y удаляется в бесконечность, оставаясь в угловой области $w_1\leqslant\vartheta\leqslant w_2$, где $w_1\leqslant 0\leqslant w_2$.

Доказывается следующая теорема: Пусть существует функция $\omega(s)$, для которой функция $g(s,t)=g(s,te^{i\vartheta})$ удовлетворяет условиям (5), (6), (7) и (3) равномерно относительно ϑ в промежутке $w_1\leqslant\vartheta\leqslant w_2$. Если при $s\to S$

$$\int_a^\infty e^{-g(s,t)}\,dt\sim\int_a^\infty e^{-g(s,te^{i\vartheta})+i\vartheta}\,dt$$

равномерно относительно ϑ в промежутке $w_1\leqslant\vartheta\leqslant w_2$, то формула (4), в которой x заменено комплексной переменной $y=xe^{i\vartheta}$, остается в силе и в том случае, когда $y(s)$ при $s\to S$ удаляется в бесконечность по произвольному пути, лежащему в области $w_1\leqslant\arg y\leqslant w_2$.

Ю. Л. Рабинович

2808. О приведении двойного криволинейного интеграла к двойному поверхностному. Осипов П. Н. (Про зведення подвійного криволінійного інтеграла до подвійного поверхневого. Осіпов П. М.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 5, 493—497 (укр.; рез. русск., англ.)

В различных вопросах теории электромагнетизма встречаются двойные криволинейные интегралы по двум замкнутым контурам. Формулу преобразования подобного интеграла от скалярной функции указал А. Ю. Ишлинский (Докл. АН УРСР, 1951, 6, 397). Автор, пользуясь диадным исчислением, устанавливает следующие формулы преобразования двойных криволинейных интегралов от вектор-функции по двум замкнутым контурам в двойной поверхностный по гладким поверхностям, натянутым на эти контуры:

$$\oint_{c_1}\oint_{c_2}\frac{(d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{r}_1)\,\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}=-\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\partial^2}{\partial n_1\,\partial n_2}\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)ds_1\,ds_2,$$

$$\oint_{c_1}\oint_{c_2}\frac{d\mathbf{r}_1\times(d\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}=\int_{s_1}\int_{s_2}\frac{\partial^2}{\partial n_1\,\partial n_2}\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)ds_1\,ds_2.$$

Г. М. Фихтенгольц

2809. О нескольких функциональных уравнениях с двумя переменными. Гермэнеску (Asupra unor ecuatii functionale cu doua variabile. Ghermanescu M.), Bul. stiint. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. si fiz., 1955, 7, № 4, 963—975 (рум.; рез. русск., франц.)

Статья посвящена исследованию совокупностей решений нескольких линейных функциональных уравнений с действительными функциями двух действительных переменных. Из шестнадцати полученных результатов в качестве характерного примера приведем шестой результат.

Совокупность измеримых решений функционального уравнения $f(x+a,\ y+b)-f(x,y)=0$, где a и b — заданные постоянные, имеет вид $f(x,y)=F(bx+ay,\ bx-ay)$, где $F(u,v)$ — произвольная измеримая функция, имеющая период $2ab$ по переменной u. I. J. Schoenberg

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 10, 1094.

2810. Применение групп преобразований к функциональным уравнениям. Урабэ, Сугаку, 1954, 6, № 2, 65—73 (японск.)

2811 К. Введение в математический анализ. Микусинский (Wstep do analizy matematycznej. Mikusinski Jan, PWN, 1957, 264 s., 22 zł.) (польск.)

Книга представляет собой очень точную логическую конструкцию элементарного анализа. Логическая точность не делает ее сухой; наоборот, математика представляется здесь во всей своей внутренней красоте. Во многих местах читатель найдет удовлетворение, знакомясь с элегантным доказательством.

Книгу можно использовать в качестве дополнительного материала для студентов, изучающих курс дифференциального и интегрального исчисления. Ее можно также рекомендовать членам школьных математических кружков.

Гл. I содержит ясное изложение свойств чисел на основе аксиом (одна из них — существование верхней грани ограниченного множества); в этой главе содержится определение множества целых положительных чисел (натурального ряда) и принципа математической индукции. В гл. II вводятся понятия функции, предела и непрерывности. Теория предела основывается на символах $o(1)$ и $O(1)$, корректно определенных и внимательно рассмотренных (основа — односторонние пределы). Только здесь автор определяет степень и модуль и, вводя с этих пор иллюстративный материал, исследует свойства непрерывных функций. После введения производной и использования ее в исследовании экстремумов (без второй производной) дается теорема Лагранжа, а затем определение и свойства монотонных функций.

В гл. III вводятся последовательности и связываются со ступенчатыми функциями, которые используются при исследовании последовательностей (однако определение сходимости дается особо). При выводе формулы для суммы геометрической прогрессии и ряда автор обобщает понятие ряда и дает мажорантный критерий (вводя, кстати, десятичные дроби). Вводятся степенные ряды и исследуется их сходимость (без формулы Коши-Адамара), после чего автор переходит к общим последовательностям функций. Минуя обычную сходимость, автор определяет равномерную сходимость ($|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n\to 0$) и доказывает без вспомогательных предположений теорему о почленном дифференцировании. Дается определение экспоненциальной функции (через уравнение $f'=f$) и логарифма, включая определение обратной и сложной функции вместе с необходимыми теоремами. Аналогично определяются тригонометрические функции ($f''=f$).

В гл. IV содержится определение неопределенного интеграла и методов интегрирования подстановкой, преобразованием и по частям. Определение определенного интеграла совершенно оригинально. Именно: функция интервала $F(x_1,x_2)$ называется средней относительно функции $f(x)$, если мы всегда имеем

$$(x_2-x_1)\,m\leqslant F(x_1,x_2)\leqslant(x_2-x_1)\,M,$$

где $M=\sup f(x)$, $m=\inf f(x)$, $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

Если для данной функции $f(x)$ существует единственная аддитивная и средняя функция интервала, она называется определенным интегралом от $f(x)$ по данному интервалу.

Остальная часть главы посвящается фундаментальным теоремам об интеграле и дополнительной информации по теории пределов — понятию неправильных пределов, легкой и трудной теореме Лопиталя, критерию Даламбера, интегральному критерию сходимости рядов, теореме Абеля о степенных рядах и, наконец, оценке константы Эйлера.

W. Kleiner

2812 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2-е изд. Тагамлицкий (Диференциално и интегрално смятане. 2. изд. Тагамлицки Я., София, Наука и изкуство, 1957, 784 с., 25.50 лв.), Бълг. книгопис, 1957, 61, № 9, 6 (болг.)

2813 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. Изд. 6-е испр. Банах (Rachunek różniczkowy i całkowy. T. 2. Wyd. 6 popr. Banach Stefan. Warszawa, PWN, 1957, 274 s., il., T. 1—2, 32 zł.) Przew. bibliogr., 1957, 13, № 46, 637 (польск.)

2814 К. Дифференциальное исчисление. Изд. 2-е испр. Шёнхубер (Rachunek różniczkowy. Wyd. 2. uzupek, Schönhuber Antoni. Poznań, Państw. Wydawn. Nauk., 1955, 273 s., il., 11.40 zł. Tekst. maszynopis powiel.), Przew. bibliogr., 1955, 11, № 38, 573 (польск.)

2815 Д. Несобственные интегралы в n-мерном пространстве. Лепина Э. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Лат. ун-т, Рига, 1958

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2816. Замечание об одном разложении. Фог (En bemaerkning om to raekker. Fog David), Nord. mat. tidskr., 1958, 6, № 2, 83, 96 (датск.; рез. англ.)

Дается новый вывод равенства

$$\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$$

В. В. Немыцкий

2817. О некоторых признаках сходимости и расходимости знакоположительных числовых рядов. Зморович В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 106—117

Вводится некоторая новая классификация рядов с положительными монотонно убывающими членами. Доказываются теоремы о необходимых и достаточных признаках сходимости и расходимости рядов выделенных автором классов. Из этих теорем в качестве следствий получаются известные теоремы Коши, Лобачевского, Шлёмильха и некоторые другие. Дается обобщение теоремы Клуни (РЖМат, 1957, 1550) и уточняется „начало сопряженных рядов" Бугаева (Бугаев Н. В., Сходимость бесконечных рядов по их внешнему виду, М., 1863). И. П. Макаров

2818. О некоторых конечных суммах. Милошевич (Sur quelques sommes finies. Miloševic Kovina), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, 8, № 3-4, 111—116 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Методом конечных разностей устанавливаются формулы для вычисления некоторых сумм. Основным результатом является формула

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+kp+is)\right\}=$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+m} s^i m! (\nu + i - 1)\, i}{i! (n + \nu + i + 1\, s)_{\nu+i,s}} P(i, m),$$

где положено

$$P(i, m) = \sum_{j=m}^{i} \left(\frac{p}{s}\right)^j S_i^j \sigma_j^m$$

(S_i^j, σ_j^m — числа Стирлинга первого и второго рода),

$$(x)_{n,h} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-nh+h).$$

При $s = p$ отсюда получается формула Митриновича (РЖМат, 1957, 6144). Устанавливается также формула

$$\sum_{k=0}^{m} \left\{(-1)^k \binom{m}{k} \prod_{i=0}^{\nu-1} (n + \overline{k + ip})\right\} =$$

$$= (-1)^m \frac{p^\nu \nu!}{(\nu - m)!} \left(\frac{n}{p} + \nu - 1\right)_{\nu-m}$$

С. П. Пулькин

2819. О линейных методах суммирования. Олевский А. М., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 4, 701—703

В работе содержатся некоторые результаты о суммировании последовательностей матрицами Тёплица. Матрица A сильнее матрицы B, если каждая последовательность, суммируемая B, также суммируется матрицей A к тому же пределу. Если это имеет место также и в случае последовательностей, суммируемых к бесконечности, то матрица A вполне сильнее матрицы B. Матрица A нормальна, если $a_{ij} = 0$ $(i < j)$ и $a_{ii} \neq 0$ (a_{ij} — коэффициент матрицы),

$$\| A \| = \overline{\lim_i} \sum_{j=1}^{\infty} | a_{ij} | .$$

Теорема 1. Пусть задано произвольное счетное множество матриц Тёплица и расходящийся на множестве E функциональный ряд, члены которого ограничены на этом множестве. Тогда между членами этого ряда можно так вставить нули, чтобы полученный ряд не суммировался ни в одной точке множества E ни одной из заданных матриц.

Частный случай этой теоремы приводит к следующему усилению хорошо известной теоремы Штейнхауза (Steinhaus H., Prace mat., fiz., 1911, 22, 121). Существует последовательность, состоящая из нулей и единиц, не суммируемая ни одной из наперед заданного счетного множества матриц.

Теорема 2. Пусть дано счетное множество произвольных матриц Тёплица C_i. Образуем новые матрицы $A_i = C_i C_{i-1} \ldots C_1 A_0$. Тогда для того чтобы существовала матрица Тёплица более сильная, чем все A_i в пространстве ограниченных последовательностей, достаточно выполнение неравенства

$$\sup_{i>j} \| C_i C_{i+1} \ldots C_{j+2} C_{j+1} \| = H(j) < \infty$$

(последовательности линейно независимы, если не существует сходящейся их линейной комбинации).

Теорема. Пусть задано $m + n$ линейно независимых последовательностей a_i^k $(1 \leqslant k \leqslant m + n;\ i = 1,2,3\ldots)$ и m чисел λ_k. Тогда существует нормальная матрица, суммирующая a_i^k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ соответственно к λ_k и не суммирующая a_i^k $(m + 1 \leqslant k \leqslant m + n)$.

Для случая ограниченных последовательностей см. Брудно А. Л., Матем. сб., 1945, **16** (58), № 2, 205. В работе установлены также другие результаты того же рода. Доказательства отсутствуют. И. И. Огиевецкий

2820. Некоторые идеи теории суммирования. Силверман (Some ideas from the theory of summability. Silverman Louis), Дельтион тис матиматикис этериас, Bull. Soc. math. Grèce, 1956, **30**, № 1-3, 94—99 (англ.)

Изложение некоторых хорошо известных понятий и теорем теории суммирования. Новых результатов работа не содержит. И. И. Огиевецкий

2821. Дальнейшие замечания к статье «Равномерная сходимость некоторых тригонометрических рядов», Tohoku Math. Journ., 6, (1954), 162—173. Хирокава (Further remarks on the paper «Uniform convergence of some trigonometrical series», Tohoku Math. Journ., 6 (1954), 162—173. Hirokawa Hiroshi), Tohoku Math. J., 1957, **9**, № 2, 110—112 (англ.)

Автор дает решение вопроса, поставленного им ранее в одной из предыдущих работ (РЖМат, 1956, 6508). Именно, доказывается

Теорема 3. Пусть $\beta \geqslant 1$. Тогда существует числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

такой, что

$$\tau_n^\beta = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} k a_k = o(n/\log n) \quad \text{при } n \to \infty$$

и тем не менее ряд (1) не суммируем методом $(R, 1)$, где

$$A_m^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}{m!}.$$

Такого же типа утверждение имеется и для методов (R,p). Из полученного результата автор выводит, что суммируемость методом $|C, \beta|$ не всегда влечет суммируемость методом (R, p) при $\beta > p$. Что же касается случая $\beta = p$, то Обрешков доказал (Obreschkoff N., Math. Z., 1942, **48**, 441 — 454), что суммируемость методом $|C, p|$ влечет суммируемость методом (R, p). П. Л. Ульянов

2822. Совместные методы суммирования. Гофман, Питерсон (Consistent limitation methods. Goffman Casper, Petersen G. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 363—369 (англ.)

Определяется класс $\mathfrak{A}$ методов Тёплица следующим образом. Метод Тёплица $A \in \mathfrak{A}$, если все элементы матрицы A неотрицательны и если в каждой ее строке и каждом столбце имеется по крайней мере один элемент, равный $1/2$. Показывается, что все методы класса $\mathfrak{A}$ ограниченно совместны (т. е. совместны на множестве ограниченных последовательностей) и что каждая ограниченная последовательность $\{s_n\}$ суммируется по крайней мере одним из методов этого класса, причем результат суммирования $(\mathfrak{A} - \lim_{n\to\infty} s_n)$ равен $(u + l)/2$, где $u = \lim \sup_{n\to\infty} s_n$, $l = \lim \inf_{n\to\infty} s_n$. Кроме того, доказана следующая теорема. Пусть $\mathfrak{B}$ — такой класс ограниченно совместных методов Тёплица, что каждая ограниченная последовательность $\{s_n\}$ суммируется по крайней мере одним из методов этого класса. Тогда если $\mathfrak{B} - \lim_{n\to\infty} s_n$ есть некоторая функция $f(l, u)$, где u и l имеют вышеуказанный смысл, то $f(l, u) = (u+l)/2$.

В. М. Даревский

2823. Логарифмический метод суммирования. Боруэйн (A logarithmic method of summability. Borwein D.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 212—220 (англ.)

Пусть S_n — последовательность комплексных чисел. Если

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log(1-x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} = s,$$

то говорим, что s_n L-сходится к s (логарифмически суммируется к s), и пишем $s_n \to s(L)$. Если $\lim_{x\to 1}(1-x)\sum \sigma_n^\alpha x^n \to s$, σ_n^α — последовательность чезаровских средних порядка $\alpha > -1$, то говорим, что s_n (A, α)-сходится к s, и пишем $s_n \to s(A, \alpha)$.

Теорема 1. Соотношения $s_{n+1} \to s(L)$ и $s_n \to s(L)$ эквивалентны.

Теорема 2. Для $1 \geqslant \alpha \geqslant -1$, $L \supset (A, \alpha)$.

Теорема 3. Существует L-суммируемая последовательность, которая не суммируема никаким методом (A, α) для любого $\alpha > -1$.

Теорема 4. Существует последовательность, которая суммируема методом (A, α) для каждого $\alpha > 1$, но не суммируема методом L. Обозначим через LH_χ произведение метода L на метод Хаусдорфа H_χ (о методе H_χ см. Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951).

Теорема 5. Если H_χ — регулярный метод Хаусдорфа, то $LH_\chi \supseteq L$. И. И. Огиевецкий

2824. Сравнение метода суммирования Абеля с обыкновенным матричным методом. Целлер (Vergleich des Abelverfahrens mit gewöhnlichen Matrixverfahren. Zeller Karl), Math. Ann., 1956, **131**, № 3, 253—257 (нем.)

Основной результат работы состоит в следующем: не существует матричного метода, который суммировал бы те и только те последовательности, которые суммируются методом Абеля. В. М. Даревский

2825. О теореме Таубера для степенных рядов. Сухадольц (O Tauberjevem izreku za potenčne vrste. Suhadolc Anton), Obz. mat. in fiz., 1956, **5**, № 1, 16—20 (словенск.)

Изложение доказательства Виландта (Wielandt H., Math. Z., 1952, **56**, 206—207) тауберовой теоремы Литлвуда с некоторыми усовершенствованиями. В. И. Левин

2826. О разложении в степенной ряд обратного многочлена. Гиркояшиу (Asupra dezvoltării in serie intreagă a inversei unui polinom. Ghircoiasiu Nicolae), Studii si cercetări stiint. Acad. RPR Fil. Cluj. Ser. I, 1955, **6**, № 1-2, 51—77 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается теорема о коэффициентах разложения в степенной ряд $1/P(x)$, где $P(x)$ — действительный многочлен. Пусть

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\dots(1-a_nx)} = 1 + nq_1x + \dots + \binom{n+r-1}{r} q_r x^r + \dots, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — действительные числа. Устанавливается неравенство $q^2_{2r+1} < q_{2r}q_{2r+2}$, откуда следует, что коэффициенты g_{2r}, $r = 1, 2, \dots$, положительны. В том случае, когда наименьший по абсолютной величине корень уравнения $P(x) = 0$ положителен, доказано, что, начиная с некоторого места N, все коэффициенты в разложении (1) положительны. Для многочленов 2-й, 3-й, 4-й степени и для некоторых других специальных многочленов найдено точное значение числа N. Н. Обрешков

2827. О применении рядов Фурье в овалах. У Дэ-тао, Синькэсюэ, 1954, № 4, 32—34 (кит.)

2828. О сходимости последовательности приближенных значений. Судзуки, Сугаку, 1955, **7**, № 3, 28—29 (японск.)

2829. Асимптотические разложения и сходящиеся множители. I. Общая теория и основные сходящиеся множители. II. Интеграл ошибок, интегралы Доусона и Френеля, интегральная экспонента, интегральный синус, косинус и аналогичные интегралы. III. Гамма-, пси- и полигамма- функции; интегралы Ферми—Дирака и Бозе—Эйнштейна. Дингл (Asymptotic expansions and converging factors. I. General theory and basic converging factors. II. Error, Dawson, Fresnel, exponential, sine and cosine, and similar integrals. III. Gamma, psi and polygamma functions, and Fermi—Dirac and Bose—Einstein integrals. Dingle R. B.), Proc. Roy. Soc., 1958, **244**, № 1239, 456—475, 476—483, 484—490 (англ.)

Если расходящийся асимптотический ряд $\sum_{r=1}^{\infty} a_r/z^{r-1}$ представляет при $z \to \infty$ функцию $f(z)$ и если $|a_r| < A(r-1)!$, то имеет место формула суммирования Бореля

$$f(z) = \sum_1^n \frac{a_r}{z^{r-1}} + \frac{a_{n+1}}{z^n}\Phi_n(z), \qquad \text{где}$$

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n}{a_{n+1}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon}\, d\varepsilon \sum_{n+1}^\infty \frac{a_r}{(r-1)!}\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{r-1} \qquad (1)$$

Показывается, что формула (1) может быть заменена более общей формулой

$$f(z) = \sum_1^n \frac{a_r}{z^{r-1}} + \frac{a_{n+1}}{z^n}\Phi_{n\alpha}(z), \qquad \text{где}$$

$$\Phi_{n\alpha}(z) = \frac{z^{n+\alpha}}{a_{n+1}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon}\, d\varepsilon \sum_{n+1}^\infty \frac{a_r}{\Gamma(\alpha+r)}\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{n+r-1} \qquad (2)$$

(α — произвольное число).

Рассматриваются следующие основные примеры:

(A) $a_r = (-1)^{r-1}(r-1)!$; $\quad |\arg z| < \pi$,

$$\Phi_n(z) = \Lambda_n(z) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon}\,\varepsilon^n d\varepsilon}{1+\varepsilon/z}.$$

(B) $a_r = (r-1)!$; $\quad \arg z = 0$,

$$\Phi_n(z) = \overline{\Lambda}_n(-z) = \frac{1}{n!} \text{ гл. знач.} \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon}\,\varepsilon^n d\varepsilon}{1-\varepsilon/z}. \qquad (3)$$

Если $a_r = \Gamma(\alpha+r)$, то по формуле (2)

$$\Phi_{n\alpha}(z) = \overline{\Lambda}_{n+\alpha}(-z).$$

(C) $a_r = \begin{cases} (-1)^{(r-1)/2}(r-1)! & \text{при } r \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } r \text{ четном,} \end{cases}$

$|\arg z| < \pi/2$, $\quad n$ — четное,

$$\Phi_n(z) = \Pi_n(z) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon}\,\varepsilon^n d\varepsilon}{1+(\varepsilon/z)^2}.$$

(D) $a_r = \begin{cases} (r-1)! & \text{при } r \text{ нечетном;} \\ 0 & \text{при } r \text{ четном;} \end{cases}$ z — вещественное, n — четное.

$$\Phi_n(z) = \overline{\Pi}_n(iz) = \frac{1}{n!} \text{ гл. знач.} \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon}\,\varepsilon^n d\varepsilon}{1-(\varepsilon/z)^2}.$$

(E) $a_r = (-1)^{r-1}(r-1)!\ \zeta(r-1)$,

$\Phi_n(z) = \Lambda_n(z) + \Lambda_n(2z) + \Lambda_n(3z) + \dots$

Множители $\Lambda_n(z)$, $\overline{\Lambda}_n(-z)$, $\Pi_n(z)$ и $\overline{\Pi}_n(iz)$ называются основными сходящимися множителями.

$$\Pi_n(z) = \frac{1}{2}\left[\Lambda_n(iz) + \Lambda_n(-iz)\right];$$

$$\overline{\Pi}_n(iz) = \frac{1}{2}\left[\overline{\Lambda}_n(-z) + \Lambda_n(z)\right].$$

В интеграле (3) подинтегральная функция имеет полюс при $\varepsilon = z$. Если $\arg z = 0$, то полюс лежит на пути интегрирования, и интеграл расходится. $\overline{\Lambda}_n(-z)$ определяется тогда как главное значение этого интеграла и равняется среднему арифметическому двух различных предельных значений функции $\Lambda_n(ze^{i\theta})$ при $\theta \to \pm\pi$.

$$\lim_{\theta\to\pi-0} \Lambda_n(ze^{i\theta}) = \overline{\Lambda}_n(-z) - \frac{i\pi z^{n+1}e^{-z}}{n!},$$

$$\lim_{\theta\to\pi-0} \Lambda_n(ze^{-i\theta}) = \overline{\Lambda}_n(-z) + \frac{i\pi z^{n+1}e^{-z}}{n!}. \qquad (4)$$

Формулы (4) описывают для функции $\Lambda_n(w)$ явление скачкообразного изменения суммы Бореля асимптотического ряда при переходе через луч $\arg w = \pi$, что соответствует явлению Стокса, т. е. скачкообразному изменению коэффициентов асимптотических рядов при изменении аргумента независимого переменного.

В применениях асимптотические ряды обрываются на наименьшем члене a_r/z^{r-1}, для которого обычно r приблизительно равняется z. Поэтому особенно важно вычислить значение множителя $\Phi_s(z)$ при $z = s$.

Автор приводит таблицы значений функций $\Lambda_s(z)$, $\overline{\Lambda}_s(-z)$, $\Pi_s(z)$ и $\overline{\Pi}_s(iz)$ для $s = -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, 9/2, 5, 11/2, 6$ и $0{,}1 \leqslant z \leqslant 20$, причем $\Delta z = 0{,}1$, если $z \leqslant 1$; $\Delta z = 0{,}2$, если $1 \leqslant z \leqslant 2$; $\Delta z = 0{,}5$, если $2 \leqslant z \leqslant 10$; $\Delta z = 1$, если $10 \leqslant z \leqslant 20$.

Рассматриваются асимптотические разложения для

а) интеграла ошибок $\operatorname{erf} z = \int_0^z e^{-u^2}du$,

$$\operatorname{erf} z \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-z^2}}{2z}\sum_1^\infty \frac{\Gamma(r-1/2)}{\Gamma(1/2)(-z^2)^{r-1}},$$

если $|\arg z| < \pi$;

б) интеграла Доусона

$$\operatorname{erfi} z = \int_0^z e^{u^2}du \sim \frac{e^{z^2}}{2z}\left\{\sum_1^n \frac{\Gamma(r-1/2)}{\Gamma(1/2)\,z^{2(r-1)}} + \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)\,z^{2n}}\,\overline{\Lambda}_{n-1/2}(-z^2)\right\};$$

в) интегралов Френеля

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} \cos u^2 du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left(A(z)\sin z - B(z)\cos z\right),$$

$$S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} \sin u^2 du = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left(A(z)\cos z + B(z)\sin z\right),$$

$$A(z) = \sum_{1,3,\ldots}^{n\text{ — нечетн.}} \frac{(-1)^{(r-1)/2}\,\Gamma(r-1/2)}{\Gamma(1/2)\,z^{r-1}} + \frac{(-1)^{(n+1)/2}\,\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(1/2)\,z^{n+1}}\,\Pi_{n+1/2}(z)$$

$$B(z) = \sum_{2,4,\ldots}^{n\text{ — четн.}} \frac{(-1)^{(r-2)/2}\,\Gamma(r-1/2)}{\Gamma(1/2)\,z^{r-1}} + \frac{(-1)^{n/2}\,\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(1/2)\,z^{n+1}}\,\Pi_{n+1/2}(z)$$

$$(|\arg z| < \pi/2);$$

г) обобщенных интегральных экспонент $\operatorname{Ei}_p(z)$, косинуса $\operatorname{Ci}_p(z)$ и синуса $\operatorname{Si}_p(z)$.

Рассматриваются гамма-функция

$$\ln\Gamma(z) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \sum_{r=1,3,\ldots}^{n\text{ — нечетн.}} \frac{(-1)^{(r-1)/2}\,B_{(r+1)/2}}{r(r+1)\,z^r} + \frac{(-1)^{(n+1)/2}\,(n+1)!}{\pi(2\pi z)^{n+2}}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{n+3}}\,\Pi_{n+1}(2\pi\mu z),$$

где B_ν — числа Бернулли, $B_1 = 1/6$; $B_2 = 1/30$; $B_3 = 1/42$; $B_4 = 1/30$, ...,

$$B_\nu = \frac{2(2\nu)!\,\zeta(2\nu)}{(2\pi)^{2\nu}} = \frac{2(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{2\nu}},$$

и другие функции. Ю. Л. Рабинович

2830. Асимптотические разложения. I. Основные теоремы об асимптотиках. Корпут (Asymptotic developments. I. Fundamental theorems of asymptotics. Corput J. G.), Ит он леаналиса математит, J. analyse math., 1955—1956, **4**, № 2, 341—418, 7 (англ.; рез. иврит.)

Работа представляет собой первую часть серии публикаций автора, посвященных применению асимптотических методов в анализе и теории дифференциальных уравнений.

В работе 1 дается систематическое изложение алгебры асимптотических равенств и теории асимптотических рядов. В основу кладется понятие асимптотического равенства $A \sim B$ при $\omega \to \infty$, эквивалентного утверждению

$$A - B = O(|\omega|^{-q}),$$

где q — произвольное действительное число. Далее вводится понятие асимптотического предела S последовательности $A_h (h = 1,2,\ldots)$ при $h \to \infty$, под которым понимается, что $A_h = S + O(|\omega|^{-q_h})$ при $h \geqslant k \geqslant 0$, где $q_h \to \infty$ при $h \to \infty$. Отсюда естественно выводятся основные свойства асимптотических рядов (теоремы сложения и умножения, теорема почленного интегрирования и др.). Специально рассматриваются асимптотические ряды аналитических функций. Б. П. Демидович

2831. Асимптотические разложения. II. Мозер, Уайман (Asymptotic expansions. II. Moser Leo, Wyman Max), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 194—209 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 1531. Рассматриваются разложения вида:

$$\exp P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{x^n}{n!}; \quad P(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k; \quad a_m \neq 0.$$

По сравнению с работой I допускаются любые знаки a_i. Вводится тригонометрический полином $S(R,\theta) = R(P(Re^{i\theta}))$. Решения θ_2 уравнения $S'_\theta(R,\theta) = 0$, дающие максимум $S(R,\theta)$ при больших R называются

асимптотическими углами $S(R,\Theta)$. О них доказывается 8 теорем. Если $\Theta = 0$ есть максимальный асимптотический угол (дающий наибольший максимум $S(R,\Theta)$), то имеет место асимптотика:

$$B_n \sim \frac{n!\exp P(R)}{R^n}(2\pi A^2 P(R))^{-1/2},$$

где A оператор $A = R\frac{d}{dR}$; $R = R(n)$ определяется из уравнения $AP(R) = n$. В общем случае:

$$B_n \sim \frac{n!}{\pi} R\left[\sum_{j=1}^{t}\int_{\Phi_j+\varepsilon_j}^{\Phi_j+\varepsilon_j}\frac{\exp(P(R_j e^{i\Theta}) - in\Theta)d\Theta}{R_j{}^n}\right],$$

где интегрирование ведется по некоторым окрестностям максимальных асимптотических углов. Далее даются применения к полиномам Эрмита, порождаемым функцией $\exp(2tx - x^2)$. Ю. В. Линник

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2832. **Функции, определяемые как частное цилиндрических функций. Оками,** Сэйсан кэнкю, 1955, **7**, № 1, 11—13 (японск.)

2833. **О нулях бесселевых функций чисто мнимого порядка. Пальм** (On the zeros of Bessel functions of pure imaginary order. Palm Enok), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 4, 500—503 (англ.)

Устанавливается, что нетривиальное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(\frac{\nu^2}{z^2} - 1\right)u = 0$$

не может иметь двух различных нулей, лежащих на прямой, параллельной действительной оси. Н. П. Купцов

2834. **Новые формулы относительно многочленов Лежандра. Митринович** (Nouvelles formules relatives aux polynomes de Legendre. Mitrinovitch Dragoslav S.), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 19, 1387—1389 (франц).

Приводятся, без доказательств, некоторые оценки производных многочленов Лежандра и интегралов от этих производных. В. В. Немыцкий

2835. **О проблеме Гроссвальда для полиномов Лежандра. Бхонсле** (On a problem of Grosswald for Legendre polynomials. Bhonsle B. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 1, 33—36 (англ.)

В работе двумя весьма простыми способами выводится формула Гроссвальда

$$\left[\frac{d^r P_n(x)}{dx^r}\right]_{x=1} = \frac{(n+r)!}{2^r r!(n-r)!},$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра. Один из этих способов опирается на связь между полиномами Лежандра и гипергеометрическими функциями, другой — на интегральную формулу для $P_n(x)$. Аналогичные формулы получены также для присоединенных функций Лежандра, произведений $P_n(x)P_m(x)$ и обобщенных полиномов Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$.

Используя связь между функциями Якоби и гипергеометрическими функциями, автор устанавливает формулу

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}m} P_{n-m}^{(\alpha+m,\,\beta+m)}(x)\,P_n{}^m(x)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(n+m)!\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{2n-m}\Gamma(n+{}^3/_2)(n-m)!\,\Gamma(n+m+\alpha+\beta+1)}.$$

Н. П. Купцов

2836. **Циклически упорядоченные множества. Эйссен** (Cyclically ordered sets. Aissen M. I.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 3, 406—412 (англ.)

Дается обобщение известной теоремы о разделении нулей двух последовательных ортогональных полиномов на случай последовательности функций, удовлетворяющих линейному конечноразностному уравнению специального типа. В качестве приложений рассматриваются полиномы Эрмита и Лежандра. Этот результат основывается на некоторых общих теоремах, касающихся циклически расположенных множеств, которые имеют самостоятельный интерес. Б. П. Демидович

2837. **Рекуррентные формулы для многочленов Ламе. Арскотт** (Recurrence formulae for Lamé polynomials. Arscott F. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 360—364 (англ.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2838. **О преобразовании Лапласа. Гейер** (Despre trasformarea Laplace. Geier Alfred), Bul. stiint. si tehn. Inst. politehn. Timisoara, 1956, **1**, № 2, 9—11 (рум.; рез. франц., русск.)

Пусть $f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)\,dt$, $h(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}H(t)\,dt$.

Теорема. Если $f(p)$ — действительная функция комплексного переменного $p = \alpha + i\beta$, голоморфная в полосе $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$, и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha + i\beta)|^2\,d\alpha$$

ограничен некоторой постоянной, не зависящей от $\beta(-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi)$, то

$$H(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} f(te^{-\pi i}).$$

А. П. Прудников

2839. **Об одном обобщении преобразования Лапласа. Ватанабэ** (Eine Verallgemeinerung der Laplace-Transformation. Watanabe Yoshikatsu), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1956, **7**, Dec., 19—36 (англ.)

Обобщенное преобразование Лапласа от функции n независимых переменных определяется следующим образом:

$$f(s_1,\ldots,s_n) = \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\exp\left(-\sum_{\nu=1}^{n}s_\nu u_\nu\right)F(u_1,\ldots,u_n)\,du_1\ldots du_n.$$

Проводится детальное исследование условий сходимости соответствующего интеграла для случая двух переменных

$$f(s,t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-su-tv}F(u,v)\,du\,dv.$$

Путем доказательства ряда теорем устанавливаются области изменения комплексных параметров s и t, а также условия, которым должна удовлетворять функция $F(u,v)$ для того, чтобы существовало двукратное преобразование Лапласа. Я. С. Уфлянд

2840. **Обратное преобразование Лапласа для экспоненциальной функции. Рагаб** (The inverse Laplace transform of an exponential function. Ragab F. M.), Communs Pure and Appl. Math., 1958, **11**, № 1, 115—127 (англ.)

Для изображения $p^{\alpha-1}\exp\{-a^{1/m}p^{1/m}\}$, $\operatorname{Re} p>0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re} a>0$, $m=2, 3, 4,\ldots$ находится оригинал и изучается его асимптотическое поведение при малых t.

А. П. Прудников

2841. О представлении векторных функций интегралами Лапласа—Стилтьеса. Цайдман (Sur la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace—Stieltjès. Zaidman Samuel), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 4, 397—399 (франц.)

Решается вопрос о необходимых и достаточных условиях представимости векторных функций интегралом Лапласа—Стилтьеса (проблема Хилла: Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951).

Теорема 1. Для того чтобы существовала нормализованная функция $\vec{\alpha}(t)\in V_f^{I+}$ (т. е. имеющая ограниченную сильную вариацию в смысле И. М. Гельфанда на $[0,\infty]\equiv I$), для которой

$$\vec{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,d\vec{\alpha}(t)\qquad (s>0),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(\vec{A}_1)$: существуют как сильные пределы функции

$$\vec{\alpha}_k(t)=\int_{0+}^{t}L_{k,\tau}[\vec{f}(\cdot)]\,d\tau,\quad k=1, 2,\ldots,$$

где $L_{k,\tau}[\vec{f}(\cdot)]=\dfrac{(-1)^k}{k!}\left(\dfrac{k}{\tau}\right)^{k+1}\vec{f}^{(k)}\left(\dfrac{k}{\tau}\right)$,

и чтобы множество $\vec{L}_2$ конечных сумм

$$\sum_1^n \varepsilon_i\,[\vec{\alpha}_k(t_{i+1})-\vec{\alpha}_k(t_i)],\quad k=1, 2,\ldots,\ \varepsilon_i=\pm 1,\ (t_1<t_2<\cdots<t_{n+1})$$

было ограниченным в банаховом пространстве X значений $\vec{\alpha}(t)$.

Формулируются еще три аналогичные теоремы, относящиеся, в частности, к слабой топологии. В. И Левин

2842. Заметка о преобразовании Фурье единичной функции. Фолл (A note on the Fourier transform of a unit step function. Fall J. V.), Bull. Electr. Engng Educ., 1958, № 20, 49—51 (англ.)

Заметка носит методический характер. Л. Я. Цлаф

2843. Значительный вклад, касающийся интеграла Фурье. Алач (Contributie remarcabilă privind integrala lui Fourier. Alaci V.), Comun. stiint. si. tehn., 1956, **1**, 53—61 (рум.; рез. русск., франц.)

Для представления непериодической функции $f(x)$, заданной в различных частях промежутка $(-\infty,\infty)$ различными аналитическими выражениями, обычно применяют интегральную формулу Фурье. Автор указывает, что для этой цели во многих случаях проще непосредственно использовать известный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Г. М. Фихтенгольц

2844. Представление функций в виде сверток. Рудин (Representation of functions by convolutions. Rudin Walter), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 1, 103—115 (англ.)

Рассматривается n-мерное пространство R_n, точки которого обозначаются через $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n),\ldots$. Пусть $\sum_i x_i y_i=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$; $|\mathbf{x}|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}$ а $d\mathbf{x}$ — n-мерный элемент объема. Через $L^1(R_n)$ обозначается множество всех комплексных функций $f(\mathbf{x})$, определенных в R_n и абсолютно интегрируемых по всему пространству R_n. Если $f\in L^1$, то изображение Фурье $\overset{*}{f}$ функции f определяется формулой

$$\overset{*}{f}(\mathbf{y})=(2\pi)^{-n/2}\int_{R_n} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\mathbf{y}}\,d\mathbf{x}.$$

Если $\overset{*}{f}\in L^1$, то

$$f(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}\int_{R_n}\overset{*}{f}(\mathbf{y})\,e^{i\mathbf{x}\mathbf{y}}\,d\mathbf{y}.$$

Свертка двух элементов $g(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ множества L^1 определяется формулой

$$g*h(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}\int_{R_n} g(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,h(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}.$$

Соотношение $f=g*h$ равносильно соотношению $\overset{*}{f}=\overset{*}{g}\,\overset{*}{h}$.

Исследуется вопрос о том, можно ли любой элемент f множества L^1 представить в виде свертки $g*h$ некоторых элементов g и h этого множества, что равносильно представлению изображения $\overset{*}{f}$ в виде произведения $\overset{*}{g}\,\overset{*}{h}$ изображений $\overset{*}{g}$ и $\overset{*}{h}$ двух элементов множества L^1. Представив равенство $\overset{*}{f}=\overset{*}{g}\,\overset{*}{h}$ в виде $\overset{*}{f}\varphi=\overset{*}{g}$, где $\varphi=1/\overset{*}{h}$, автор ставит задачу построения такой функции φ, чтобы функция $1/\varphi$ была изображением Фурье некоторой функции h, а произведение $\overset{*}{f}\varphi$ — изображением Фурье некоторой функции g, где h и g — элементы L^1.

Устанавливается, что любая функция множества L^1 является сверткой двух функций из этого множества. Понятия свертки и преобразования Фурье можно перенести на любую локально компактную абелеву аддитивную группу G, в которой введена мера, инвариантная относительно переноса (мера Хаара). Пусть $\overset{*}{G}$ — группа всех непрерывных характеров G и пусть L^1 — множество всех комплексных функций, определенных в G и интегрируемых в смысле данной метрики. Свертка двух элементов g и h множества L^1 определяется формулой

$$(g*h)(\mathbf{x})=\int_G g(\mathbf{x}-\mathbf{t})\,h(\mathbf{t})\,d\mathbf{t},$$

где $d\mathbf{t}$ обозначает меру Хаара. Изображение Фурье любого элемента $f\in L^1$ определяется формулой $\overset{*}{f}(\mathbf{y})=\int_G f(\mathbf{x})\,\mathbf{y}(-\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ $(\mathbf{y}\in\overset{*}{G})$. Соотношение $f=g*h$ равносильно равенству $\overset{*}{f}=\overset{*}{g}\,\overset{*}{h}$. Группа G называется локально евклидовой, если некоторая окрестность единичного элемента гомеоморфна пространству R_n. Доказывается, что любой элемент множества L^1 функций, определенных и интегрируемых на локально евклидовой топологической группе, может быть представлен в виде свертки двух элементов этого множества. Ю. Л. Рабинович

2845. Формула типа свертки для преобразования Ханкеля. Гриффит (On a formula of the convolution type related to Hankel transforms. Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1957, **91**, № 3, 142—148 (англ.)

С помощью хорошо известного соотношения между n-мерным преобразованием Фурье и преобразованием Ханкеля, для последнего приводится одна формула типа свертки, являющаяся аналогом соответствующей формулы для n-мерного преобразования Фурье. А. П. Прудников

2846. Теоремы об обобщенном преобразовании Ханкеля. Кумар (Some theorems connected with generalised Hankel—transform. Kumar Ram), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, **7**, № 3-5, 321—332 (англ.)

Доказываются две теоремы об обобщенном преобразовании Ханкеля (РЖМат, 1954, 5165)

$$f(x) = \int_0^\infty (xy)^\nu J_\lambda^\mu (xy)\, g(y)\, dy$$

и рассматривается большое число примеров, в которых эти теоремы применены для вычисления определенных интегралов, содержащих функции Уиттекера, Бесселя—Майтланда, их произведения и др. А. П. Прудников

2847. **Операционные исчисления для функций, определенных на всей прямой. Диткин В. А.**, Докл. АН СССР, 1957, 112, № 2, 191—194

Под S понимается множество функций $f(x)$, определенных почти всюду на прямой $-\infty < x < \infty$, интегрируемых по Лебегу на любом конечном интервале, и таких, что существует по крайней мере одна пара значений p_1 и p_2, для которых интегралы

$$\int_a^\infty f(x)\, e^{-p_1 x}\, dx \text{ и } \int_{-\infty}^b f(x)\, e^{-p_2 x}\, dx$$

сходятся. Под $\bar{S}_+$ ($\bar{S}_-$) понимается множество функций комплексного переменного p

$$\bar{f}_1(p) = \int_{-\infty}^\infty f_1(x)\, e^{-px}\, dx,\ f_1(x) = 0 \text{ для } x<a$$

$$(\bar{f}_2(p) = -\int_{-\infty}^\infty f_2(x)\, e^{-px}\, dx,\ f_2(x) = 0 \text{ для } x>b).$$

$\bar{S}_+$ и $\bar{S}_-$ являются линейными множествами (с обычным определением сложения и умножения на комплексное число). Прямая сумма $\mathfrak{M}$ линейных множеств $\bar{S}_+$ и $\bar{S}_-$ содержит линейное подмножество $\mathfrak{M}_0$, состоящее из пар функций $(\bar{\theta}(p), \bar{\theta}(p))$, где

$$\bar{\theta}(p) = \int_a^b \theta(x)\, e^{-px} dx$$

($\theta(x)$ принадлежит пересечению $S_+ \cdot S_-$). Доказывается, что линейные множества S и $\bar{S} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0$ изоморфны.

Эта теорема используется для развития некоей теории делимости в $\mathfrak{M}$, на основании которой, в свою очередь, вводится некоторый линейный (вообще говоря, неоднозначный) оператор F с областью определения Ω_F, являющейся прообразом при изоморфизме $S \leftrightarrow \bar{S}$ множества всех элементов $(\bar{f}_1(p), \bar{f}_2(p))$ из $\mathfrak{M}$, для которых пары $(F_1(p)\bar{f}_1(p),\ F_2(p)\bar{f}_2(p))$ также принадлежат к $\mathfrak{M}$, где $F_1(p)$ есть отношение двух функций из $\bar{S}_+$, а $F_2(p)$ — отношение двух функций из $\bar{S}_-$. Для $f \in \Omega_F$ $Ff = g$, где g есть прообраз класса $\bar{g}$, представителем которого является пара $(F_1(p)\bar{f}_1(p),\ F_2(p)\bar{f}_2(p))$. В некоторых случаях оператор F может быть отождествлен с $F(p)$. В заключение приводятся примеры. В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2848. **Некоторые свойства коэффициентов Вигнера и гиперсферических функций. Стоун** (Some properties of Wigner coefficients and hyperspherical harmonics. Stone A. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 424—430 (англ.)

Получен ряд формул для коэффициентов Вигнера. Формулы слишком громоздки, чтобы их приводить в реферате. Вывод основывается на следующих двух идеях. Рассмотрим 3-мерную сферу S_3 радиуса 1 в 4-мерном пространстве и рассмотрим далее $L_2(S_3)$. Движения S_3 задают линейное представление группы 4-мерных вращений O_4 в $L_2(S_3)$. Пусть $R \subset L_2(S_3)$ — подпространство, в котором индуцируется неприводимое представление. Введем в этом пространстве базис следующими двумя способами. Рассмотрим координаты на S_3:

$$x_1 = \sin\vartheta \sin\theta \cos\varphi,$$
$$x_2 = \sin\vartheta \sin\theta \sin\varphi,$$
$$x_3 = \sin\vartheta \cos\theta,$$
$$x_4 = \cos\vartheta.$$

В этих координатах рассмотрим функции

$$\varphi_{klm}(\vartheta, \theta, \varphi) = C_{kl}(\vartheta)\, Y_l^m(\theta, \varphi),$$

где

$$C_{kl}(\vartheta) = \sqrt{\frac{2(k+1)!\,(k-1)!}{\pi(k+l+1)!}}\, \sin^l\vartheta \left(\frac{d}{d\cos\vartheta}\right)^l C_k(\cos\vartheta)$$

$$C_k(\cos\vartheta) = \frac{\sin(k+1)\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$Y_l^m(\theta, \varphi)$ — обычная сферическая функция.

При фиксированном k функции φ_{klm} образуют базис в пространстве $R_k \subset L_2(S_3)$, неприводимом относительно O_4. При фиксированных k, l эти функции образуют базис в подпространстве $R_{k,l} \subset R_k$, неприводимом относительно группы вращений 3-мерного пространства, которая оставляет инвариантной координату x_4.

Рассмотрим далее координаты:

$$x_1 = \sin\theta' \cos\varphi,$$
$$x_2 = \sin\theta' \sin\varphi,$$
$$x_3 = \cos\theta' \cos\chi,$$
$$x_4 = \cos\theta' \sin\chi.$$

Оказывается, что в описанном пространстве R_k можно устроить базис из функций вида

$$\psi_{k, m_1, m_2} = \Theta_{k, m_1, m_2}(\theta')\, e^{i[(m_1 - m_2)\chi + (m_1 + m_2)\varphi]};$$

переход от одного базиса к другому дается коэффициентами Вигнера:

$$\varphi_{klm}(\theta, \vartheta, \varphi) = \sum C^{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, l}_{m_1, m_2, m} \psi_{k, m_1, m_2}(\theta', \varphi, \chi),\ |z| = 1. \quad (1)$$

Придавая аргументам различные конкретные значения, получаем соотношения между коэффициентами Вигнера. Например, при $\theta' = \theta = \vartheta = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$C^{\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}k, l}_{-\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m, m} =$$

$$= i^{k-1} \frac{\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l\right)! \sqrt{(2l+1)(k-l)!(l+m)!(l-m)!}}{\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l\right)! \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}m\right)! \left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}m\right)! \sqrt{(k+l+1)!}}.$$

Кроме описанного метода, для получения формул автор пользуется еще следующим приемом. Он вводит некоторый специальный оператор O, матрица которого вычисляется как в базисе $\varphi_{k, l, m}$, так и в базисе φ_{k, m_1, m_2}. Затем этот оператор применяется к левой и правой частям (1). Сравнивая полученные результаты, автор получает новые формулы.

Всего с помощью комбинации обоих методов получено 11 формул. Часть из них, по-видимому, составляют новые формулы.

Примечание референта. Все полученные в этой работе тождества относятся к коэффициентам вида $C^{\frac{k}{2},\frac{k}{2},l}_{m_1,m_2,m}$. Это обстоятельство связано с тем, что в основу своих построений автор положил пространство скалярных функций на сфере S_3. Если рассмотреть пространство вектор-функций, то теми же методами можно получать формулы для коэффициентов самого общего вида. Ф. А. Березин

2849. **Замечание к закону Талбота. Книтль** (K odvození Talbotova zákona. Knittl Zdeněk), Jemná mech. a opt., 1958, 3, № 3, 104—106 (чешск.; рез. русск., нем.)

См. также: 2464, 2545, 2550, 2551, 2627, 2691

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

2850. **О конструкции Хаусдорфа для векторных пространств. Петтис** (On a vector space construction by Hausdorff. Pettis B. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 611—616 (англ.)

Получены следующие результаты:

Теорема 1. Если X — аддитивная абелева группа с полем операторов $\Omega = [\omega]$, имеющая бесконечную Ω-размерность, т. е. обладающая хотя бы одной бесконечной минимальной базой A (относительно Ω), а Σ_j $(j=1, \ldots, r)$— конечное число σ-идеалов подмножеств множества X, не содержащих самого X, то существует максимальная собственная Ω-подгруппа L группы X, не являющаяся элементом ни одного из Σ_j.

Для построения такой подгруппы выбирается счетная последовательность $\{a_i\}$ элементов A, и затем через L_n обозначается Ω-подгруппа, порожденная множеством $A \setminus \bigcup_{i>n} a_i$, причем n берется столь большим, чтобы L_n не принадлежало ни одному из Σ_j; тогда L определяется как максимальная Ω-подгруппа, содержащая L_n, но не содержащая a_{n+1}.

Теорема 2. Если в дополнение к предыдущему X обладает топологией, в которой она является связным пространством второй категории, причем операции $x+y$ и $-x$ непрерывны по x, то L можно выбрать так, чтобы она, кроме того, была всюду плотным небэровским множеством второй категории в X и обладала еще целым рядом свойств, которые не будут здесь перечисляться.

Для получения такой подгруппы L с помощью предыдущей теоремы к σ-идеалам Σ_j достаточно присоединить σ-идеал подмножеств X первой категории.

Теорема 3. В евклидовом векторном пространстве E^n существует подгруппа L, которая 1) является максимальной собственной подгруппой E^n, замкнутой относительно умножения на рациональные числа, 2) не имеет внутренних точек и является всюду плотным небэровским множеством второй категории, 3) не содержит, равно как и ее дополнение, бэровских подмножеств второй категории в E^n, 4) имеет, так же как и ее дополнение, внутреннюю меру нуль, 5) неизмерима, 6) является множеством нулей открытого аддитивного разрывного отображения E^n на множество рациональных чисел, 7) есть образ открытой разрывной проекции, определенной на E^n. Кроме того, 8) для каждого c, не лежащего в L, функция $(s, t) \to s + t$ отображает $L \times L_c$ (где L_c— множество рациональных кратных элемента c) на E^n аддитивным, одно-однозначным и непрерывным, но не в обе стороны непрерывным образом.

Эта теорема получается из предыдущей, если за X принять E^n, а за Ω — совокупность умножений на рациональные числа. Как отмечает автор, она объединяет в себе различные случаи патологического поведения, которые прежде рассматривались на независимых примерах.

Теорема 4. Всякое бесконечномерное действительное линейное топологическое пространство X второй категории (или же локально ограниченное, в частности нормированное) есть объединение $2^{\aleph_0}$ попарно непересекающихся линейных многообразий, каждое из которых всюду плотно в X. Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 2, если Ω состоит из умножений на все действительные числа.

В статье отмечается, что конструкция автора является слегка измененной конструкцией Хаусдорфа (Hausdorff F., J. reine und angew. Math., 1932, 167, 294—311) и что результат Хаусдорфа с помощью теоремы 2 и известной теоремы Серпинского об абсолютных G_δ можно усилить так: во всяком бесконечномерном метризуемом линейном топологическом пространстве второй категории (у Хаусдорфа речь шла о банаховых пространствах) существует линейное подпространство второй категории, не гомеоморфное никакому полному метрическому пространству. М. Ф. Бокштейн

2851. **Теория вполне непрерывных эндоморфизмов. II. Фукухара, Сибуя** (Théorie des endomorphismes complètement continus. II. Hukuhara Masuo, Sibuya Yasutaka), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1958, Sec. 1, 7, № 5, 511—525 (франц.)

Продолжение предыдущей работы авторов (РЖМат, 1958, 1329). Показывается, что множество $\mathfrak{R}$ всех непрерывных эндоморфизмов K в линейном (L)-пространстве R (терминология и обозначения см. РЖМат, 1957, 1593) также является линейным (L)-пространством, в котором система последовательностей, соответствующая эндоморфизму K, составлена из всех таких последовательностей эндоморфизмов $\{K_n\}$, что $K_n x_n \to Kx$ при $x_n \to x$; при этом сходимость понимается как сходимость в исходном пространстве R. Пусть K — вполне непрерывный эндоморфизм в линейном (L)-пространстве R и $L(\lambda) = I - \lambda K$. Доказывается, что: 1) собственные значения оператора K изолированы, 2) оператор $L(\lambda)^{-1}$ — голоморфная функция от λ в любой области, не заключающей собственных значений оператора K, 3) всякое собственное значение оператора K является полюсом оператора $L(\lambda)^{-1}$. Два линейных пространства R и R^* называются сопряженными (дуальными), если каждой паре элементов $x \in R$ и $u^* \in R^*$ сопоставляется число u^*x, представляющее собой билинейный функционал, удовлетворяющий условиям: если $u^*x = 0$ для всех $x \in R$, то $u^* = o^*$ (o^* — нуль-элемент пространства R^*) и, если $u^*x = 0$ для всех $u^* \in R^*$, то $x = o$ (o — нуль-элемент пространства R). По аналогии с пространством Банаха определяется слабая сходимость последовательности $\{x_k\}$, $x_k \in R$ к элементу $x \in R$. Доказывается, что слабая сходимость определяет в R топологию, превращающую R в линейное (L)-пространство (аналогично и для пространства R^*). В частности, если R и R^* — с самого начала линейные (L)-пространства, то их топология, в отличие от определенной при помощи слабой сходимости, называется начальной топологией. Двусторонним эндоморфизмом в пространстве $\{R, R^*\}$ называется линейный оператор K, являющийся одновременно эндоморфизмом как в R, так и в R^*, для которого имеет место равенство $u^*(Lx) = (u^*L)x$ (результат действия L на элемент $u^* \in R^*$ обозначается через u^*L). Двусторонний эндоморфизм называется непрерывным, если он непрерывен как в R, так и в R^* относительно начальной топологии. Аналогично определяется вполне непрерывный двусторонний эндоморфизм

Доказывается, что: 1) для вполне непрерывного двустороннего эндоморфизма K многообразия нуль-элементов (в смысле Рисса) оператора K в пространствах R и R^* имеют одинаковые (конечные) размерности, 2) для того чтобы уравнение $(I-K)x=y$, $x\in R$, $y\in R$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы $u^*y=0$ для любого $u^*\in R^*$, удовлетворяющего „союзному" уравнению $u^*(I-K)=O^*$.

Д. Ф. Харазов

2852. **Поправка к статье «О применимости теории Фредгольма к некоторым линейным топологическим пространствам». Фишман К. М., Валицкий Ю. Н.**, Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 2, 166

См. РЖМат, 1959, 566.

2853. **О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Райков Д. А.**, Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 22—34

Подробное изложение результатов автора, ранее опубликованных без доказательств (РЖМат, 1958, 1313).

Б. М. Макаров

2854. **Подобные базисы и изоморфизмы в пространствах Фреше. Арсов** (Similar bases and isomorphisms in Fréchet spaces. Arsove Maynard G.), Math. Ann., 1958, **135**, № 4, 283—293 (англ.)

Пусть U и V — два пространства типа Фрёше над одним и тем же полем (действительных или комплексных) чисел и пусть топология в U и V задана соответственно монотонно возрастающими последовательностями полунорм $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, $n=1,2,\ldots$

Определение. Система $\{y_n\}_1^\infty$ из V называется подобной системе $\{x_n\}_1^\infty$ из U в том случае, когда для всех последовательностей чисел $\{a_n\}$ из сходимости $\sum_{n=1}^\infty a_n y_n$ в V следует сходимость $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ в U и обратно.

Основной результат:

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}$—базис в U. Если T — изоморфизм U в V и $y_n=Tx_n$, то $\{y_n\}$ — базис в V, подобный $\{x_n\}$. Обратно, если $\{y_n\}$—базис в V, подобный $\{x_n\}$, то существует изоморфизм T пространства U в V такой, что $y_n=Tx_n$, $n=1,2,\ldots$

При доказательстве второй части теоремы 1 получен ряд результатов, характеризующих подобные базисы. Например,

Теорема 4. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — базисы соответственно в U и V. Необходимым и достаточным условием того, чтобы базисы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были подобными является следующее: для каждого положительного целого числа p существуют соответственно целые положительные числа q и j, а также число $M>0$ такие, что для каждой конечной последовательности чисел $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k$ выполняются неравенства

$$u_p\left(\sum_{n=j}^k a_n x_n\right) \leqslant M v_q\left(\sum_{n=j}^k a_n y_n\right),$$
$$v_p\left(\sum_{n=j}^k a_n y_n\right) \leqslant M u_q\left(\sum_{n=j}^k a_n x_n\right).$$

Соответствующая теория развивается для пространств, допускающих базисы абсолютной сходимости. Под этим автор понимает пространства U, имеющие такие базисы $\{x_n\}$, что

$$\sum_{n=1}^\infty u_q(a_n x_n)<\infty,\ q=1,2,\ldots,$$

для всех точек

$$\sum_{n=1}^\infty a_n x_n \in U.$$

В этом случае теория значительно упрощается.

Ю. А. Казьмин

2855. **Деление на голоморфную функцию на комплексном аналитическом многообразии. Шварц** (Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe. Schwarz Laurent. Summa brasil. math., 1955, **3**, № 9, p. 181—209) (франц.)

Возможность деления дистрибуции (обобщенной функции) на бесконечно дифференцируемую функцию была доказана автором в его известной монографии при значительном ограничении на характер обращения делителя в нуль. Из результатов данной статьи вытекает, в частности, что на связном комплексном n-мерном (в смысле комплексной размерности) аналитическом многообразии V деление на голоморфную функцию $H\not\equiv 0$ всегда возможно. Это следует из основной теоремы 1: Если $\{H_\nu\}$, $\{\varphi_\nu\}$—последовательности (или фильтры) функций, причем H_ν голоморфны на V, а $\varphi_\nu\in E(V)$ (при обычных обозначениях автора;) и $H_\nu\to H\not\equiv 0$, $H_\nu\varphi_\nu\to 0$ (в смысле $E(V)$), то $\varphi_\nu\to 0$ (в смысле $E(V)$). Доказательство ее основано на „подготовительной теореме" Вейерштрасса и на оценке производных функций вида $P\varphi$, где $\varphi\in E$, а P— фиксированный многочлен. Из теоремы 1 выводятся также утверждения, формулируемые в терминах классического анализа. Отметим, например, следующие: Если $\alpha\in E(V)$, то для $\alpha/H\in E(V)$ необходима и достаточна делимость соответствующих формальных степенных рядов в каждой точке V; если $\alpha H_1/H_2\in E(V)$, а H_1 и H_2 взаимно простые вблизи каждой точки $a\in V$, то $\alpha/H_2\in E(V)$; если $\alpha\in E(V)$ и $\alpha/H\in E(V\setminus S)$, где S—аналитическое множество размерности (комплексной) $\leqslant n-2$, то $\alpha/H\in E(V)$. Аналогичные утверждения доказываются для семимероморфных дифференциальных форм, введенных автором ранее (РЖМат, 1959, 835). Сформулированы некоторые проблемы в данном направлении. В добавлениях приведено, в частности, доказательство Гротендика теоремы о том, что фактор-кольцо кольца $E(R^N)$ (R^N — евклидово пространство) по идеалу функций, имеющих в O нуль бесконечного порядка, изоморфно алгебре формальных степенных рядов по $x_1,\ldots,x_N$.

А. Д. Мышкис

2856. **О рефлексивности пространства распределений. Иосида** (On the reflexivity of the space of distribution. Yosida Kôsaku), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1957, **7**, № 2, 151—155 (англ.)

Пусть $f(x)$—заданная на n-мерном евклидовом пространстве R_n функция, равная нулю вне некоторого ограниченного множества и обладающая производными всех порядков. Совокупность всех таких функций обозначим через D_{R_n}. Сходимость в D_{R_n} определим обычным в теории обобщенных функций способом. Пусть D'_{R_n} —пространство, сопряженное к D_{R_n}, а D''_{R_n} — сопряженное к D'_{R_n}. В статье доказывается, что для каждого функционала $F(T)\in D''_{R_n}$ существует такая функция $f(x)\in D_{R_n}$, что $F(T)=T(f)$. Доказательство проводится методами теории гильбертовых пространств.

М. С. Бродский

2857. **Об одном классе обобщенных функций. Шапиро З. Я.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 205—212

Над пространством K-финитных бесконечно дифференцируемых функций n-переменных (основные функции определяются функционалы (обобщенные функции)

$$\delta(P_1,\ldots,P_k),\frac{\partial^m\delta(P_1,\ldots,P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1},\ldots,\partial P_k^{\alpha_k}}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=m,k\leqslant n), \quad (1)$$

где $P_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Предполагается, что поверхности $P_i=0$ не имеют особых точек и в окрестности любой точки пространства можно произвести преобразование с отличным от нуля якобианом к новым координатам u_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ таким, что $u_i=\xi_i$ для $1\leqslant i\leqslant k$.

Функционалы (1) определяются как интегралы от дифференциальных форм по $n-k$-мерному многообразию $W: P_i(x_1, \ldots, x_n)=0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$;

$$(\delta(P_1, \ldots, P_k), \varphi) = \int_W \omega\varphi = \int_W \omega_{0,0,\ldots,0};$$

$$\left(\frac{\partial^m \delta(P_1, \ldots, P_k)}{\partial P_1^{\alpha_1} \ldots \partial P_k^{\alpha_k}}, \varphi\right) = (-1)^m \int_W \omega_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \quad (\varphi \in K). \quad (2)$$

Дифференциальные формы $\omega_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ последовательно определяются равенствами

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = dP_1\, dP_2 \ldots dP_k\, \omega;\ \omega_{0,0,\ldots,0} = \omega\varphi,$$

$$d(dP_2 dP_3 \ldots dP_k\, \omega_{0,0,\ldots,0}) = dP_1\, dP_2 \ldots dP_k\, \omega_{1,0,\ldots,0}, \quad (3)$$

$$d(dP_1\, dP_3 \ldots dP_k\, \omega_{0,0,\ldots,0}) = dP_1\, dP_2 \ldots dP_k\, \omega_{0,1,\ldots,0}.$$

Здесь под произведением форм и дифференциалом формы принимаются внешнее произведение и внешний дифференциал.

Несмотря на то, что формы $\omega_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ определяются равенствами (3) неоднозначно, равенства (2) определяют обобщенные функции (1) единственным образом.

Приведены некоторые соотношения для функций (1), а также обобщение приведенной конструкции на случай, когда поверхности $P_i=0$ имеют особенности.

В частном случае $P_i \equiv x_i$ функции (1) переходят в хорошо известные функции

$$\delta(x_1, \ldots, x_k), \frac{\partial^m \delta(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_k^{\alpha_k}},$$

$$(\delta(x_1, \ldots, x_k), \varphi) = \int \varphi(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n,$$

$$\left(\frac{\partial^m \delta(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_k^{\alpha_k}}, \varphi\right) =$$

$$= (-1)^m \int \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_k^{\alpha_k}} \varphi(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n.$$

Для случая одного аргумента функции $\delta(P), \delta^m(P)$ были ранее введены автором и И. М. Гельфандом. Подробное изложение этого случая, а также необходимые сведения по дифференциальным формам изложены в первом выпуске монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, Обобщенные функции и действия над ними (М., Гос. изд.-во физ.-матем. лит. 1958) Г. И. Кац

2858. О характеристическом свойстве преобразования Фурье распределений. Василаке (Sur la caractérisation de la transformation de Fourier des distributions. Vasilache Serge), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 20, 2836—2838 (франц.)

Обозначения те же, что и в книге Л. Шварца (РЖМат, 1957, 6506) (рукописные буквы заменены готическими). Единственным линейным слабо непрерывным преобразованием K пространства $\mathfrak{E}'_y$ в пространство $\mathfrak{D}'_x$, удовлетворяющим условиям

$$K\left(\frac{\partial T}{\partial y_j}\right) = (ix_j)(K \cdot T) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и переводящим дельта-функцию в функцию, тождественно равную единице, является преобразование Фурье. Утверждение доказывается для n-мерного случая.

Ю. Л. Шмульян

2859. Об обобщении понятия функции. Сато (On a generalization of the concept of functions. Sato Mikio), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 3, 126—130 (англ.)

Пусть N — локально компактное подмножество вещественной прямой, $\mathfrak{D}(N) = \{D\}$ — семейство его окрестностей в комплексной плоскости. Через $\mathfrak{A}(G)$ обозначается множество функций, голоморфных в области G. A_N — индуктивный предел $\mathfrak{A}(D-N)$, $D \in \mathfrak{D}(N)$, A_N — индуктивный предел $\mathfrak{A}(D)$, $D \in \mathfrak{D}(N)$. Элементы фактор-пространства $B_N = \widetilde{A}_N / A_N$ называются гиперфункциями (г. ф.). Г. Ф. $g(x)$ представляется в виде $\varphi(x+i0) - \varphi(x-i0)$, где $\varphi(z) \in \mathfrak{A}(D-N)$ для некоторого $D \in \mathfrak{D}(N)$. Операции сложения, умножения на число и на функцию $\in A_N$ и дифференцирования г. ф. $g(x)$ определяются через соответствующие операции над $\varphi(z)$. В случае компактного N вводится интегрирование г. ф. по N. Для г. ф. вводится понятие носителя. Указывается на связь г. ф. с распределениями Л. Шварца: всякое распределение есть некоторая г. ф. Доказательства не приводятся. Автор отмечает, что некоторые результаты статьи, в том числе и определение г. ф., имеются в работе Кёте (Köthe G., Math. Z., 1952, **57**). Ю. Л. Шмульян

2860. Об аналитическом продолжении обобщенных функций. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 1, 15—48

Пусть x — точка вещественного пространства R_4, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. k — точка комплексного пространства C_4, $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$, $k = p + iq$. Символами $x \lesssim 0$, $x \gtrsim 0$ обозначим области: $x \lesssim 0$, если $x_0 < 0$ или $|x_0| < |\vec{x}|$, $x \gtrsim 0$, если $x_0 > 0$ или $|x_0| < |\vec{x}|$.

Для обобщенных функций $F_r(x)$ и $F_a(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, обращающихся в нуль соответственно при $x \lesssim 0$ и $x \gtrsim 0$, преобразования Фурье которых $\widetilde{F}_j(p)$, $j = r, a$, совпадают в некоторой области G^0, доказывается существование функции комплексных переменных $k_0, \ldots, k_3$, аналитической в некоторой области G и совпадающей с $F_j(p)$ при вещественных p из G^0. Вид области G зависит от вида области G^0. Так, например, если область G^0 определена неравенством

$$a < p_0 < b,\ 0 < |\vec{p}| < \infty,$$

то область G определена неравенством

$$|\operatorname{Im} \vec{k}| < |\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}|.$$

С помощью сформулированного выше результата авторы доказывают затем фундаментальную теорему III (формулировка которой не может быть здесь приведена из-за отсутствия места), которая находит применение в квантовой теории поля при выводе дисперсионных соотношений (Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957, гл. IX; РЖФиз, 1958, 9980).

Следует отметить, что методы реферируемой работы являются дальнейшим развитием метода, предложенного Н. Н. Боголюбовым в работе: Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Ширков Д. В.; Вопросы теории дисперсионных соотношений (в печати). Эти методы находятся в тесной связи с классической задачей теории функций многих комплексных переменных об определении оболочки регулярности (Bremermann H., Oehme R., Taylor J., Phys. Rev., 1958, **109**, № 6, 2179—2190; РЖФиз, 1959, 2542). О. С. Парасюк

2861. О векторных отображениях. Трев (Sur les correspondances vectorielles. Trèves François), C. r. Acad., sci., 1957, **245**, № 15, 1200—1203; № 16, 1288—1291 (франц.)

Рассматривается множество отображений линейного пространства E на линейное нормированное пространство F. Вводится понятие „доминирования" одного отображения над другим. Именно, отображение S доминирует над T, если для любого ε найдется оператор A в пространстве F, ограниченный вместе со своим обратным, такой что $\|A(Tx)\| \leqslant \varepsilon \|A(Sx)\|$ для всех $x \in E$. Вводятся дальнейшие, связанные с этим понятия — равномерного доминирования множества отображений и т. п. Высказываются

некоторые простые предложения, относящиеся к этим понятиям. Далее, эти определения и теоремы прилагаются к дифференциальным операторам в некоторых пространствах обобщенных функций. Пусть $P(y^0, D)$, $Q_j(y^0, D)$ — полиномы от переменных $y^0 = (y^0_1, \ldots, y^0_\nu)$ и операторов дифференцирования D по другим переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $P(x, y^0, D) = P(y^0, D) + \sum_{j=i}^{r} a_j(x) Q_j(y^0, D)$.

Если слагаемое $P(y^0, D)$ доминирует над остальными, то одна из теорем позволяет оценивать определенным образом введенную норму $\| P(y^0, D) T \|$, где $T(y^0, x)$ — обобщенная функция из заданного класса, через норму функции $P(x, y^0, D) T$. Утверждается, что этот факт позволяет доказывать обратимость дифференциальных операторов в некоторых пространствах обобщенных функций.

Л. А. Дикий

2862. Доминирование и краевые задачи смешанного типа. Трев (Domination et problèmes aux limites de type mixte. Trèves François), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 26, 2454—2457 (франц.)

К дифференциально-операторным уравнениям в гильбертовом пространстве применяется понятие доминирования, рассмотренное автором ранее (реф. 2861). Пусть гильбертово пространство V непрерывно включено в гильбертово пространство H^0 и плотно в последнем. Рассматривается уравнение

$$a(t; \vec{f}, \nu) + \left(\sum_{r=-\mu}^{m} B_r(t) D^r \vec{f}, \nu \right)_{H_0} = (\vec{g}, \nu)_{H_0}$$

(для всех $\nu \in V$; $m = 1$ или 2; $-\infty < t < \infty$). (1)

Здесь: 1) заданная форма $a(t; \vec{f}, \nu) \in \mathfrak{E}_t$ (обозначения Шварца — рукописные буквы заменены готическими.) первоначально определена на $V \times V$ и для некоторых вещественных $\lambda(t) \in \mathfrak{E}_t$ и $\alpha(t) \in \mathfrak{E}_t$ ($\alpha > 0$) удовлетворяет неравенству $\mathrm{Re}\left[a(t; u, u) + \lambda \| u \|^2_V\right] \geqslant \alpha \|u\|^2_V$ (для любых u и t), а затем продолжена; при $m = 2$ эта форма эрмитова; 2) операторные коэффициенты $B_r(t)$ ограничены и бесконечно гладкие по t, причем оператор $B_m(t)$ эрмитов и $(B_m(t) u, u) \geqslant \alpha \| u \|^2$; $D = \partial/\partial t$. При этих условиях для любого целого k существуют g_k, $L_k \in \mathfrak{E}_t$ ($L_k \geqslant 0$, $g_k \geqslant 1 + |L'_k|$), для которых при любых $p \in \mathfrak{E}_t$ ($p' \geqslant g_k$) и $\vec{g} \in \mathfrak{D}^k(p; H^0)$ (см. ниже) существует одно и только одно решение $\vec{f}$ уравнения (1) в классе $\mathfrak{D}^k(p + L_k; V)$. При этом

$$\vec{f} \in \mathfrak{D}^{k+m-1}(p + L_k; H^0); \quad \| \vec{f} \|_{\mathfrak{D}_k(p + L_k; V)} + \| \vec{f} \|_{\mathfrak{D}^{k+m-1}(p+L_k; H^0)} \leqslant \| \vec{g} \|_{\mathfrak{D}^k(p; H^0)}$$

и под $\mathfrak{D}^k(p; E)$ понимается пополнение множества основных функций со значениями в E по норме $\int (e^{-pt} D^k \vec{\varphi}, e^{-pt} D^k \varphi)_E \, dt$. Аналогичное утверждение справедливо для полубесконечного интервала t. Эти утверждения основаны на леммах, представляющих самостоятельный интерес. Доказательства не приведены.

А. Д. Мышкис

2863. Собственные значения обобщенных матриц Тёплица. Дьиреш (Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen. Gyires B.), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 171—179 (нем.)

Рассматриваются так называемые функциональные матрицы, т. е. квадратные матрицы порядка p, элементами которых служат вещественные или комплексные периодические функции действительной переменной x с периодом 2π.

Функциональные матрицы называются тригонометрическими полиномиальными (соответственно ограниченными, интегрируемыми, непрерывными), если их элементами являются тригонометрические полиномы (соответственно ограниченные, интегрируемые, непрерывные функции). Естественным образом (через одноименные операции или соотношения между каждой парой соответствующих элементов) определяются неравенства между функциональными матрицами, модуль и интеграл от функциональной матрицы, а также сходимость последовательности таких матриц.

Если $f(x)$ — интегрируемая функциональная матрица, а

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то матрица

$$T_n(f) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \ldots & c_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \ldots & c_0 \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

порядка $(n+1)p$ называется n-й обобщенной тёплицевой матрицей, порожденной функциональной матрицей $f(x)$.

Пусть $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_p(x)$ — собственные числа $f(x)$, а $\lambda^{(n)}_{\nu k}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, p$; $n = 0, 1, 2, \ldots$) — собственные числа $T_n(f)$. Основной результат:

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная эрмитова функциональная матрица, собственные числа которой удовлетворяют неравенствам

$$m \leqslant \lambda_k(x) \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots, p; \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

Тогда и для собственных чисел матрицы $T_n(f)$ справедливы неравенства

$$m \leqslant \lambda^{(n)}_{\nu k} \leqslant M \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, p; \; n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и для всякой непрерывной в интервале $m \leqslant \lambda \leqslant M$ функции $F(\lambda)$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=1}^{p} F(\lambda^{(n)}_{\nu k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(\lambda_1(x)) + \ldots + F(\lambda_p(x))] dx.$$

При доказательстве используется следующее обобщение одной теоремы Тёплица:

Теорема 2. Пусть функции $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_p(x)$ суть корни характеристического уравнения эрмитовой тригонометрической полиномиальной матрицы $\varphi(x)$, а α — произвольная вещественная константа. Обозначим через f_n, соответственно g_n, число тех собственных чисел матрицы $T_n(\varphi)$, которые не меньше, соответственно меньше, чем α. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{n+1} = \frac{s_1(\alpha) + \ldots + s_p(\alpha)}{2\pi}; \quad \lim_{n \to \infty} \frac{g_n}{n+1} = \frac{r_1(\alpha) + \ldots + r_p(\alpha)}{2\pi},$$

где $s_k(\alpha)$, соответственно $r_k(\alpha)$, есть сумма длин тех частичных интервалов из $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, для которых $\lambda_k(x) \geqslant \alpha$, соответственно $\lambda_k(x) < \alpha$ ($k = 1, 2, \ldots, p$).

Из теоремы 1 следует обобщение одного результата полученного Сегё для случая $p = 1$.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — функциональная матрица, удовлетворяющая тем же условиям, что и в теореме 1, а α, β ($\alpha < \beta$) — две действительные константы.

Если множество тех значений x, для которых

$$\alpha < \lambda_k(x) < \beta \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

непусто, то для достаточно больших n хотя бы одно из собственных чисел $T_n(f)$ попадет в интервал $\alpha < x < \beta$

Отсюда вытекают такие следствия:

1. Если $\lambda_\alpha^{(n)}$, $\lambda_\omega^{(n)}$ суть соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа $T_n(f)$ и

$$\inf_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}\lambda_k(x)=m_k,\qquad \sup_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}\lambda_k(x)=M_k\quad(k=1,\ldots,p),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_\alpha^{(n)}=m,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_\omega^{(n)}=M,$$

где

$$m=\min_k m_k,\quad M=\max_k M_k.$$

2. Собственные числа $T_n(f)$ образуют множество, всюду плотное в интервалах $m_k\leqslant\lambda\leqslant M_k$ $(k=1, 2,\ldots,p)$.

И. С. Иохвидов

2864. Кольца бесконечных матриц. Грин (Rings of infinite matrices. Green H. F.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 33, 73 (англ.)

Пусть $\Sigma(\alpha)$ — множество всех бесконечных матриц, преобразующих пространство α последовательностей в себя так, что получающиеся ряды сходятся абсолютно. Доказывается, что если $\alpha\supseteq\varphi$ (φ — пространство всех финитных последовательностей) и $\Sigma(\alpha)$ замкнуто относительно умножения, то $\Sigma(\alpha)$ — кольцо.

М. А. Наймарк

2865. Обобщенные «дуальные» пространства последовательностей. Чиллингуэрт (Generalised «dual» sequence spaces. Chillingworth H. R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 3, 307—315; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 307—315 (англ.)

Пусть α — пространство последовательностей $x=\{x_i\}$. Автор предлагает называть обобщенным дуальным пространством для α множество α^+ всех последовательностей $y=\{y_i\}$ таких, что ряд $\Sigma_i x_i y_i$ сходится для каждого $x\in\alpha$ (в существующей теории обычно требуют абсолютной сходимости этого ряда; см., например, РЖМат, 1957, 4170). В работе доказано 16 теорем. Большинство из них являются модификациями теорем книги Кука (Cooke R. G., Infinite matrices and sequence spaces, London, 1950), к которой автор и отсылает читателя для сравнения результатов и ознакомления с употребляемыми обозначениями и определениями.

В. Н. Никольский

2866. Определение точек банахова пространства посредством их расстояний от точек заданного множества. Калиш, Страус (On the determination of points in a Banach space by their distances from the points of a given set. Kalisch G. K., Straus E. G.), Anais Acad. brasil. ciênc., 1957, **29**, № 4, 501—519 (англ.)

Множество U, принадлежащее банахову пространству L, называется определяющим, если всякая точка $x\in L$ однозначно определена, коль скоро известны все расстояния от x до точек из U. Во введении (§ 1) отмечаются некоторые очевидные свойства определяющих множеств и доказывается теорема, в которой с помощью понятия определяющего множества сформулировано необходимое и достаточное условие для того, чтобы пространство L было гильбертовым. В § 2 изложены некоторые вспомогательные сведения о выпуклых множествах. В § 3 доказывается ряд теорем о множестве $E(x,y)$, состоящем из точек, одинаково удаленных от заданных точек x и y; как следствие этих теорем устанавливается ряд предложений об определяющих множествах. В § 4 строится некоторое минимальное определяющее множество для класса пространств последовательностей, включающего пространства l^p $(1<p<\infty)$. В § 5 рассматривается вещественное пространство $L^p[0,1]$ $(1<p<\infty)$; доказывается, что если c_1 — характеристическая функция произвольного частичного интервала и a_1 — произвольное вещественное число $\neq 0$, то множество $U=\{0, a_1 c_1\}$ является определяющим в L^p.

С. Н. Крачковский

2867. Квазирефлексивные пространства. Сивин, Юд (Quasi-reflexive spaces. Civin Paul, Yood Bertram), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 5, 906—911 (англ.)

Авторы называют нормированное пространство X квазирефлексивным, если $X^{**}/\pi(X)$ конечномерно (π — естественное отображение X в X^{**}).

Для квазирефлексивности нормированного пространства X необходимо и достаточно, чтобы его единичная сфера по отношению к некоторой эквивалентной норме была бикомпактна в слабой топологии, порожденной функционалами из тотального линейного подпространства в X^*. Пространства X и X^* могут быть квазирефлексивны только одновременно, и при этом $X^{**}/\pi(X)$ и $X^{***}/\pi(X^*)$ имеет одинаковую размерность.

Всякое квазирефлексивное пространство изоморфно второму сопряженному к некоторому нормированному пространству и, следовательно, при любом n является сопряженным порядка n к некоторому B-пространству. Приводятся другие свойства квазирефлексивных пространств.

Б. М. Макаров

2868. Замечание относительно выпуклости связного множества. Тамура (Remarks on the convexity of connected sets. Tamura Takayuki), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1953, **3**, Febr., 24—27 (англ.)

Множество M вещественного сепарабельного банахова пространства Ω называется однородным, если для каждой пары x, $y\in\overline{M}$ и каждой пары ε, $\varepsilon'>0$ совпадают подпространства, натянутые соответственно на множество $U_\varepsilon(x)\cap M$ и $U_{\varepsilon'}(y)\cap M$. При помощи понятия однородности множества автором получены при меньших ограничениях некоторые факты, установленные ранее.

Основным результатом работы является:

Теорема. Если M связно и локально выпукло, то множество M^i относительно внутренних точек множества M выпукло.

Точка x называется относительно внутренней точкой множества M, если x является внутренней точкой множества M в подпространстве S, натянутом на M.

И. А. Бахтин

2869. Биортогональные системы в банаховых пространствах. Фогел (Biorthogonal systems in Banach spaces. Foguel S. R.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 2, 1065—1072 (англ.)

Рассматриваются биортогональные системы $\{x_n, f_n\}_{n=1}^\infty$ в B-пространствах (предполагается, что $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ есть фундаментальное множество и $\|x_n\|=1$, $n=1,2\ldots$); исследуется вопрос, при каких условиях такая система будет регулярной, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ будет базисом.

Пусть $\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)x_i$, $|||x|||=\sup_n\|\varphi_n(x)\|$ и пусть $\psi_n(x)=\sum_{i=1}^n a_i^{(n)}x_i$ — ближайший к x элемент линейной оболочки точек $x_1, x_2,\ldots x_n$.

Теорема 4. Биортогональная система регулярна тогда и только тогда, когда последовательность $\{|||\psi_n(x)|||\}_{n=1}^\infty$ ограничена при каждом x.

Указывается ряд критериев регулярности биортогональных систем в случае гильбертовых пространств. В частности, система $\{x_n, f_n\}_{n=1}^\infty$ регулярна, если $\sum_{i\neq j}|(x_i, x_j)|<$

$< +\infty$. Если при этом $\sup_n \| f_n \| < +\infty$, то $\sum_i |f_i(x)|^2 < +\infty$. Условие $\sup_n \| f_n \| < +\infty$ необходимо и достаточно для регулярности системы, если $(x_i, x_j) = 0$ при $|i - j| > N$. Б. М. Макаров

2870. Соотношения между слабой безусловной сходимостью и слабой полнотой банаховых пространств. Пелчинский (A connection between weakly unconditional convergence and weakly completeness of Banach spaces. Pełczyński A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 4, 251—253 (англ.; рез. русск.)

Пусть X — банахово пространство, X^* — его сопряженное. Пространство X обладает свойством (u), если для каждой слабо сходящейся последовательности $(x_n) \subset X$ существует последовательность $(y_n) \subset X$ такая, что а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ слабо безусловно сходится, б) последовательность $x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i$ слабо сходится к 0.

Предложение 1. Если пространство X обладает свойством (u) и слабая безусловная сходимость в X эквивалентна безусловной сходимости, то X слабо полно.

Теорема 1. Если X обладает свойством (u), то для слабой полноты X необходимо и достаточно, чтобы X не содержало подпространства, изоморфного c_0.

Указывается ряд услозий, при которых X обладает свойством (u). Например: Всякое слабо полное пространство, в частности, всякое рефлексивное пространство, или пространство с абсолютным базисом, обладает свойством (u).

Однако пространство C — всех вещественных непрерывных функций на $[0, 1]$ свойством (u) не обладает. Отсюда следует, что C не может быть вложено в банахово пространство с абсолютным базисом.

Далее в работе с помощью некоторой операции „u^*-замыкания" дается признак слабой полноты сопряженного пространства — X^*, из которого вытекает

Следствие 5. Если пространство X обладает свойством (u) и каждое ограниченное множество в X условно слабо компактно, то X^* слабо полно.

Доказательства не приведены. Л. В. Флоринская

2871. О голоморфных оператор-функциях. Маркус А. С., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1099—1102

Пусть G — открытая связная область комплексной плоскости, A_λ — голоморфная в G операторная функция, значения которой суть линейные замкнутые операторы, действующие из одного комплексного банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в другое $\mathfrak{B}_2$, $\alpha(A_\lambda)$ — размерность подпространства $\mathfrak{Z}(A_\lambda)$ нулей оператора A_λ, $\beta(A_\lambda)$ — размерность ортогонального к $\mathfrak{Z}(A_\lambda)$ дополнения в сопряженном пространстве $\mathfrak{B}_2^*$; говорят, что A_λ есть Φ_+ (соответственно Φ_-) оператор, если A_λ нормально разрешим, $\alpha(A_\lambda) < \infty$, $\beta(A_\lambda) = \infty$ (соответственно $\alpha(A_\lambda) = \infty$, $\beta(A_\lambda) < \infty$). Пусть в окрестности точки $\lambda_0 \in G$ имеет место разложение $A_\lambda = A_{\lambda_0} + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i C_i$; для произвольного $x_0 \in \mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$ рассматриваются целые числа $\mu \geqslant 0$ такие, что каждому из них отвечают векторы $x_{\mu 0} = x_0, x_{\mu 1}, \ldots x_{\mu\mu}$, удовлетворяющие условиям $\sum_{i=0}^{k} C_i x_{\mu k-i} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, \mu)$, где $C_0 = A_{\lambda_0}$; наибольшее из чисел μ обозначается через $\mu(x_0, A_{\lambda_0})$, если наибольшего μ нет, то $\mu(x_0, A_{\lambda_0}) = \infty$. Подпространство, состоящее из всевозможных векторов x, для которых $\mu(x, A_{\lambda_0}) = \infty$, обозначается через $\mathfrak{N}(A_{\lambda_0})$; очевидно, $\mathfrak{N}(A_{\lambda_0}) \subset \mathfrak{Z}(A_{\lambda_0})$.

Доказывается следующее предложение, обобщающее некоторые результаты того же автора и других авторов: Пусть A_λ есть Φ_+ (соответственно Φ_-)-оператор для всех точек $\lambda \in G$. Тогда в G существует изолированное множество S такое, что $\alpha(A_\lambda)$ (соответственно $\beta(A_\lambda)$) имеет на $G - S$ постоянное значение α_0 (соответственно β_0), тогда как на S значение $\alpha(A_\lambda) > \alpha_0$ (соответственно $\beta(A_\lambda) > \beta_0$). Кроме того, $\dim \mathfrak{N}(A_\lambda) = \alpha_0$ всюду на G (соответственно $\mathfrak{N}(A_\lambda) = \mathfrak{Z}(A_\lambda)$ всюду на $G - S$).

С. Н. Крачковский

2872. Корень и логарифм от элементов комплексной банаховой алгебры. Хилле (On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra. Hille Einar), Math. Ann., 1958, **136**, № 1, 46—57 (англ.)

Рассматривается комплексная, некоммутативная банахова алгебра B с единицей e. Корнем k-й степени из элемента $a \in B$ называется элемент $x \in B$ такой, что $x^k = a$. Множество элементов B, имеющих корень k-й степени, обозначается через R_k. Через $\sigma(x)$ обозначается спектр элемента x.

Пусть a — регулярный элемент из R_k, а x — решение уравнения $x^k = a$. Спектр $\sigma(x)$ называется ирротациональным (mod $2\pi/k$), если

$$\sigma(x) \cap \sigma(\omega^j x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1 \quad \text{для} \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

Теорема 1. Пусть x_1 и x_2 — два различных корня k-й степени из a и пусть $\sigma(x_1)$ ирротационален (mod$2\pi/k$). Тогда x_1 и x_2 коммутируют и существует k идемпотентных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, часть которых может быть нулями, таких что e_α коммутируют с x_1 и x_2 и

$$x_1 x_2^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega^\alpha e_\alpha, \quad e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{k} e_\alpha = e.$$

Теорема 2. Если a — регулярный элемент, $a = b^k$ и $\sigma(b)$ ирротационален (mod $2\pi/k$), то a есть внутренняя точка множества R_k.

Теорема 2 останется справедливой, если требование ирротациональности (mod $2\pi/k$) заменить другим, менее ограничительным для $\sigma(b)$ — возможностью секторизовать (mod$2\pi/k$). Последнее означает, что существует спрямляемая дуга C, соединяющая точку $\lambda = 0$ с далекой точкой плоскости λ, такая, что k дуг $C, \omega C, \ldots, \omega^{k-1} C$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ не содержат точек $\sigma(b)$.

Логарифмом элемента $a \in B$ называется элемент $y \in B$ такой, что

$$\exp(y) = a.$$

Множество элементов из B, имеющих логарифм, обозначается через L.

Пусть $a \in L$ и y — решение уравнения $\exp(y) = a$. Спектр $\sigma(y)$ называется инконгруэнтным (mod$2\pi i$), если

$$\sigma(y) \cap [\sigma(y) + 2k\pi i] = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Теорема 3. Пусть y_1 и y_2 — два различных логарифма от a и пусть $\sigma(y_1)$ инконгруэнтен (mod$2\pi i$). Тогда y_1 и y_2 коммутируют и существует n идемпотентных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, коммутирующих с y_1 и y_2, и n различных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ таких, что

$$y_1 - y_2 = 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha e_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha = e, \quad e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha .$$

Теорема 4. Пусть b — логарифм элемента a и $\sigma(b)$ инконгруэнтен (mod $2\pi i$), тогда a — внутренняя точка L.

Теорема 4 остается справедливой, если требование инконгруэнтности (mod $2\pi i$) для $\sigma(b)$ заменить другим, менее ограничительным условием для $\sigma(b)$ — возможностью наслоить $\sigma(b)$ mod $(2\pi i)$. Последнее означает, что существуют спрямляемые дуги $C_1, C_2, \ldots, C_n$ со следующими свойствами:

1) $C_\alpha = C_{\alpha-1} + 2\pi i$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$,

2) каждая вертикаль в плоскости λ пересекает C_0 в одной и только одной точке,

3) $\sigma(b)$ расположен в криволинейном четырехугольнике, стороны которого C_0, C_n и две вертикали, причем дуги C_α не содержат точек $\sigma(b)$.

Приводится пример, показывающий важность условия ирротациональности (mod $2\pi/k$) в теореме 1. В ходе доказательства теорем используются теория функций на максимальных идеалах Гельфанда, абстрактная теорема о неявных функциях и свойства резольвентных элементов.

В. А. Треногин

2873. Обобщение теоремы Уитни об идеалах дифференцируемых функций. Нахбин (A generalization of Whitney's theorem on ideals of differentiable functions. Nachbin Leopoldo), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 10, 935—937 (англ.)

Обобщается следующая теорема Уитни: Пусть V_m^n — n-дифференцируемое m-мерное многообразие, E — алгебра вещественных n-кратко дифференцируемых на V_m^n функций с топологией, равномерной на каждом компакте сходимости функций и их производных до порядка n; $I(x)$ — идеал в E, состоящий из всех $f \in E$, равных нулю вместе со своими производными до порядка n в точке $x \in V_m^n$; F — идеал в E. $F = \bigcap_{x \in V_m^n} [F + I(x)]$ в том и только в том случае, когда F замкнут (Whitney H., Amer. J. Math., 1948, **70**, 635—658).

Пусть E — вещественное линейное топологическое пространство; A — некоторая алгебра операторов, действующих из E в E, C — семейство коммутативных алгебр с единицей над полем вещественных чисел размерности, не большей фиксированного k, причем каждая из алгебр, входящих в C, имеет единственный максимальный идеал дефекта 1; J — такое семейство идеалов в A, что при любом $I \in J$ $A/I \in C$. Обозначим IE подпространство E, состоящее из всех элементов вида Tx, где $T \in I$, $x \in E$, I — фиксированный элемент J. Предположим, что в E имеется такой базис выпуклых окрестностей нуля $\mathfrak{B}$, что а) если $V \in \mathfrak{B}$, то $V = \bigcap_{I \in J} (V + IE)$; б) для каждого $V \in \mathfrak{B}$ и $T \in A$ можно указать число $\lambda > 0$, обладающее свойством: $T(V) \subset \lambda V$.

Коэлементарным подпространством E называется замкнутое A-инвариантное собственное подпространство E, не являющееся пересечением замкнутых A-инвариантных подпространств, строго содержащих его. При сделанных предположениях каждое собственное A-инвариантное подпространство равно пересечению содержащих его коэлементарных подпространств. Всякое коэлементарное подпространство имеет дефект, не больший k, и содержится в единственном максимальном замкнутом A-инвариантном подпространстве. Всякое максимальное замкнутое A-инвариантное подпространство имеет дефект 1. Если $F \subset E$ — A-инвариантное подпространство, то $F = \bigcap_{I \in J} \overline{F + IE}$ тогда и только тогда, когда $F = \overline{F}$. Доказательства не приведены. В заключение рассмотрена связь полученных результатов с известной проблемой весовой аппроксимации С. Н. Бернштейна (см., например, РЖМат, 1958, 262 и 7628).

В. П. Хавин

2874. О теореме продолжения Уитни. Глезер (Sur le théorème du prolongement de Whitney. Glaeser Georges), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 6, 617—619 (франц.)

Пусть K — компактная ячейка в R^n. Тейлоровым полем порядка m, определенным на компакте $F \subset K$, называется отображение $A \to P_A$ $(A \in F)$ этого компакта в пространство полиномов n аргументов степени $\leqslant m$. Каждой функции f, определенной и непрерывно дифференцируемой m раз на k $(f \in \mathfrak{D}^m(k))$, можно сопоставить на K тейлорово поле $A \to T_A f$, где $T_A f$ — полином Тейлора функции f в точке A. Формулируются теоремы, усиливающие результаты Уитни (Whitney H., Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, №1, 63 — 89; Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, № 2, 78—81) об условиях для того, чтобы тейлорово поле на $F \subset K$ было полем полиномов Тейлора некоторой функции из $\mathfrak{D}^m(K)$. Рассматривается алгебра Уитни $\dot{W}^m(F)$, т. е. фактор-алгебра $\mathfrak{D}^m(K)/J^m(F)$ алгебры $\mathfrak{D}^m(K)$ по замкнутому в ней идеалу $J^m(F)$, состоящему из функций, обращающихся на $F \subset K$ в нуль, вместе со своими производными до порядка m включительно. Отмечается, что эта алгебра может быть отождествлена с множеством тейлоровых полей $A \to P_A = T_A f$ на F и что если положить

$$|||P|||_F^m = \|P\|_F^m + \sup \frac{|P_A(M) - P_B(M)|}{\{\|AB\| + \|AM\|\}^m}$$

(где $P \in W^m(F)$, $\|P\|_F^m$ — максимум модулей значений полинома P_A и его производных порядка $\leqslant m$ для всех A из F, $\|AB\|$ и $\|AM\|$ — евклидовы расстояния в R^n, sup берется по всем $M \in R^n$ и $A \neq B$ из F), то $W^m(F)$ является банаховой алгеброй с нормой $|||P|||_F^m$; формулируются необходимые и достаточные условия для того, чтобы нормы $\|P\|_F^m$ и $|||P|||_F^m$ в $W^m(F)$ были эквивалентны. Рассматриваются применения к построению некоторых функций.

С. Н. Крачковский

2875. Полунормированные векторные пространства с сопряженным интегрального типа. Морс, Трансью (Semi-normed vector spaces with duals of integral type. Morse Marston, Transue William), Итон леаналиса математит, J. analyse math., 1954—1955, **4**, № 1, 149—186 (англ.; рез. иврит., **4**, № 2, 5)

Пусть E — локально компактное топологическое пространство. Рассматривается векторное пространство $\mathfrak{K}_C$ всех непрерывных комплекснозначных функций на E с компактными носителями. Линейный функционал α на $\mathfrak{K}_C$ называется C-мерой, если он непрерывен относительно равномерной сходимости последовательности функций, носители которых содержатся в одном и том же компакте.

В первой части статьи изучают C-меры. Устанавливаются связи C-меры с обычными вещественными положительными мерами. В частности, каждой C-мере α сопоставляется положительная мера $|\alpha|$. Вводится векторное пространство $\mathfrak{F}_C^1(\alpha)$, состоящее из всех комплекснозначных функций x на E, для которых верхний интеграл

$$N_C^1[x, \alpha] = \int^* |x| \, d|\alpha| < \infty.$$

Функционал N_C^1 принимается за полунорму в $\mathfrak{F}_C^1(\alpha)$. Замыкание множества $\mathfrak{K}_C$ в пространстве $\mathfrak{F}_C^1(\alpha)$ обозначается через $\mathfrak{L}_C^1(\alpha)$. Поскольку функционал α непрерывен по

полунорме N_C^1, он допускает однозначное распространение на $\mathfrak{L}_C^1(\alpha)$. Сохраняя за распространенным функционалом то же обозначение α, пишут

$$\alpha(x) = \int x d\alpha \qquad (x \in \mathfrak{L}_C^1(\alpha)).$$

Во второй части рассматривается векторное пространство A комплекснозначных функций на E, снабженное нетривиальной монотонной полунормой $\mathfrak{N}^A$. Пространство A называется MT-пространством, если соблюдены два условия:

I. Множество $\mathfrak{K}_C$ содержится в A и плотно в A (по полунорме $\mathfrak{N}^A$). Вместе с x в A содержатся функции $|x|$ и комплексно-сопряженная $\bar{x}$.

Пусть η — произвольный линейный непрерывный функционал на A. Как легко видеть, рассматриваемый только на $\mathfrak{K}_C$ функционал η будет C-мерой, которую обозначают через $\hat{\eta}$.

II. Для любого $\eta \in A'$ должно быть $A \subset \mathfrak{L}_C^1(\hat{\eta})$ и $\eta(x) = \int x d\hat{\eta}$ $(x \in A)$.

Сопоставляя каждому $\eta \in A'$ порожденную им C-меру $\hat{\eta}$, получают нормированное пространство $\mathfrak{A}'$, изоморфное пространству A'. Пространство $\mathfrak{A}'$ характеризуется следующим образом. Для того чтобы $\alpha \in \mathfrak{A}'$, необходимо и достаточно, чтобы

$$G = \sup |\alpha(u)| < \infty \quad (u \in \mathfrak{K}_C; \mathfrak{N}^A(u) \leqslant 1);$$

при этом $\|\alpha\|_{\mathfrak{A}'} = G$.

Доказывается, что

$$\mathfrak{N}^A(x) = \sup \int |x| d|\alpha| \quad (x \in A),$$

где точная верхняя граница берется по единичной сфере в пространстве $\mathfrak{A}'$. Заменяя в последней формуле интеграл верхним интегралом, получают распространение полунормы $\mathfrak{N}^A$ на векторное пространство всех комплекснозначных функций на E. Множество функций, имеющих конечную полунорму, обозначается через $\mathfrak{F}^A$. Доказывается полнота пространства $\mathfrak{F}^A$ и ряд теорем, аналогов известных теорем теории функций о сходимости в среднем.

Два MT-пространства A и B называются сравнимыми, если $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{N}^A(f) = \mathfrak{N}^B(f)$ для любой $f \in \mathfrak{K}_C$. Устанавливается, что всякое пространство, сравнимое с A, есть векторное подпространство замыкания $\bar{A}$ пространства A в пространстве $\mathfrak{F}^A$ (по полунорме $\mathfrak{N}A$).

В заключение с указанной точки зрения рассматриваются пространства $\mathfrak{L}_C^1(\beta)$ и $\mathfrak{K}_C$. Г. П. Акилов

2876. О полугруппах преобразований Рейнольдса. Хиршфельд (Sur les semi-groupes de transformations de Reynolds. Hirschfeld Rudi), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 18, 1493—1495 (франц.)

Кампе де Ферье (РЖМат, 1957, 4189) предложена некоторая конструкция преобразований Рейнольдса в кольце измеримых функций. В настоящей статье доказано, что эти преобразования образуют коммутативную полугруппу. Если G — произвольная коммутативная полугруппа в пространстве измеримых функций, замкнутом относительно сходимости почти всюду, такая, что все операторы ограничены по норме одной константой (где норма операторов определяется по C-норме пространства функций), и непрерывных относительно сходимости почти всюду, то справедлива следующая теорема: Для всякой ограниченной измеримой функции f замкнутая выпуклая оболочка $\{Tf\}$, где T — все операторы из G, содержит одну и только одну функцию $\bar{f}$, инвариантную относительно T, т. е. $T\bar{f} = \bar{f}$. В заключение приводится теорема о разложении кольца измеримых функций, в котором действует коммутативная полугруппа преобразований Рейнольдса в прямую сумму подкольца инвариантных функций и множества функций аннигилирующихся преобразованиями Рейнольдса. Л. А. Дикий

2877. О тождественности некоторых функциональных простанств, заданных на декартовом произведении топологических пространств. Холлади (On the identity of function spaces on Cartesian product spaces. Holladay John C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 44—46 (англ.)

Пусть S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — компактное хаусдорфово пространство, $C(S_i)$ — банахово пространство всех непрерывных комплекснозначных функций, заданных на S_i, а F_i — некоторое замкнутое линейное подпространство в $C(S_i)$. На топологическом произведении S пространств S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ рассмотрим непрерывную функцию $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ $(s_i \in S_i)$, которая при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ и фиксированных $(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ принадлежит F_i. Совокупность всех таких функций обозначим через $F_1 * \ldots * F_n$. Через $F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$ обозначим множество функций на S, являющееся замыканием в равномерной норме пространства линейных комбинаций функций вида $\psi_1(s_1)\psi_2(s_2)\ldots\psi_n(s_n)$, где $\psi_i(s_i) \in F_i$. Указаны некоторые ограничения, при которых справедливо равенство $F_1 \otimes \ldots \otimes F_n = F_1 * \ldots * F_n$.

Доказана следующая теорема: Пусть G_i и F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — не нульмерные замкнутые подпространства пространства $C(S_i)$. Если G_i и F_i можно получить, присоединяя к их пересечению конечномерные подпространства, то из равенства $F_1 \otimes \ldots \otimes F_n = F_1 * \ldots * F_n$ следует равенство $G_1 \otimes \ldots \otimes G_n = G_1 * \ldots * G_n$. М. С. Бродский

2878. Об одном неравенстве для линейных операторов в гильбертовом пространстве. Хейнц (On an inequality for linear operators in a Hilbert space. Heinz Erhard), Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, 1955, № 387, 27—29 (англ.)

Доказывается следующее неравенство. Пусть A и B — самосопряженные неотрицательные операторы в гильбертовом пространстве, а D_A и D_B — их области определения. Если Q — некоторый линейный оператор в этом же пространстве, для которого выполняются условия

$$\|Qx\| \leqslant \|Ax\|, \quad \|Q^*y\| \leqslant \|By\| \quad (D_A \subset D_Q;\ D_B \subset D_{Q^*},$$

$x \in D_A$, $y \in D_B$), то $|(Qx, y)| \leqslant \|A^\sigma x\| \, \|B^{1-\sigma} y\|$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 1,\ x \in D_A,\ y \in D_B)$. М. С. Бродский

2879. Полнота и равенство Парсеваля. Омстед (Completeness and Parseval's equation. Olmsted John M. H.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 5, 343—345 (англ.)

Пусть L_2 и R_2 — пространства функций, суммируемых с квадратом на сегменте $[a, b]$ соответственно по Лебегу и по Риману, и пусть $\{\varphi_n\}_1^\infty$ — ортонормальная система в L_2. Известны следующие эквивалентные условия полноты системы $\{\varphi_n\}_1^\infty$ в L_2.

1. Для любой функции $f \in L_2$ ее ряд Фурье $f \sim \sum \alpha_n \varphi_n$ сходится к ней в среднем

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n - f \right\| = 0.$$

2. Конечные линейные комбинации из функций системы $\{\varphi_n\}_1^\infty$ всюду плотны в L_2.

3. Для каждой функции $f \in L_2$ выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \| f \|^2.$$

4. Последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$ максимальна в том смысле, что нет более обширной ортогональной системы, содержащей $\{\varphi_n\}_1^\infty$.

5. Единственный элемент из L_2, ортогональный к каждому члену системы $\{\varphi_n\}_1^\infty$, есть нуль.

6. Каждая функция из L_2 единственным образом определяется ее коэффициентами Фурье.

Ставится вопрос: какие из 6 вышеперечисленных условий в R_2 эквивалентны и какие есть следствия других?

Справедливо

$$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Rightarrow 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6, \text{ но}$$
$$3 \Leftarrow 4$$

(последнее является основным результатом заметки).

То же имеет место для всякого неполного подпространства $\subset L_2$. Другими словами, равенство Парсеваля есть следствие полноты ортонормальной системы только при наличии полноты рассматриваемого линейного пространства.

Ю. А. Казьмин

2880. Класс нормализуемых линейных преобразований. Чжан Ши-сюнь (Chang Shih-hsun), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1956, № 2, 1—30 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $H \neq 0$ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$.

Ограниченный линейный оператор K в $\mathfrak{H}$ называется нормализуемым относительно H, т. е. H K-нормален, если выполнено равенство $(HK)(HK)^* = (HK)^*(HK)$.

Далее K называется вполне нормализуемым преобразованием, если $Hf \neq 0$ для всех $f \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих $Kf = \lambda f \neq 0$ и строго нормализуемым, если из $Hf = 0$ следует $Kf = 0$.

В данной статье автор ограничивается рассмотрением так называемого класса нормализуемых операторов с ε-множителем, т. е. совокупности линейных операторов K, удовлетворяющих условию $HK = \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}(HK)^*$, где ε — постоянный числовой множитель и $|\varepsilon| = 1$.

В частности, если $\varepsilon = 1$, то K — симметризируемое преобразование, а если $\varepsilon = i$, — кососимметризируемое преобразование.

Показывается, что для таких преобразований сохраняются многие свойства симметризируемых преобразований (Zaanen A. C., Linear analysis, New York, Amsterdam, 1953, гл. 12; РЖМат, 1957, 5736).

Полученные результаты применяются к изучению интегральных преобразований, нормализуемых с ε-множителем (см. там же, гл. 16).

Ши Чжун-цы

2881. Произведения симметрий. Халмош, Какутани (Products of symmetries. Halmos Paul R., Kakutani Shizuo), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 3, Part 1, 77—78 (англ.)

Унитарный оператор Q в комплексном гильбертовом пространстве H называется симметрией, если $Q^2 = I$.

Теорема 1. Если H бесконечномерно, то всякий унитарный оператор в H есть произведение четырех симметрий.

Теорема 2. В каждом гильбертовом пространстве H существует унитарный оператор U, не являющийся произведением трех симметрий.

И. С. Иохвидов

2882. Две спектральные матрицы распределения. Фаге М. К., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 207—210

Как известно, для произвольного самосопряженного дифференциального оператора L порядка n равенство Парсеваля может быть записано в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,s=1}^{n} F_k(\lambda)\,\overline{G_s}(\lambda)\,d\tau_{ks}(\lambda),$$

где

$$F_k(\lambda) = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x,\lambda)}dx,\ G_s(\lambda) = \int_a^b g(x)\overline{\varphi_s(x,\lambda)}dx,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — фундаментальное множество решений уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$. Матрица $\{\tau_{ks}(\lambda)\}$ называется спектральной матрицей оператора L.

Автор показывает, что если для оператора $L = \left(i\frac{d}{dx}\right)^n$ принять $\varphi_k(x,\lambda) = e^{i\sqrt[n]{\lambda}\varepsilon_k x}$, где ε_k — корни из единицы, то при $a = -\infty$, $b = +\infty$ и нечетном n

$$\tau_{k,s}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt[n]{\lambda}, & \text{если } k = s = 0\ (-\infty < \lambda < +\infty), \\ 0, & \text{если } k + s > 0, \end{cases}$$

при четном $n = 2m$

$$\tau_{k,s}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda < 0 \text{ и } k, s = 0,1, \ldots, n-1 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt[n]{\lambda}, & \text{если } \lambda \geqslant 0 \text{ и } k = s = 0 \text{ или } k = s = m \\ 0, & \text{если } \lambda \geqslant 0 \text{ и } k, s \text{ — иные.} \end{cases}$$

Вычисляется также спектральная матрица для оператора $\left(i\frac{d}{dx}\right)^n$, $a = -\infty$, $b = +\infty$, для случая другого фундаментального множества решений, в частности для решений $c_k(x,\lambda)$, удовлетворяющих начальным условиям

$$c_k^{(s)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ 1, & s = k. \end{cases}$$

Б. М. Левитан

2883. О волновом уравнении и фуксовых группах первого рода. Рёльке (Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Roelcke Walter), Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953—1955 (1956), № 4, 109 S. (нем.)

Обозначим через $\tau = x + iy$, $y > 0$, комплексное переменное из верхней полуплоскости. Пусть Γ — дискретная группа дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости в себя с конечной площадью фундаментальной области F.

Автор называет автоморфной относительно Γ волновой функцией комплекснозначную функцию $z(\tau)$, обладающую следующими свойствами:

1) $z(S\tau) = z(\tau)$ для всех $S \in \Gamma$;

2) $z(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема;

3) $z(\tau)$ — собственная функция оператора $-\Delta$,

$$\Delta = y^2\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right);$$

4) пусть $\tau = \tau_0$ — параболическая вершина F и A — любая вещественная матрица, для которой $A\tau_0 = \infty$; тогда $z(A^{-1}\tau) = O(y^\alpha)$ равномерно по x (α — некоторое вещественное число).

В работе вводится гильбертово пространство H_Γ всех комплекснозначных функций $f(\tau)$, для которых

1) $f(S\tau) = f(\tau)$ для всех $S \in \Gamma$,

2) $\| f \|^2 = \int_F |f(\tau)|^2 dv < \infty$; $dv = y^{-2}\,dx\,dy$.

Пусть D — совокупность дважды непрерывно дифференцируемых функций $z(\tau)\in H$, для которых — $\Delta z(\tau)\in H$. Автор отмечает, что для принадлежащих D собственных функций оператора — Δ выполняется свойство 4) и, следовательно, они являются автоморфными относительно Γ волновыми функциями. Обратное неверно, т. е. для некоторых автоморфных волновых функций интеграла от квадрата модуля по F не существует. Устанавливается, что — Δ самосопряженный положительно определенный оператор.

Доказываются следующие теоремы:

1) Если фундаментальная область компактна, то спектр дискретен. Собственные функции образуют полную ортогональную систему.

2) Если Γ имеет параболические вершины, то собственное значение — Δ имеет только конечную кратность. — Δ имеет непрерывный спектр, состоящий из полупрямой $\lambda \geqslant \frac{1}{4}$. Собственные функции, соответствующей дискретному спектру вместе с собственными функциями, соответствующими непрерывному спектру, образуют полную систему в H_Γ. Устанавливается разложение по собственным функциям.

3) В случае модулярной группы M и ее конгруэнц-подгрупп $M(Q)$, состоящих из всех матриц, удовлетворяющих сравнению

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ Q),$$

оператор — Δ имеет бесконечное число собственных функций, принадлежащих H_Γ. Непрерывный спектр имеет кратность N, где N — число неэквивалентных параболических вершин.

4) В случае групп Гекке $G(\varkappa)$ с образующими $z \to -1/z$ и $z \to z + \varkappa\ (0 < \varkappa < 2)$ существует бесконечное число собственных функций, принадлежащих H_Γ, т. е. дискретный спектр состоит из бесконечного числа собственных значений.

В доказательстве сформулированных теорем существенную роль играют функция Грина и некоторые общие соображения из функционального анализа. Функция Грина строится с помощью дифференциалов третьего рода.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2884. **О полунормальных операторах. Патнам** (On semi-normal operators. Putnam C. R.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1649—1652 (англ.)

Ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве называется полунормальным, если $H = AA^* - A^*A \geqslant 0$ (или $\leqslant 0$). Для конечных матриц это соотношение влечет, очевидно, равенство $H = 0$, т. е. нормальность A. Для бесконечномерного же случая, например, любая изометрическая, то не унитарная матрица порождает полунормальный оператор с $H \neq 0$.

Число λ, принадлежащее спектру оператора A, называется достижимой точкой спектра, если существует последовательность регулярных точек $\lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$. Для самосопряженного оператора M через $\max M$ и $\min M$ обозначаются соответствующие границы его спектра.

Теорема 1. Пусть A — полунормальный оператор с $H \geqslant 0$, $\lambda = re^{i\theta}(r \geqslant 0)$ — достижимая точка его спектра, а $J_\theta = \frac{A_\theta + A_\theta^*}{2}$, $A_\theta = Ae^{-i\theta}$ (θ — вещественное).

Тогда $(\max J_\theta)^2 \geqslant \min AA^*$ и

$$|r - \max J_\theta| \leqslant ((\max J_\theta)^2 - \min AA^*)^{1/2}.$$

Теорема 2. Пусть A — полунормальный оператор, $J = J_\theta$ имеет спектральное разложение $J = \int \lambda dE$. Тогда, если $S = S_\theta$ — любое измеримое множество, для которого $\int_S dE = I$, то имеет место неравенство

$$\| H \| \leqslant 4 \| A \| \cdot \mathrm{mes}\, S.$$

Приводится ряд следствий, в частности, такое следствие из теоремы 2: Если A полунормален, но не нормален, то спектр J_θ имеет положительную меру, не меньшую, чем $\| H \| / 4 \| A \|$.

Для этого случая указывается нерешенная проблема: всегда ли спектр оператора $J = \frac{1}{2}(A + A^*)$ представляет собой интервал или хотя бы содержит интервал?

И. С. Иохвидов

2885. **Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов с дискретным спектром. Лидский В. Б.**, Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1088—1091

Оператор T называется оператором типа Гильберта—Шмидта, если

$$\sum_s (T\varphi_s,\ T\varphi_s) < \infty,$$

где $\varphi_s (s = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$.

Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть оператор T типа Гильберта — Шмидта, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, записан в виде

$$T = A + iB$$

и пусть самосопряженные операторы A и B являются знакоопределенными. Тогда собственные и присоединенные элементы оператора T, относящиеся к ненулевым точкам спектра, образуют систему, полную в области значений оператора T. Если к указанной системе добавить базис в подпространстве решений уравнения $Tf = 0$, то получится система, полная в $\mathfrak{H}$.

При доказательстве сформулированной теоремы автор существенно использует работу Карлемана (Carleman T., Math. Z., 1921, **9**, 196).

Теорема 1 используется для доказательства полноты системы собственных и присоединенных элементов некоторых неограниченных операторов.

В качестве одного из примеров рассматривается оператор

$$Ly = -y'' + [q(x) + ir(x)]\, y,$$

определенный на некотором плотном в $L_2[-\infty, \infty]$ многообразии. Пусть функция $q(x)$ ограничена снизу, а $r(x)$ полуограничена. Тогда для полноты системы собственных и присоединенных элементов оператора L в $L_2[-\infty, \infty]$ достаточно, чтобы при некотором $\alpha > \frac{2}{3}$.

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{q(x) + |r(x)|}{|x|^\alpha} \geqslant C > 0.$$

Рассмотрен также пример сильно эллиптического оператора.

Л. А. Сахнович

2886. **О разложимости по системе собственных элементов диссипативных операторов. Глазман И. М.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 179—181

Диссипативным называется линейный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, если для любого $f \in \mathfrak{D}_A$ выполняется условие $\mathrm{Im}\,(Af, f) \geqslant 0$.

В 1954 г. референт (РЖМат, 1956, 472), основываясь на общей теории, развитой М. С. Лившицем, доказал теорему разложения по полной системе собственных элементов ограниченного диссипативного оператора A при следующих достаточных условиях:

1) оператор $A - A^*$ вполне непрерывен и имеет конечный абсолютный след и, следовательно, $\sum_{k=}^{\infty} \mathrm{Im}\,\lambda_k < \infty$

(где λ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — собственные значения оператора A).

2) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_n - \lambda_k|} < c$ (где постоянная c не зависит от n).

3) $\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j - \lambda_k|^2} < \infty$, $j \neq k$.

В реферируемой статье, не привлекая общую теорию операторов класса $(i\Omega)$, автор приводит элементарное доказательство разложимости по собственным элементам ограниченного диссипативного оператора A с собственными значениями $\lambda_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяющими единственному условию

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j - \overline{\lambda_k}|^2} < \infty \quad (j \neq k).$$

Б. Р. Мукминов

2887. **О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду. Кужель А. В.**, Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 868—871

Вопрос о приведении к треугольному виду широкого класса ограниченных несамосопряженных операторов был решен М. С. Лившицем (РЖМат, 1954, 5660). Аналогичная задача рассматривается автором для неограниченных операторов.

Пусть G_A — множество векторов f, принадлежащих области определения D_A оператора A и таких, что $(Af, g) = (f, Ag)$ при любом $g \in D_A$. Пусть A_0 — оператор, совпадающий с A на G_A и определенный только на G_A.

Определение: Замкнутый оператор A со всюду плотной областью определения D_A называется квазиэрмитовым оператором ранга r (K^r-оператором), если A_0 — эрмитов оператор с индексом дефекта (r, r) и $\dim D_A = r(\mathrm{mod} G_A)$.

В дальнейшем рассматриваются только такие K^r-операторы, для которых существует по меньшей мере одна регулярная вместе со своей сопряженной точка $\lambda(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$. В работе подробно рассматриваются K^1-операторы. Для таких операторов вводится понятие характеристической функции и приводится

Теорема 1. Простые K^1-операторы A_1 и A_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеристические функции совпадают.

Используя мультипликативное представление характеристической функции, автор строит треугольную модель для K^1-операторов и доказывает теорему 2: Для всякого K^1-оператора A существует изометрический оператор V, отображающий $H \ominus H_A$ на $\mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_A$ взаимнооднозначно и так, что простая часть A_p оператора A переходит при этом отображении в простую часть $\mathbf{A}_p$ своей треугольной модели.

Автор отмечает, что результаты, полученные для K^1-операторов, могут быть перенесены на K^r-операторы ($r < \infty$), если воспользоваться основной теоремой В. П. Потапова (РЖМат, 1958, 289). Л. А. Сахнович

2888. **В редакцию журнала «Успехи математических наук». Бродский М. С., Лившиц М. С.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 233

Список опечаток к статье (РЖМат, 1959, 580).

2889. **Средние непрерывных функций на бикомпактах. Рудин** (Averages of continuous functions on compact spaces. Rudin Walter), Duke Math. J., 1958, 25, № 2, 197—204 (англ.)

Рассматривается вопрос о сходимости средних вида

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

где $x_i \in X$ (X — непустой бикомпакт) и $f \in C(X)$ ($C(X)$ — пространство Банаха всех непрерывных на X функций с вещественными значениями). Пусть h — гомеоморфизм X на X. Для $f \in C(X)$ и $x \in X$ определяется

$$s_n(f, x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(h^i(x)),$$

где $h^i(x) = h(h^{i-1}(x))$. Приводятся теоремы о сходимости $s_n(f, x)$, например:

Теорема 2. Если X — компакт, то существует непустое множество $E \subset X$ такое, что последовательность $\{s_n(f, x)\}$ сходится при $n \to \infty$ для всякой $f \in C(X)$ и для всякого $x \in E$.

Основным результатом автор считает следующую теорему:

Теорема 6. Пусть $\{\Omega_i\}$ — последовательность точек в βN таких, что $\Omega_i \neq \Omega_j$, если $i \neq j$. Для всякой $f \in C(\beta N)$ положим

$$s_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Omega_i).$$

Тогда для некоторой $f \in C(\beta N)$ последовательность $\{s_n(f)\}$ расходится. (βN — бикомпактное расширение по Чеху множества всех натуральных чисел N; РЖМат, 1958, 3602). Эта теорема дает, в частности, отрицательный ответ на предположение Джерисона о том, что теорема 2 верна в случае, если X есть $\beta N - N$ (РЖМат, 1958, 3054). Рассматриваются также некоторые топологические свойства бикомпактов. И. А. Егорова

2890. **Топология в кольцах операторов. Огасавара** (Topologies on rings of operators. Ogasawara Tôzirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 2, 255—272 (англ.)

M — кольцо (с единицей I) операторов в гильбертовом пространстве H. Слабая и слабейшая топология в M совпадают тогда и только тогда, когда всякая σ-конечная (счетно-разложимая) проекция в M имеет конечную длину. При этом длиной σ-конечной проекции Q называется наименьшее число циклических проекций $P_{[M'x]}$, в виде объединения которых Q можно представить. Для совпадения слабой и слабейшей топологии в M необходимо и достаточно совпадение сильной и сильнейшей топологии в M, а также необходимо и достаточно, чтобы сильная топология была сильнее слабейшей. В случае, если кольцо M конечно, этим предложениям эквивалентно также следующее: отображение $A \to A^{\square}$ непрерывно в слабой топологии Кольцо M называется существенно конечным, если конечна всякая циклическая проекция, принадлежащая M. Для того чтобы кольцо M было существенно конечным, необходимо и достаточно, чтобы существовало центральное разложение $H = H_1 \otimes H_2$ такое, что M_{H_1} и M'_{H_2} — конечны.

Для того чтобы в кольце M объединение любых двух циклических проекций было циклической проекцией, необходимо и достаточно, чтобы всякая σ-конечная проекция была циклической.

Линейный функционал φ, заданный на M, называется нормальным, если $\varphi(A^* A) \geqslant 0$ для всех $A \in M$ и для всякого направленного вверх множества $\{A_\delta\}$ положительных операторов $A_\delta \in M$ из $A_\delta \uparrow A$ вытекает $\varphi(A_\delta) \uparrow \varphi(A)$. Нормальный функционал $\varphi(A)$ имеет вид $\varphi(A) = \sum (Ax_i, x_i)$, $x_i \in H$. Наименьшее число (или ∞) слагаемых вида (Ax, x), сумме которых равно $\varphi(A)$, называется длиной φ. Пусть $\{\varphi_\delta\}$ — монотонно возрастающая последовательность нормальных функционалов. Если $\lim_\delta \varphi_\delta(A) = \varphi(A)$ существует для всех операторов $A \in M$, то φ также является нормальным функционалом, причем длина φ равна пределу длин φ_δ.

Следующие утверждения эквивалентны: (1) Кольцо M — конечномерно; (2) слабая топология совпадает с сильной; (3) слабейшая топология совпадает с сильнейшей; (4) слабейшая топология сильнее сильной.

В работе доказаны еще другие предложения аналогичного характера. В. Э. Лянце

2891. Длины операторов проектирования в кольце операторов. Маэда (Lengths of projections in rings of operators. Maeda Shûichirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, **A20**, № 1, 5—11 (англ.)

Оператор проектирования P из кольца операторов M в гильбертовом пространстве $\mathfrak{M}$ называется циклическим относительно M, если в $\mathfrak{M}$ существует такой вектор x, что $[M'x] = P\mathfrak{M}$ (обозначения см. в книге М. А. Наймарка (РЖМат, 1957, 7189 К)).

Оператор P называется σ-конечным относительно M, если всякая система $\{P_\alpha\}$ ($P_\alpha \in M$) попарно ортогональных операторов проектирования таких, что $P_\alpha < P$, не более чем счетна.

Обобщая понятия, введенные Даем (Dye H. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 243—280), Огасавара (реф. 2890) определил длину σ-конечного оператора P как наименьшее из таких кардинальных чисел l, что P представляется в виде суммы l циклических операторов проектирования.

В реферируемой заметке понятие длины переносится на операторы проектирования P, для которых существует наибольший из циклических операторов Q, удовлетворяющих условию $Q \leqslant P$.

Далее, для кольца M вводится понятие l-функции (связанной с длиной), исследуются разложения кольца M в прямую сумму подколец с так называемой униформной длиной (эти результаты обобщают результаты Гриффина (РЖМат, 1955, 2299; 1957, 4973)) и определяются унитарные инварианты кольца операторов. С. Д. Берман

2892. Характеристика W^*-алгебр. Сакаи (A characterization of W^*-algebras. Sakai Shôichirô), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 4, 763—773 (англ.)

Диксмье (РЖМат, 1953, 816) доказал, что всякая W^*-алгебра как B-пространство необходимо является сопряженным пространством. Автор показывает, что последнее условие является также и достаточным. Именно, справедлива

Теорема. C^*-алгебра является W^*-алгеброй тогда и только тогда, когда она, рассматриваемая как B-пространство является сопряженным пространством.

Существование единицы (используемое при доказательстве) в C^*-алгебре, рассматриваемой в теореме, не предполагается, а вытекает из теоремы Крейна—Мильмана и следующего результата автора:

Теорема. Пусть N есть C^*-алгебра и ее единичная сфера имеет экстремальную точку x. Тогда N имеет единицу. При этом $e = xx^* + x^*x - xx^*x^*x$ и есть единица в N. Б. М. Макаров

2893. Аналитические векторы в представлениях групп Ли. Картье, Диксмье (Vecteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie. Cartier P., Dixmier J.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 1, 131—145 (франц.)

Пусть $g \to \pi(g)$ — представление группы Ли G в пространстве $\mathfrak{H}$. Элемент $\varphi \in \mathfrak{H}$ называется аналитическим, если отображение $G \to \mathfrak{H}$, задаваемое формулой

$$g \to \pi(g)\varphi,$$

является аналитическим.

Пусть G — связная односвязная вещественная группа Ли. Известно, что G содержит подгруппы K, N, Z, обладающие следующими свойствами: $G = K \cdot N$, N разрешима и односвязна, K — произведение компактной группы K' на абелеву A, $Z \subset A$ дискретна и A/Z компактна (Iwasawa, Ann. Math., 1949, **50**, 507—558).

Доказывается следующая теорема: Пусть G — вещественная группа Ли; $\pi(g)$ — ее непрерывное представление в банаховом пространстве $\mathfrak{H}$. Множество аналитических векторов плотно в $\mathfrak{H}$ в каждом из следующих случаев: 1) G связна и односвязна, операторы $\pi(g)$ для каждого $z \in Z$ кратны единичному, 2) G связна и односвязна и $\|\pi(z)\| < C$ для каждого $z \in Z$ (C не зависит от z), 3) представление $\pi(g)$ ограничено, т. е. существует константа C такая, что $\|\pi(g)\| < C$.

Доказанная теорема является обобщением результата Харин-Чандра (РЖМат, 1955, 3086). Ф. А. Березин

2894. Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах. Вайнберг М. М., Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 1, 14—54 (кит.)

Перевод статьи автора (Успехи матем. наук, 1952, **7** № 4, 55—102).

2895. Продолжение аналитических функционалов. Тильман (Die Fortsetzung analytischer Funktionale. Tillmann Heinz Günther), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, **21**, № 3-4, 139—193 (нем.)

В первой главе строится теория аналитического продолжения аналитических функционалов (а. ф.) от функций одной комплексной переменной. Пусть Ω — риманова числовая сфера, $Q(\Omega)$ — совокупность всех открытых правильных подмножеств Ω (пустое множество включается в $Q(\Omega)$). В $Q(\Omega)$ вводится расстояние так, что $Q(\Omega)$ оказывается полным метрическим пространством; пределом сходящейся последовательности $\{B_n\} \subset Q(\Omega)$ служит объединение всех открытых множеств, каждое из которых содержит почти все B_n. Символом $\mathfrak{S}$ обозначается совокупность всех локально голоморфных функций, множества задания которых непусты и входят в $Q(\Omega)$; $\hat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cup \varnothing$, где $\varnothing$ — некоторый идеальный элемент («пустая функция»). Если $f \in \mathfrak{S}$, то D_f обозначает множество, в котором задана функция f. В $\hat{\mathfrak{S}}$ вводится метризуемая топология. Полученное метрическое пространство полно; последовательность $\{f_n\} \subset \hat{\mathfrak{S}}$ сходится в том и только в том случае, когда множества задания сходятся в $Q(\Omega)$ к пределу D_0, и, каково бы ни было компактное подмножество $K \subset D_0$, почти все функции f_n определены на K и образуют равномерно сходящуюся на K последовательность. Пространство $\hat{\mathfrak{S}}$ оказывается, кроме того, сепарабельным. Введенная в $\mathfrak{S}$ топология $\mathfrak{T}$ сильнее топологии $\mathfrak{T}_1$, которую рассматривал в $\mathfrak{S}$ Фантапие (Lévy P., Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951). В топологии $\mathfrak{T}_1$ никакая точка не является замкнутым множеством. Доказывается, что $\mathfrak{T}$-открытое множество $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда $\mathfrak{T}_1$-открыто, когда вместе с любым элементом f в $\mathfrak{G}$ содержатся все расширения f ($f_1 \in \mathfrak{S}$ называется расширением $f \in \mathfrak{S}$, если $D_{f_1} \supset D_f$ и $f(z) = f_1(z)$ при $z \in D_f$).

Множество $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{S}$ называется линейным, если из $f, g \in \mathfrak{L}$ следует, что функция $\lambda f + \mu g$, заданная в $D_f \subset D_g$, входит в $\mathfrak{L}$ (λ, μ — любые комплексные числа). Доказывается, что пересечение всех множеств задания функций, входящих в открытое линейное подмножество $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{S}$, есть непустое компактное подмножество Ω.

Если A — компакт в Ω, то совокупность (A) всех функций, каждая из которых локально голоморфна в некоторой окрестности A, есть линейное открытое подмножество в $\mathfrak{S}$. Отождествляя функции из (A), совпадающие в некоторой окрестности A, и вводя в соответствующем факторпространстве $\mathfrak{H}(A)$ обычным образом топологию (исходя из топологии $\mathfrak{T}$), автор доказывает, что полученное пространство оказывается линейным топологическим локально выпуклым пространством, введенным ранее Кете (РЖМат, 1955, 1377).

Функция f_λ комплексной переменной λ, определенная при всех λ из области $G \subset \Omega$ и принимающая значения из $\mathfrak{S}$, называется аналитической линией в $\mathfrak{S}$, если она дифференцируема и непрерывна в каждой точке G.

Комплекснозначная функция F, заданная в открытом множестве $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$, называется а. ф. при выполнении следующих условий: 1) если $f, f_1 \in \mathfrak{G}$, f_1 — расширение f, то $F(f_1) = F(f)$; 2) если f_λ — аналитическая линия со значениями в $\mathfrak{G}$, то $\varphi(\lambda) = F(f_\lambda)$ — аналитическая функция λ.

Введенный таким образом класс а. ф. совпадает с классом функционалов, аналитических в смысле Фантапие.

Далее подробно изучается связность открытых подмножеств $\mathfrak{S}$. В частности, доказывается, что открытое подмножество $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$ связно тогда и только тогда, когда две любые точки $\mathfrak{G}$ могут быть соединены в $\mathfrak{G}$ непрерывной кривой, составленной из конечного числа аналитических дуг. Доказывается следующая теорема единственности: Если а. ф. F, заданный в области $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$, обращается в нуль в некоторой окрестности произвольной точки $f_0 \in \mathfrak{G}$, то $F \equiv 0$ в $\mathfrak{G}$. При доказательстве этой теоремы автор существенно использует непрерывность а. ф., установленную Себаштьяном-и-Сильвой (Sebastião e Silva J., Portug. math., 1950, 9).

В пространстве $\mathfrak{S}$, снабженном топологией Фантапие, эта теорема единственности неверна, что было ранее показано автором (РЖМат, 1958, 2198). Далее для а. ф. вводятся понятия функционального элемента, непосредственного аналитического продолжения, аналитического образа. Свойства этих понятий во многом аналогичны классическим.

Далее с помощью введенного автором понятия односвязности множества $C \subset \Omega$ относительно более широкого множества $D \subset \Omega$ описывается строение связных компонент линейного открытого множества (A). Доказано, в частности, что если $\Omega \setminus A$ состоит из m связных компонент, то (A) состоит из $2^m - 1$ связных компонент. Затем доказывается, что аналитическое продолжение линейного а. ф. F равносильно аналитическому продолжению его индикатрисы $\varphi(\lambda) = F_z\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)$.

Во второй главе строится сходная с изложенной в гл. 1 теория для а. ф. заданных на множестве $\mathfrak{S}^*$ функций, локально голоморфных на римановых поверхностях над n-мерным комплексным пространством. В качестве областей задания функций, входящих в $\mathfrak{S}^*$, допускаются только области голоморфности. Основным результатом второй главы является теорема единственности, аналогичная соответствующей теореме первой главы. Библ. 22 назв.

В. П. Хавин

2896. О неявных операторах. Тамме Э. Э., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 2, 259—261

Рассматривается область сходимости степенного ряда для неявного оператора, даются оценки для остаточного члена этого ряда и указываются возможности применения полученных результатов к приближенному решению функциональных уравнений вида

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где $F(x, y)$ — оператор из прямой суммы $X + Y$ в Z (X, Y, Z — банаховы пространства).

При выполнении условий: 1) $F(x_0, y_0) = 0$, 2) существует непрерывный оператор $\Gamma_0 = [F'_x(x_0, y_0)]^{-1}$, 3) $F(x, y)$ аналитичен к точке (x_0, y_0) — для произвольного $y' \in Y$ существуют такие неотрицательные постоянные γ_1, a и a_{ik}, что

$$\| \Gamma_0 F_y(x_0, y_0)(y' - y_0) \| \leqslant a\gamma_1 \ (y' \in Y),$$
$$\| \Gamma_0 F_{x^i y^k}(x_0, y_0)(y' - y_0)^k \| \leqslant a_{ik}\gamma_1^k \qquad (2)$$
$$(i, k = 0, 1, \ldots, i + k \geqslant 2)$$

и степенной ряд

$$g(\alpha, \beta) = a\beta + \sum_{\substack{i,k=0 \\ i+k\geqslant 2}}^{\infty} \frac{1}{i!\,k!} a_{ik}\alpha^i \beta^k$$

сходится в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. На основании теоремы о неявных функциях уравнение $\alpha = g(\alpha, \beta)$ определяет аналитическую функцию

$$\alpha = \varphi(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\beta^k, \qquad (3)$$

которая удовлетворяет условию $\varphi(0) = 0$.

Доказывается теорема 1: Если выполнены условия 1)—3), то в окрестности точки y_0 существует аналитический оператор $x = \Phi(y)$, определенный уравнением (1) и условием $\Phi(y_0) = x_0$, причем

$$\| \Phi^{(k)}(y_0)(y' - y_0)^k \| \leqslant \varphi^{(k)}(0)\gamma_1^k \ (k = 1, 2, \ldots).$$

О сходимости степенного ряда для неявного оператора

$$\Phi(y') = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}(y_0)(y' - y_0)^k \qquad (4)$$

доказывается теорема 2. Пусть выполнены условия 1) и 2), степенной ряд (3) сходится при $\beta = \gamma_1$ и $F(x, y)$ аналитичен на множестве

$$\| x - x_0 \| \leqslant \varphi(\gamma_1), \ y = y_0 + t(y' - y_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \qquad (5)$$

Тогда уравнение (1) при фиксированном $y = y'$ имеет в сфере (5) решение x', к которому степенной ряд (4) сходится со скоростью

$$\| x' - x_0 \| \leqslant \varphi(\gamma_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\gamma_1^k \ (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}(y_0)(y' - y_0)^k.$$

М. А. Мертвецова

2897. Об одном применении теоремы о неявных функциях к собственным элементам нелинейных операторов. Балабанов В. А., Сообщ. АН ГрузССР, 1958, **20**, № 1, 3—8

Изучается вопрос об устойчивости нормированного собственного элемента и соответствующего собственного числа нелинейного оператора в гильбертовом пространстве. Пусть x_0 — нормированный собственный элемент и λ_0 — собственное число нелинейного непрерывно дифференцируемого оператора L и A_{x_0} — производная Фреше этого оператора в точке x_0. Пусть выполнено одно из условий: 1) λ_0 не принадлежит спектру линейного оператора A_{x_0} и $((A_{x_0} - \lambda_0 I)^{-1} x_0, x_0) \neq 0$.

2) A_{x_0} — вполне непрерывный самосопряженный оператор, для которого λ_0 есть простое собственное число, причем x_0 не ортогонален собственному подпространству, соответствующему λ_0. Тогда у оператора $L + \Delta L$ существует нормированный собственный элемент $x_0 + \Delta x$, соответствующий собственному числу $\lambda_0 + \Delta\lambda$, если возмущение ΔL мало. Приведен также пример. Э. С. Цитланадзе

2898. Приближенное решение функциональных уравнений. Канторович Л. В., Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 1, 1—13 (кит.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1957, 5947).

2899. Задача чебышевского приближения в коммутативном гильбертовом кольце. Зуховицкий С. И., Эскин Г. И., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1074—1076

Пусть $f(q)$, $\varphi_1(q)$, ..., $\varphi_n(q)$ — непрерывные на компакте Q функции со значениями в бесконечномерном коммутативном гильбертовом кольце H. Изучается задача чебышевского приближения функций $f(q)$ посредством полиномов

$$a_1\varphi_1(q) + \ldots + a_n\varphi_n(q),$$

где $a_k \in H$, $K = 1, \ldots, n$. Без доказательства (со ссылками на предыдущие работы авторов) приводятся четыре теоремы об условиях существования и единственности наименее уклоняющихся полиномов. Случай конечномерного H изучался в работе С. И. Зуховицкого и М. Г. Крейна (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 1, 217).

В. Н. Никольский

2900. Некоторые теоремы о чебышевском приближении функций со значениями в коммутативном вполне регулярном кольце. Эскин, Зуховицкий (Деякі теореми про Чебишовське наближення функцій з значеннями в комутативному цілком регулярному кільці. Ескін Г. І., Зуховицький С. І.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 4, 368—371 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается задача наилучшего приближения в пространстве функций, непрерывных на компакте Q и принимающих значения в коммутативном вполне регулярном банаховом кольце с единицей, посредством полиномов по системе $\{\varphi_k(q)\}_1^n$ функций того же пространства. Применив теорему Гельфанда — Наймарка об изоморфизме банахова кольца G с единицей кольцу всех функций, непрерывных на пространстве максимальных идеалов G, авторы получают в новых терминах известный критерий А. Н. Колмогорова для наименее уклоняющихся полиномов, а также теорему Хара об условиях единственности полиномов наилучшего приближения. В. Н. Никольский

2901. О распространении регулярных операторов в K-линеалах. Векслер А. И., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 39—52

Сначала изучается распространение регулярного оператора, заданного в некоторой компоненте X' K-линеала X, на весь X.

Теорема 1. Пусть на X' задан регулярный оператор U со значениями в K-пространстве Y. Для того чтобы существовал такой регулярный на X оператор $\widetilde{U}$ со значениями в том же Y, что $\widetilde{U}(x) = U(x)$ для $x \in X'$, необходимо и достаточно, чтобы на X существовал регулярный оператор V (со значениями в Y), для которого $|U|(x) \leqslant V(x)$ при любом $x \geqslant 0$, $x \in X'$.

Теорема 2. Для того чтобы любой регулярный оператор, заданный на X' со значениями в любом K-пространстве Y, был распространим на весь X, достаточно, а для архимедова K-линеала X и необходимо, чтобы для любого $x \in X$ существовала его проекция в X':

$$Pr_{X'} x = \sup_{\substack{0 \leqslant x' \leqslant x_+ \\ x' \in X'}} \{x'\} - \sup_{\substack{0 \leqslant x' \leqslant x_- \\ x' \in X'}} \{x'\}.$$

Затем изучается возможность общего распространения множества регулярных операторов, заданных на попарно дизъюнктных компонентах K-линеала X. Б. З. Вулих

2902. Некоторые свойства нормальных операторов в K-линеалах. Векслер А. И., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 53—64

М. А. Ермолин (РЖМат, 1954, 3010) ввел следующие понятия. Регулярный оператор U из K-линеала X в K-пространство Y называется анормальным, если $U(x) = 0$ на некотором нормальном и полном в X множестве. Полнота множества означает, что в X не существует элемента, отличного от нуля и дизъюнктного всем элементам этого множества. Регулярный оператор из X в Y, дизъюнктный всем анормальным операторам (дизъюнктность понимается в K-пространстве всех регулярных операторов из X в Y), называется нормальным.

В статье устанавливается ряд теорем о нормальных операторах в K-линеалах, обобщающих результаты, ранее известные для K-пространств. Приведем два из них.

Пусть U — положительный нормальный оператор и $U(x_0) > 0$. Тогда в компоненте X_{x_0}, порожденной элементом x_0, можно выделить две дополнительные друг к другу компоненты так, что на одной из них $U(x) \equiv 0$, а на другой $U(x) > 0$ для любого $x > 0$, причем вторая компонента не пуста.

Для того чтобы два нормальных оператора U_1 и U_2 в K-линеале X были дизъюнктными, достаточно, а для функционалов и необходимо, чтобы в X существовали две дополнительные друг к другу компоненты X_1 и X_2 такие, что $U_1(x) = 0$ на X_1, $U_2(x) = 0$ на X_2. Б. З. Вулих

2903. Расширенные K^--пространства. Домрачева Г. И., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 17—27

K^--пространством называется условно σ-полная линейная структура. Всякое K^--пространство с единицей реализуется в виде множества вещественных непрерывных функций на некотором квазиэкстремальном бикомпакте Q (квазиэкстремальность означает, что замыкание всякого открытого множества типа F_σ — открыто-замкнуто), причем единице K^--пространства соответствует функция, тождественно равная единице. Если при этой реализации образом K^--пространства X будет множество всех непрерывных функций, определенных на Q и допускающих на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$, то K^--пространство X называется расширенным. Применительно к K-пространству это определение равносильно прежнему, введенному А. Г. Пинскером (см., например, Канторозич Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Успехи матем. наук, 1951, 6, вып. 3, 31—98).

Доказывается, что, хотя сама реализация K^--пространства связана с выбором в нем единицы, однако понятие расширенного K^--пространства инвариантно относительно выбора единицы.

Если X — K^--пространство с единицей, то по определению, введенному референтом, последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется определяющей, если: а) $x_n \geqslant 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$; б) $x_m \wedge n1 = x_n$ при $m \geqslant n$ (РЖМат, 1954, 1720). Для любого $x \in X$ его след l_x определяется по формуле $l_x = \sup_n (n|x| \wedge 1)$. Доказывается следующий признак расширенности K^--пространства: для того чтобы K^--пространство с единицей было расширенным, необходимо и достаточно, чтобы любая определяющая последовательность его элементов x_n, для которой $l_{n1} - x_n \nearrow 1$ при $n \to \infty$, была ограничена. Б. З. Вулих

2904. Идеалы в нормальных подкольцах кольца непрерывных функций. Домрачева Г. И., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 29—38

Изучается кольцо $C_\infty(Q)$ всех вещественных непрерывных функций $x(t)$, заданных на квазиэкстремальном бикомпакте Q (реф. 2903) и допускающих на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. Пусть $C^0_\infty(Q)$ — подкольцо этого кольца, содержащее функцию $x(t) \equiv 1$ и нормально содержащееся в $C_\infty(Q)$.

Теорема 1. Если I_0 — максимальный идеал кольца $C^0_\infty(Q)$, то существует единственная точка $t_0 \in Q$ такая, что $x(t_0) = 0$ для всех $x \in I_0$.

Теорема 2. Пусть I_0 — некоторое подмножество кольца $C^0_\infty(Q)$. Для того чтобы I_0 было максимальным идеалом этого кольца, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка $t_0 \in Q$, что I_0 совпадает с множеством всех функций из $C^0_\infty(Q)$, удовлетворяющих в точке t_0 одному из следующих двух условий:

а) $t_0 \notin \overline{Q_t(x(t) \neq 0)}$;

б) $x(t_0) = 0$, $t_0 \in \overline{Q_t(x(t) \neq 0)}$,

но для любой функции $e(t)$ из $C^0_\infty(Q)$, принимающей только значения 0 и 1 и такой, что $e(t_0) = 1$, функция

$$(xe)^{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(t)} & \text{при } \overline{t \in Q_t(x(t) \neq 0)} \cap Q_t(e(t) = 1), \\ 0 & \text{в прочих точках} \end{cases}$$

не входит в $C^0_\infty(Q)$.

Теорема 3. Для того чтобы идеал I кольца $C^\infty(Q)$ был его максимальным идеалом, необходимо и достаточ-

но, чтобы существовала такая точка $t_0 \in Q$, что I совпадает с множеством всех функций из $C_\infty(Q)$, обладающих в точке t_0 свойством а).

Теорема 4. Для того чтобы совокупность всех функций из $C^0_\infty(Q)$, обращающихся в нуль в некоторой точке $t_0 \in Q$, была идеалом (максимальным) в $C^0_\infty(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке t_0 все функции $C^0_\infty(Q)$ имели конечные значения. Б. З. Вулих

2905. Вклад фон Нёймана в теорию меры и эргодическую теорию. Халмош (Von Neumann on measure and ergodic theory. Halmos Paul R.) Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 3, Part 2, 86—94 (англ.)

Краткий обзор работ фон Нёймана по теории меры и теории преобразований с инвариантной мерой. Изложение делится на три части: конечно-аддитивные меры, счетно-аддитивные меры, преобразования с инвариантной мерой. Приводится полный список опубликованных математических работ фон Нёймана, относящихся к этому кругу вопросов. Кратко рассматриваются лекции фон Нёймана по теории меры, не опубликованные в печати. В. А. Рохлин

2906. О мере векторной суммы. Шилдс (Sur la mesure d'une somme vectorielle. Shields A.), Fundam. math., 1955, **42**, № 1, 57—60 (франц.)

Пусть G—коммутативная компактная связная топологическая группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, m — мера Хара на G такая, что $m(G)=1$. Доказывается, что для любых двух измеримых множеств A, $B \subset G$ таких, что $m(A)+m(B) \leqslant 1$, выполняется соотношение: $m_i(A+B) \geqslant m(A)+m(B)$, где m_i обозначает внутреннюю меру множества, $A+B$—совокупность всех элементов $a+b$, $a \in A$, $b \in B$ (векторную сумму множеств A, B, в терминологии автора).

Для аддитивной группы G_1 вещественных чисел по модулю 1 этот результат был ранее получен Д. А. Райковым (Матем. сб., 1939, **5**, 425—438), а для n-кратного произведения групп G_1—Макбитом (Macbeath A. M.; РЖМат, 1953, 142). М. А. Наймарк

2907. Суммы множеств в локально компактных абелевых группах. Кнезер (Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen. Kneser Martin), Math. Z., 1956, **66**, № 1, 88—110 (нем.)

Пусть G—локально компактная абелева группа; μ—мера Хара в G; μ_*—соответствующая внутренняя мера; A и B—непустые измеримые множества конечной меры в G; $A+B$— их групповая сумма. Доказывается, что если в G имеется открытая компактная подгруппа H со свойствами

$$A+B+H=A+B, \quad \mu(A+B+H)=\mu(A+H)+\mu(B+H)-\mu(H),$$

то

$$\mu(A+B) \geqslant \mu(A)+\mu(B)-\mu(H);$$

если же такой подгруппы H не существует, то

$$\mu_*(A+B) \geqslant \mu(A)+\mu(B). \qquad (1)$$

В частности, если группа G компактна и связна, то неравенство (1) может не иметь места лишь в случае, когда $A+B=G$. Эта теорема содержит в качестве частных случаев ряд результатов, полученных ранее другими авторами (реф. 2906).

Рассматривается также неравенство Брунна—Минковского

$$\mu_*(A+B)^{1/n} \geqslant \mu(A)^{1/n}+\mu(B)^{1/n}, \qquad (2)$$

известное для случая, когда G есть n-мерное действительное векторное пространство $R^n (n \geqslant 1)$. Доказывается, что оно сохраняет силу в более общем случае, когда G допускает R^n в качестве прямого слагаемого.

Много внимания уделяется случаям, в которых неравенства (1) и (2) переходят в равенства. В заключение изучаются связи между неравенством (1) и теоремами аддитивной теории чисел типа теоремы Манна (Mann H. B., Ann. Math., 1942, **43**, 523—527).

В. А. Рохлин

2908. Банахово среднее на группах. Адельсон-Вельский Г. М., Шрейдер Ю. А., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 131—136

Банаховым средним на группе G авторы называют функционал L, определенный для всех ограниченных вещественных функций $f(g)$ на G и удовлетворяющий требованиям:

$$L(\lambda f+\mu\varphi)=\lambda L(f)+\mu L(\varphi),$$

$$\inf_{g \in G} f(g) \leqslant L(f) \leqslant \sup_{g \in G} f(g),$$

$$L[f(g)]=L[f(gh)],$$

где h—любой элемент G, λ, μ—комплексные числа.

Банахово среднее существует не на любой группе. В частности, как отмечено в реферируемой работе, оно не существует на группе вращений и на свободной группе с двумя образующими. В работе доказывается, что если на группе существует банахово среднее, то всякое ее ограниченное представление в гильбертовом пространстве эквивалентно унитарному.

В основном работа посвящена доказательству достаточного признака существования банахова среднего и описанию конструкции банахова среднего.

Признак состоит в следующем. Пусть E—множество, состоящее из k элементов $g_1,\ldots, g_k$ ($g_1,\ldots, g_k \in G$). Через E^n обозначим множество, элементами которого являются всевозможные произведения из n элементов множества E, через $l_n(E)$ обозначим число элементов E^n. Наконец, пусть ε—произвольное положительное число.

Если для любого множества E $l_n(E)=o(e^{\varepsilon n})$, то на G существует банахово среднее.

Попутно с доказательством этой теоремы дается конструкция банахова среднего. Конструкция состоит в следующем.

Пусть

$$f(E)=\frac{1}{|E|}\sum_{g \in E} f(g),$$

$|E|$—число элементов множества E. Пусть далее φ—произвольная функция (конечных) множеств и $S(\varphi)$, $J(\varphi)$—числа, определяемые равенствами:

$$S(\varphi)=\lim_E \sup \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \varphi(E^s),$$

$$J(\varphi)=\lim_E \inf \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \varphi(E^s)$$

($\lim\limits_E$ понимается как предел по частично упорядоченной системе всех конечных подмножеств G).

Оказывается, что если $L(\varphi)$—произвольный линейный функционал на функциях множеств, удовлетворяющий неравенству

$$J(\varphi) \leqslant L(\varphi) \leqslant S(\varphi), \qquad (1)$$

то функционал $L[f(g)]$ на функциях от элементов G, определяемый равенством

$$L[f(g)]=L[f(E)],$$

есть банахово среднее. Обратно всякое банахово среднее получается такой конструкцией.

Наконец, авторы показывают, что множество функций от множеств образует коммутативное нормированное кольцо, если в качестве произведения рассмотреть обычное произведение и в качестве нормы $\|\varphi\| = S(\varphi)$. Это обстоятельство позволяет описать все функционалы над функциями множеств, удовлетворяющие условию (1).

Кроме указанных результатов, в работе содержится доказательство еще некоторых свойств банахова среднего и распространение полученных результатов на полугруппы и топологические группы. Ф. А. Березин

2909. Средние значения и банаховы пределы. Рейми (Mean values and Banach limits. Raimi Ralph A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1029—1036 (англ.)

Рассматривается банахово пространство E функций на вещественной прямой R с нормой $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. Через T_α (α—целое, >0) и T_s (s—любое вещественное) обозначаются операторы в E:

$$T_\alpha f = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x+t)dt;\ T_s f = f(x+s).$$

Через $V \subset E$ обозначается замкнутое подпространство, обладающее тем свойством, что существует, в смысле топологии в E, предел $\lim_{\alpha\to\infty} T_\alpha f$. Доказывается, что этот предел не зависит от x. Он обозначается через $m(f)$. Доказывается, что $m(f)$ есть функционал на V с нормой, равной единице; $m(f)$ автор называет средним значением функции f. Далее рассматриваются функционалы $\varphi'(f)$, определенные на всем E и являющиеся продолжением $m(f)$ с сохранением нормы. Множество таких функционалов обозначается M'. Доказывается, что если $f(x) \geqslant 0$, то $(\varphi', f) \geqslant 0$ для любого $\varphi' \in M'$.

Наконец, рассматривается множество B' „банаховых пределов", которые определяются как функционалы φ' на E, обладающие свойствами:
$\|\varphi'\| = 1$,
$(\varphi', f_1) = 1$ (f_1—функция, равная тождественной единице),
$(\varphi', T_s f) = (\varphi', f)$ для всех $f \in E$, $s \in R$.

Устанавливается, что каждое среднее значение есть банахов предел, т. е. $M' \subset B'$. Если же вместо E рассмотреть пространство ограниченных равномерно непрерывных функций, то $M' = B'$.

Отметим еще следующую теорему о свойствах средних значений: пусть $f \in E$ и

$$\tau(f) = \lim_\alpha \inf_x T_\alpha f(x),$$

$$\omega(f) = \lim_\alpha \sup_x T_\alpha f(x).$$

Тогда для любого $\varphi' \in M'$ $\tau(f) \leqslant (\varphi', f) \leqslant \omega(f)$ и обратно для любого $\lambda \in R$ такого, что $\tau(f) \leqslant \lambda \leqslant \omega(f)$ существует $\varphi' \in M'$ такой, что $(\varphi' f) = \lambda$.

Кроме перечисленных результатов, работа содержит ряд тождеств относительно некоторых предельных образований из функций $f \in E$. Примером может служить

$$\lim_\alpha \sup_x T_\alpha f(x) = \lim_\alpha \inf \lim_{|x|\to\infty} \sup T_\alpha f(x).$$

Ф. А Березин

2910. Функции распределения для некоммутирующих операторов. Барю (Distribution functions for noncommuting operators. Barut A. O.), Phys. Rev., 1957, 108, № 3, 565—569 (англ.)

Изучаются свойства некоторого класса функций $f(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$ от некоммутирующих наблюдаемых α', β', γ',..., выводятся простые стохастические уравнения типа уравнений марковских случайных процессов и показывается, что квантовая механика может быть сформулирована в терминах таких функций. В отличие от обычных функций распределения, функции, изученные в работе, являются комплексными. Автор выражает надежду, что введенные функции найдут приложение в квантовой гидродинамике или статистической механике. О.С. Парасюк

2911. Об эргодической теореме и о понятии макроскопических наблюдаемых. Людвиг (Zum Ergodensatz und zum Begriff der makroskopischen Observablen. I. Ludwig Günther), Z. Phys., 1958, 150, № 3, 346—374 (нем.)

Рассматривается гильбертово пространство, в котором задан оператор Гамильтона H с дискретным спектром. Оператор H можно представить в виде $H = \sum_\rho \varepsilon_\rho E_\rho$, где ε_ρ — собственные числа, а E_ρ — соответствующие проектирующие операторы. Пусть A — оператор, описывающий некоторую наблюдаемую величину в смысле квантовой теории и W некоторый „статистический" оператор. Среднее значение величины A определяется равенством $M(A) = \operatorname{spur}(WA)$. Функция $M(A)$ нормируется условием $\operatorname{spur} W = 1$.

Из общих положений квантовой механики следует, что $M(A)$ с течением времени изменяется по закону $M_t(A) = \operatorname{spur}(WU_t AU_t^*)$, где $U_t = e^{iHt}$. Если ввести среднее по времени

$$\overline{f}(t) = \lim_{T-S\to\infty} \frac{1}{T-S}\int_S^T f(t)\,dt,\ \text{то}\ \overline{M_t(A)} = \operatorname{spur}(\overline{W}A),$$

где $\overline{W} = \sum_\rho \varepsilon_\rho E_\rho$.

В работе выясняются условия, при которых

$$\overline{D_t^2(A)} \ll \overline{M_t(A^2)},\ \text{где}\ D_t(A) = M_t(A) - \overline{M_t(A)}.$$

Соотношение $\dfrac{\overline{D_t^2(A)}}{\overline{M_t(A^2)}} \ll 1$ означает, что большие колебания величины $M_t(A)$ встречаются редко. Полученные результаты автор сравнивает с соответствующими результатами фон Неймана (Neumann J. v., Z. Phys., 1929, 57, 30). В работе также рассмотрен вопрос об интегралах движения. М. С. Лившиц

2912 К. Математическое введение в квантовые теории. 1-я часть. Векторные пространства n измерений, линейные операторы, матрицы. 3-е изд. Жюлия (Introduction mathématique aux théories quantiques. 1-re part. Espaces vectoriels à n dimensions, opérateurs linéaires, matrices. 3e éd. Julia Gaston. Paris, Gauthier — Villars, 1958, VI, 220 p., ill., 1500 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 19, 518 (франц.)

2913 К. Элементы теории линейных топологических пространств и обобщенных функций. Вып. 1. Элементы теории обобщенных функций. Мартино, Трев, Люссон (Éléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions. Fasc. I. Eléments de la théorie des distributions. Martineau André, Tréves François, Lusson Pierre. Paris, Centre docum. univ. et S. E. D. E. S. réunis, 1955, 11, 84 p., ill.—Multigr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 15, 418 (франц.)

2914 К. Введение в анализ Фурье и обобщенные функции. Лайтхилл (Introduction to Fourier analysis and generalised functions. Lighthill M. J. New York, Cambridge Univ. Press, 1958, 87 pp., ill., 3.50 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 13, 57 (англ.)

См. также: 2149, 2493, 2494, 2651, 2653, 2654, 2673, 2681, 2687, 2777

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

2915. Происхождение идеи случая и отражение реального в операциях. Инхельдер (La genèse de l'idée de hasard et la résistance du réel aux opérations. Inhelder Bärbel), Synthese, s. a., **10**, 44—50 (франц.)

Автор произвел с детьми различных возрастов (от 4 до 15 лет) простые опыты с вытаскиванием жребия, игрой в „орла и решку" и некоторые другие. На основании результатов этих опытов делается вывод, что идея случая и вероятностные рассуждения возникают в сознании только после овладения дедуктивными заключениями (см. также Piaget J., Suhelder B., La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Presses universitaires de France, 1951). У детей младше 7 лет понятие случая и вероятностные рассуждения отсутствуют полностью. У детей от 7—8 до 11—12 лет случай понимается как факт, не укладывающийся в строгий закон. Отсутствует количественная характеристика случайных явлений, хотя качественная характеристика начинает появляться. Только в возрасте старше 12 лет дети подходят к пониманию закона больших чисел, а следовательно, и к вероятностным рассуждениям. Л. Е. Майстров

2916. О преподавании теоремы Бернулли. Инейхен (Zur Behandlung des Satzes von Bernoulli im Unterricht. Ineichen R.), Elem. Math., 1958, **13**, № 2, 35—37 (нем.)

2917. Об одном примере из теории вероятностей. Бухнер (Zu einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Buchner P.), Elem. Math., 1958, **13**, № 2, 34—35 (нем.)

2918. Простой подсчет вероятности поражения для оружия со сферическим поражающим объемом. Лиллифорс (A hand—computation determination of kill probability for Weapons having spherical lethal volume. Lilliefors H. W.), Operat. Res., 1957, **5**, № 3, 416—421 (англ.)

Предлагается простой способ приближенного вычисления вероятности P попадания в единичную сферу с центром в (0, 0, 0) для трехмерного нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием и не равными дисперсиями $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \neq \sigma_z^2$. Ю. Г. Епишин

2919. К вычислению моментов гипергеометрического распределения. Рам (On the calculation of moments of hypergeometric distribution. Ram Siya), Ganita, 1956, **7**, № 1, 1—5 (англ.)

2920. О функции распределения $L(z)$. Реньи (Az $L(z)$ valószínüség-eloszlásfüggvenyröl. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1957, **2**, № 1-2, 43—50 (венг.; рез. русск., англ.)

Во многих задачах теории вероятностей и математической статистики встречается кумулятивная функция распределения

$$L(z)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8z^2}}}{2k+1},\quad z>0.$$

Ряд справа сходится медленно для больших z, поэтому возникает потребность в формуле, позволяющей вычислять $L(z)$ для больших значений z. Автор выводит такую формулу

$$L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\{\Phi((2k+1)z)-\Phi((2k-1)z)\},$$

где $\Phi(z)$ — интегральная функция нормального распределения.

Выводятся также формулы для моментов функции $L(z)$. По резюме автора

2921. О теории устойчивых законов распределений. Бергстрём (On the theory of the stable distribution functions. Bergström Harald), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 12—13 (англ.)

Устойчивый закон распределения определяется уравнением $G\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)*G\left(\frac{x}{\sigma_2}\right)=G\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ ($*$ — свёртка), σ_1, σ_2, σ — положительные постоянные.

Без доказательства указывается, что: 1) $\sigma_1^a+\sigma_2^a=\sigma^a$ (a — положительная постоянная), 2) характеристическая функция $g(t)$ для $G(x)$ имеет форму $g(t)=e^{-|t|^a(\cos\beta-i\sin\beta)}$, где β — действительная постоянная, причем $\cos\beta>0{,}3$, если $0<a<2$; $G(x)$ является законом распределения, если и только если

$$\left|\sin\beta\cos\frac{\pi a}{2}\right|\leqslant\cos\beta\sin\frac{\pi a}{2}.$$

M. Rosenblatt-Roth

2922. Пример ненормального распределения случайных величин, частное которых имеет распределение Коши. Лаха (An example of a nonnormal distribution where the quotient follows the Cauchy law. Laha R. G.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, **44**, № 2, 222—223 (англ.)

Показано, что если ξ и η — две независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{1+x^4}\qquad(-\infty<x<\infty),$$

то частное $\frac{\xi}{\eta}$ распределено по закону Коши. Тем самым опровергается гипотеза о том, что таким свойством обладают лишь нормально распределенные ξ и η.

Б. С. Цыбаков

2923. Исключительный случай предельного распределения сумм случайных величин для конечного однородного и непрерывного процесса Маркова. Чуку (Un caz de excepţie pentru repartiţia limită a sumelor de variabile aleatoare ale unui proces Markov finit, omogen şi continuu. Ciucu G.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 3, 141—143 (рум.; рез. русск., франц.)

2924. О роли условий Линдеберга. Студнев (Про роль умови Ліндеберга. Студнєв Ю. П.», Доповіді АН УРСР, 1958, № 3, 239—242 (укр.; рез. русск., англ.)

Статья содержит следующий основной результат:

Теорема. При выполнении условия Линдеберга имеет место соотношение

$$\max_{-\infty<x<-\infty}\left|F_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right|=$$

$$= O\left(\frac{1}{B_n}\int_0^{B_n} L_n(x)\,dx\right) + O\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

где $L_n(x) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|z|>x} z^2\,dF_i(z)$.

Порядок этой оценки не может быть улучшен.

Резюме автора

2925. Слабый закон больших чисел для равномерно ограниченных случайных величин. Франкс (La loi faible des grands nombres des variables stochastiques uniformément bornées. Franckx Ed.), Bull. cl., sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 1, 47—50 (франц.)

Пусть x_i ($i = 1, 2, \ldots$) — последовательность равномерно ограниченных случайных величин, $s_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_1^n x_i$, m_{s_n} — среднее значение величины s_n, $\mu_{x_n s_n}$ — корреляция между x_n и s_n.

Доказывается, что для того чтобы $\lim_{n\to\infty} P\{|s_n - m_{s_n}| > \rho\} = 0$ для любого $\rho > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} \mu_{x_n s_n} \leqslant 0$. Доказательство проводится на основе результатов Сапогова.

Примечание референта. Имеются опечатки: на стр. 47—48 всюду вместо X_i, S_n надо читать x_i, s_n.

M. Rosenblatt-Roth

2926. О продолжительности линейных процессов. Зитек (Sur la durée des processus liéaires. Zitek František), Чехосл. матем. ж., 1958, **8**, № 1, 122—130 (франц.; рез. русск.)

Рассматриваются стохастические процессы, удовлетворяющие условиям (линейные процессы):

1) Если $t_1, t_2 \in T \subset R = (-\infty, \infty)$, $t_1 < t_2$, то приращение $X(t_2) - X(t_1)$ стохастически не зависимо от $X(t_1)$, и от множества $X(t)$ для $t < t_1$, $t \in T$.

2) Закон, управляющий приращением $X(t_2) - X(t_1)$, зависит только от разности $t_2 - t_1$.

3) Если $t_n \to t$, $t_n > t$, то последовательность $X(t_n) - X(t)$ сходится по вероятности к нулю.

4) Закон распределения $X(t)$ является безгранично делимым.

Вводится аналог логарифма характеристической функции — ψ функция процесса:

$$\psi(t, s) = \lg \int_{\Omega} \exp[isX(t)(\omega)]\,dP(\omega), \qquad (1)$$

где Ω — измеримое пространство с вероятностной мерой P. Пусть D — множество ψ-функций процессов, управляемых безгранично делимыми законами.

Сообщается, что для линейных процессов

$$\psi(t, s) = \psi_0(s) + (t - t_0)\bar{\psi}(s),$$

где ψ_0, $\psi \in D$.

Доказываются теоремы:

1. Пусть $t_0 \in R$; $\psi_0, \bar{\psi} \in D$, тогда множество T значений t, для которых функция $\psi(t, s)$, определенная в (1), принадлежит D, всегда является интервалом. $T = R$, тогда и только тогда, когда $\bar{\psi}(s) = i\mu s$.

2. Пусть $t_1, t_2 \in R$; $\psi_1, \psi_2 \in D$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовал линейный процесс $X(t)$ с ψ-функцией $\psi(t, s)$, удовлетворяющей условиям

$$\psi(t_1, s) = \psi_1(s), \quad \psi(t_2, s) = \psi_2(s),$$

является $(\psi_2 - \psi_1) \in D$.

3. Пусть $\psi_1, \psi_2 \in D$, $r_0 = \sup\{r : (\psi_1 - r\psi_2) \in D\}$. Пусть m_1 и m_2 — меры на σ-алгебре B борелевских множеств в R, индуцированные функциями G_1 и G_2, соответствующими функциям ψ_1 и ψ_2 в каноническом их представлении

$$\psi(s) = i\lambda s + \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{isx} - 1 - \frac{isx}{1+x^2}\right]\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)$$

(см., например, Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. — Л. ГТТИ, 1949, стр. 83, № 18). Тогда: Для того чтобы было $r_0 > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $m_2 \ll m_1$ и $\sup vrai \frac{dm_2}{dm_1} < \infty$, при этом

$$\sup vrai \frac{dm_2}{dm_1} = \frac{1}{r_0}$$

(Халмош П., Теория меры, М., изд-во ин. лит., 1953, стр. 125—132).

В работе приводятся также примеры статистических оценок начала интервала T для процесса броуновского движения и пуассоновского процесса.

В. П. Швальб

2927. Ограниченные случайные блуждания и использование моментов. Сак (Restricted random walks and the use of moments. Sack R. A.), Philos. Mag., 1958, **3**, № 29, 504—507 (англ.)

Отмечается, что при описании случайных блужданий (с дискретным временем) метод характеристических функций в его простейшей форме оказывается неэффективным, если между последовательными шагами имеется корреляция или если точки сетки, по которой совершается блуждание, не эквивалентны. Однако если требуется лишь неполное описание случайного блуждания (например, лишь сведения о среднем смещении и дисперсии смещения за один шаг или же о параметрах асимптотического гауссова распределения для величины смещения за много шагов), удобным оказывается использование моментов. Приводятся рекуррентные формулы для моментов произвольного порядка смещения за N шагов в одномерном и двумерном случаях. Приводятся примеры дискретных блужданий на прямой и на трехмерной гексагональной сетке.

А. С. Монин

2928. Случайные элементы в пространстве Банаха. Мурье (Eléments aléatoires dans un espace de Banach. Mourier E.), Ann. Inst. Henri Poincaré, 1953, **13**, № 3, 161—244 (франц.)

Дается подробное изложение ранее полученных результатов (C. r. Acad. sci, 1949, **229**, 1300; 1950, **231**, 28; 1951, **232**, 923; РЖМат, 1953, 350).

В банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ определяется L-мера, т. е. мера, для которой все линейные функционалы x^* измеримы.

В первой главе определяется математическое ожидание $E(X)$ случайного элемента X со значениями в $\mathfrak{X}$: если математическое ожидание существует, оно является элементом из $\mathfrak{X}$, причем $x^*[E(X)] = E[x^*(X)]$ для всякого линейного функционала $x^* \in \mathfrak{X}^*$ (это определение эквивалентно определению интеграла Петтиса (Pettis, Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 277—304)). Даются разные свойства $E(X)$. Если X и Y определены на $\mathfrak{X}$ и если $E(X)$, $E(Y)$ существуют, то $E(X+Y)$ существует и $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. Если $\|X\|$ измеримо, $E[\|X\|] < +\infty$ и $E(X)$ существует, то $\|E(X)\| \leqslant E[\|X\|]$. Если $\mathfrak{X}$ сепарабельно, тогда и $\|X\|$ измеримо L, если $\mathfrak{X}$ сепарабельно и рефлексивно и $E[\|X\|] < +\infty$, то $E(X)$ существует.

Сравниваются определения математического ожидания Фреше и Досса (Fréchet M., Rev. scient., 1950, № 8; Doss S., Bull. Soc. math., 1944, 2^e sér., **73**) и даются условия, при которых оба определения совпадают. Во второй главе независимость и стационарность опреде-

ляется обычным образом. Если $\mathfrak{X}^*$ сепарабельно, X_i ($i = 1, 2, \ldots$) — независимые одинаково распределенные случайные элементы, для которых $E[\|X_i\|] = M < +\infty$ и $E(X_i)$ существуют, т. е. можно брать $E(X_i) = 0$, то $Y_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ слабо стремится почти наверное к 0, при $n \to \infty$.

Если X_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — стационарная в узком смысле последовательность случайных элементов в сепарабельном и рефлексивном $\mathfrak{X}$ и если $E[\|X_i\|] < +\infty$, то $Y_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ слабо сходится почти наверно к некоторому Y при $n \to \infty$.

Рассматриваются случайные элементы X, определенные с помощью L-меры в $\mathfrak{X}$, такие, что $\|X\|$ измеримо и $E(\|X\|^\alpha) < +\infty$ при данном $\alpha \geqslant 1$ (Условие C_α).

Пусть каждая случайная величина X со значениями в $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющая C_α является элементом $\overset{\alpha}{X}$ пространства $\overset{\alpha}{\mathfrak{X}}$. Если в $\overset{\alpha}{\mathfrak{X}}$ введем норму $\|\overset{\alpha}{X}\| = [E(\|X\|^\alpha)]^{1/\alpha}$, то $\overset{\alpha}{\mathfrak{X}}$ является пространством Банаха. Изучаются линейные функционалы над $\overset{\alpha}{\mathfrak{X}}$ для сепарабельного и рефлексивного $\mathfrak{X}$ при $\alpha > 1$.

Изучается усиленный закон больших чисел для сильной сходимости. Если $\mathfrak{X}$ сепарабельно, всякий $x^*(X_i)$ измерим, $E(\|X_i\|) < +\infty$ и последовательность X_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) стационарна, то $\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ сильно сходится почти наверно к случайному элементу Y такому, что $x^*(Y)$ измерим и $E(\|Y\|) < +\infty$. Доказывается, что для сепарабельного $\mathfrak{X}$ $E(\|X\|) < +\infty$ влечет за собой существование $E(X)$.

Если $\mathfrak{X}$ сепарабельно и рефлексивно, $\alpha > 1$, то для стационарной последовательности элементов X_i ($i = 0, 1, \ldots$) из $\overset{\alpha}{\mathfrak{X}}$ существует элемент $Y \in \mathfrak{X}$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left\|\frac{1}{n}\cdot\sum_1^n X_i - Y\right\|^\alpha\right) = 0.$$

В третьей главе изучается характеристический функционал (х. ф.) случайного элемента пространства Банаха. Функционал $\varphi(x^*) = E[e^{ix^*(X)}]$ от x^* над x^* является х. ф. X (Колмогоров А. Н., C. r. Acad. sci., 1935, 200, 1717).

Если X, Y — случайные элементы в $\mathfrak{X}$, х. ф. $X + Y$ суть произведение х. ф. X и х. ф. Y.

Функционал $\varphi(x^*)$ равномерно непрерывен на $\mathfrak{X}^*$ и непрерывен на $\mathfrak{X}^*$ в смысле слабой сходимости.

Действительная функция $\varphi(x^*)$ является положительно определенной, если она непрерывна по сильной сходимости в $\mathfrak{X}^*$ и для любых n, $x_1^*, \ldots, x_n^*$ и любых комплексных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\sum_{j,k}^n \varphi(x_j^* - x_k^*)\alpha_j\bar{\alpha}_k \geqslant 0$, так что х. ф. — положительно определенная.

Цилиндр ε_n в $\mathfrak{X}$ определяется как множество всех $x \in \mathfrak{X}$ таких, что $[x_1^*(x), \ldots, x_n^*(x)] \in E_n$, где E_n — измеримое множество в евклидовом пространстве R_n n измерений.

Всякая положительно определенная функция на $\mathfrak{X}^*$, для которой $\varphi(0^*) = 1$, определяет вероятностную меру $m(\varepsilon)$ в теле цилиндров из $\mathfrak{X}$. Пусть $S(\alpha)$ — сфера в $\mathfrak{X}$ с центром 0 и радиусом α; A_n — множество точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в R_n таких, что система $x_i^*(x) = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) обладает по крайней мере одним решением x, для которого $\|x\| \leqslant \alpha$; $\mathfrak{A}_n$ — множество всех $x \in \mathfrak{X}$ таких, что $[x_1^*(x), \ldots, x_n^*(x)] \in A_n$ и $\rho(\alpha) = \lim_{n\to\infty} m(\mathfrak{A}_n)$.

Пусть $\varphi(x^*)$ такова, что для всякой плотной на единичной сфере в $\mathfrak{X}^*$ последовательности $\{x_i^*\}$ $\lim_{\alpha\to+\infty} \rho(\alpha) = 1$ (Условие C).

Для сепарабельного и рефлексивного $\mathfrak{X}$ C является необходимым и достаточным условием для того, чтобы положительно определенная функция $\varphi(x^*)$, для которой $\varphi(0^*) = 1$ было х. ф.

Четвертая глава посвящена гауссовым случайным элементам в $\mathfrak{X}$, т. е. $x^*(X)$ является гауссовой случайной величиной для всякого $x^* \in \mathfrak{X}^*$.

На основе результата Дармуа (Darmois G., C. r. Acad. sci., 1951, 232, 1999) доказывается, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы случайный элемент со значениями в любом банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ был гауссовым, заключается в существовании независимого от X случайного элемента Y со значениями в $\mathfrak{X}$ такого, что $X + Y$ и $X - Y$ независимы (Fréchet, Généralisation de la loi de probabilité de Laplace, Ann. Inst. Poincaré, 1951, XII, fasc. 1.).

Если $\mathfrak{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство и X — гауссов элемент, то $E(X)$ существует, $E(\|X\|^2) < +\infty$ и, если $X = \sum_i A_i x_i$, то $E(X) = \sum_i E(A_i)x_i$.

Если X является случайным элементом со значениями в сепарабельном гильбертовом пространством $\mathfrak{H}$, тогда существует в $\mathfrak{H}$ ортогональная система $\{x'_j\}$ такая, что $X = \sum_j x_j' A'_j$, причем A_j' является случайными гауссовыми независимыми элементами.

Если Y_i ($i = 1, 2, \ldots$) — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве и $E(\|Y_i\|^2) < +\infty$, то $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_1^n Y_i$ сходится в смысле Бернулли, к гауссову случайному элементу при $n \to \infty$ (РЖМат, 1957, 8788).

M. Rosenblatt-Roth

2929. Отсутствие диффузии в некоторых случайных решетках. Андерсон (Absence of diffusion in certain random lattices. Anderson P. W.), Phys. Rev., 1958, **109**, № 5, 1492—1505 (англ.)

Для некоторых физических процессов, как, например, диффузия спинов, предлагается простая модель, интерпретирующая эти процессы как дискретные скачки частиц по некоторой решетке, причем сама эта решетка является в некотором смысле случайной, так же как и распределение энергии частиц по ее ячейкам. Показывается, что при достаточно низкой плотности частиц диффузии вообще не будет. Устанавливается критерий возникновения диффузии. По резюме автора

2930. Два полезных понятия в математической статистике: случайные множества, ограниченные «по закону» и сильная равномерная непрерывность по вероятности. Дюге (Deux notions utiles en statistique mathématique: les ensembles aléatoires bornés «en loi» et la continuité fortement uniforme en probabilité. D u-

gué Daniel), Colloq. analyse statist. CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 135—141 (франц.)

Множество случайных величин называется ограниченным „по закону", если множество законов $F_\tau(x)$ распределения каждой из этих величин таково, что $\liminf_{x\to\infty} F_\tau(x) = 1$, $\limsup_{x\to-\infty} F_\tau(x) = 0$.

Если последовательность случайных величин x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ограничена „по закону", и M_n — наибольшее возможное значение случайных величин x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то указывается без доказательства, что существуют возрастающие функции $\varphi(n)$, $\Phi(n)$, $c(n)$ такие, что $\frac{M_n}{\varphi(n)}$ сходится по вероятности к нулю, $\frac{M_n}{\Phi(n)}$ сходится почти наверное к нулю и $\frac{M_n}{c(n)}$ сходится почти вполне к нулю (определение этой сходимости см. в работе Dugué D., Eléments stochastiques limites, Actes de la 28e session de l'Inst. Internat. de Statistique). Этот результат остается верным, если вместо M_n брать m_n — наименьшее возможное значение случайных величин x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказывается, что непрерывный „по закону" стохастический процесс, определенный на ограниченном сегменте, ограничен „по закону". Процесс является непрерывным „по закону" для $t = t_0$, если закон распределения случайной величины $x(t)$ стремится к закону распределения случайной величины $x(t_0)$ при $t \to t_0$ во всех точках непрерывности последней (т. е. слабо сходится).

Доказывается, что в теореме Ки-Фана, обобщающей аппроксимационную теорему Вейерштрасса с класса непрерывных в конечном замкнутом интервале функций на класс случайных непрерывных по вероятности в (0,1) функций $x(t)$ (Ky-Fan, Bull. Soc. math. France, 1944), условие существования $M|x(t)|$ не требуется. Пусть t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — точки между α и β и M_n — наибольшее возможное значение случайных величин $|x(t_1) - x(\alpha)|$, $|x(t_2) - x(t_1)|, \ldots, |x(\beta) - x(t_n)|$. Если M_n сходится по вероятности к нулю, когда $n \to \infty$ и $\max_i (t_{i+1} - t_i) \to 0$ во всевозможных подразделениях $\{t_i\}$, то процесс является равномерно сильно непрерывным по вероятности.

Дается пример почти наверное непрерывного процесса, который не является равномерно сильно непрерывным по вероятности. M. Rosenblatt-Roth

2931. Определение корреляционных функций некоторых процессов, связанных с задачами обслуживания. Коваленко (Визначення кореляційних функцій деяких процесів, пов'язаних з задачами обслуговування. Коваленко І. М.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 5, 480—481 (укр.; рез. русск., англ.)

Имеются приборы, потребляющие энергию, причем мощность этого потребления представляет случайный процесс, порожденный последовательностью независимых случайных величин. Вычисляется корреляционная функция такого процесса. Резюме автора

2932. О некоторых интегралах в структурах. Кристеску (Asupra unor integrale în latici. Cristescu Romulus), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 2, 119—123 (рум.; рез. русск., франц.)

В теории вероятностных процессов большое значение имеет понятие интеграла от функции, принимающей значения в структуре частей некоторого пространства S, введенное О. Ониску.

Автор дает общее определение такого интеграла для относительно полных и бесконечно дистрибутивных структур и делает несколько замечаний об определении интегралов аналогичного типа. Резюме автора

2933. Об одной общей теореме из теории вероятностей и ее применениях в теории стохастических процессов. Такач (On a general probability theorem and its applications in the theory of the stochastic processes. Takács Lajos), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 2, 219—224 (англ.)

Иордан (Jordan C., Math. phys. lapok, 1927, 34, 109—136; Problèmes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général, Paris, 1939) доказал общую теорему:

$$P_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} B_j, \qquad (1)$$

где P_k — распределение вероятностей целой неотрицательной случайной величины, а B_k — его биномиальные моменты. В первоначальной форме теорема гласила, что если $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые из случайных исходов какого-то эксперимента, η_n — число событий из $A_1, \ldots, A_n$, совместно наблюдаемых при эксперименте, $P_k = P\{\eta_n = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $B_0 = 1$, $B_j = \sum P\{A_{i_1} \ldots A_{i_j}\}$, где сумма берется по всем сочетаниям без повторений $(i_1, \ldots, i_j)$ из чисел $(1, \ldots, n)$, то выполняется (1) $\left[B_k = M\left\{\binom{\eta_n}{k}\right\}\right]$.

Л. Такач дает новое доказательство последнего утверждения, а также доказательство для частного случая, когда события $A_1, \ldots, A_n$ принадлежат к классу эквивалентных (Хинчин А. Я., Матем. сб., 1932, 39, № 3, 40—43), т. е.

$$P\{A_{i_1} \ldots A_{i_j}\} = P\{A_1 \ldots A_j\}$$

$$(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant n; \quad j = 1, \ldots, n).$$

Формулы для этого случая позволяют ему в приложениях получить результаты более просто, чем у других авторов.

Рассмотрены такие примеры:

1. На окружности длины t выбираются независимо и случайно n точек с одинаковым распределением. Определяется вероятность того, что точно k дуг окружности между ними превосходят по длине α. Она оказывается равной вероятности в аналогичной задаче, где отрезок $(0, t)$ делится n независимыми равномерно распределенными точками.

2. Рассматривается счетчик Гейгера-Мюллера. В пуассоновом процессе с параметром λ каждое событие в интервале $(0, t)$ вызывает импульс длительности α; регистрируются те события, которые начинаются в момент, когда нет импульса (Levert C., Scheen W. L., Physica, 1943, 10, 225—238).

Л. Такач находит вероятность того, что в интервале $(0, t)$ зарегистрировано точно k событий, а также биномиальные моменты. Задача может быть обобщена в предположении, что α — случайная величина с данным распределением. Г. Н. Сакович

2934. Введение в изучение кумулятивных рядов. Ами (Introduction à l'étude des séries cumulées. Amy Lucien), J. Soc. statist. Paris, 1955, 96, № 10-12, 231—252 (франц.)

2935. Некоторые теоремы о двумерном броуновском движении. Спицер (Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. Spitzer Frank), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 187—197 (англ.)

Доказываются следующие теоремы о модуле $R(t)$ и аргументе $\theta_R(t)$ сепарабельного процесса Башелье-Винера $X(t) + iY(t)$ (индекс R у аргумента θ соответствует начальному условию $R(0) = R$):

1) При любой положительной неубывающей функции $g(t)$ вероятность того, что при всех достаточно больших t и произвольном R выполняется неравенство $R(t) \geqslant g(t)t^{1/2}$,

равняется единице или нулю в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_1^\infty [kg(k)]^{-1}$. 2) При $\theta_R(0) = \alpha > 0$ и $\beta > 0$ обозначим через $T_{R,\alpha,\beta}$ нижнюю грань тех τ, для которых $\theta_R(\tau) \leqslant 0$ или $\theta_R(\tau) \geqslant \beta$. Тогда необходимым и достаточным условием существования математического ожидания величины $T^{\delta}_{R,\alpha,\beta}$ при $\delta \geqslant 0$ является выполнение неравенства $2\delta\beta < \pi$. 3) При $\alpha = 0$ характеристическая функция для $\theta_R(t)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda, t; R) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} e^{-z}\left[I_{\frac{|\lambda|-1}{2}}(z) + I_{\frac{|\lambda|+1}{2}}(z)\right];\quad z = \frac{R^2}{4t},$$

и справедлива предельная теорема

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\theta_R(t) < \frac{\alpha}{2}\log t\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{dx}{1+x^2}.$$

При доказательстве первой из указанных теорем используется асимптотическая оценка $P\{\min_{t_1\leqslant t\leqslant t_2} R(t) < r | R=0\} \sim$ $\sim \log\frac{t_2}{t_1}\Big/\log\frac{1}{r^2}$ $(r\to 0)$. Далее рассматривается случай $X(0) = x_0$, $Y(0) = 0$. Пусть $T(Y)$ — минимальное из тех $t \geqslant 0$, для которых $Y(t) \geqslant y$. Тогда процесс $C(t)$, определяемый формулами $C(0) = x_0$, $C(y) = X[T(y)]$, является процессом Коши. Доказывается, что при $x_0 \in (-1, 1)$ вероятность события „значение $C(t) \geqslant 1$ достигается раньше, чем значение $C(t) \leqslant -1$" равна $\frac{1}{2} + \pi^{-1}\sin^{-1}x_0$.

А. С. Монин

2936. Подход к скорости передачи информации с точки зрения теории предсказания. Пауэрс (A prediction theory approach to information rates. Powers Kerns H.), IRE Convent. Rec., 1956, **4**, № 4, 132—139 (англ.)

Пусть $\xi = \{\xi_j\}$ и $\eta = \{\eta_j\}$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$ — гауссовые стационарные в узком смысле и стационарно связанные случайные последовательности. Пусть также пара (ξ, η) регулярна. Скорость передачи информации $R(\eta; \xi)$ между последовательностями η и ξ определяется следующим образом:

$R(\eta; \xi) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} MJ(\eta_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_{k+N}; \xi | \eta_-)$, где через η_- обозначена совокупность $(\ldots, \eta_{k-2}, \eta_{k-1})$, а $J(\eta_k, \ldots, \eta_{k+N}; \xi | \eta_-)$ условная информация между $(\eta_k, \ldots, \eta_{k+N})$ и ξ при условии, что задано η_-. Ставится задача: вычислить $R(\eta; \xi)$.

Доказывается, что имеет место формула

$$R(\eta; \xi) = MJ(\eta_k; \xi | \eta_-).$$

Для вычисления $J(\eta_k; \xi | \eta_-)$ необходимо определить плотность распределения $p_1(x)$ величины η_k при условии, что η_- фиксировано, а также плотность распределения $p_2(x)$ величины η_k при условии, что фиксирована пара (ξ, η_-). Плотности $p_1(x)$ и $p_2(x)$ будут гауссовыми. Среднее значение для $p_1(x)$ определяется как наилучшее в смысле среднеквадратической ошибки значение η_k при экстраполировании по всему прошлому η_-. Дисперсия для $p_1(x)$ определяется как среднеквадратическая ошибка экстраполирования η_k по η_-. Аналогично, среднее и дисперсия для плотности $p_2(x)$, равняющая предсказываемому значению и среднему квадрату при наилучшем предсказании η_k по η_- и ξ. В работе вычислены распределения $p_1(x)$ и $p_2(x)$.

Найдено, что

$$R(\eta; \xi) = \frac{1}{4\pi i}\oint \log\left[\frac{f_{\xi\xi}(z) f_{\eta\eta}(z)}{f_{\xi\xi}(z) f_{\eta\eta}(z) - f_{\eta\xi}(z) f_{\xi\eta}(z)}\right]\frac{dz}{z}, \quad (1)$$

где интегрирование ведется по $z = ze^{i\theta}$, лежащим на единичной окружности, описанной около $z = 0$, а $f_{\xi\xi}(\theta)$, $f_{\eta\eta}(\theta)$, $f_{\eta\xi}(\theta)$ и $f_{\xi\eta}(\theta)$ — собственные и взаимные спектральные плотности. Этот результат обобщается на случай гауссовых стационарных в узком смысле и стационарно связанных непрерывных регулярных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$. В этом случае получено для скорости передачи информации

$$R(\eta_t(t);\ \xi(t) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{f_{\xi(t)\xi(t)}(w) f_{\eta_t(t)\eta_t(t)}(w)}{f_{\xi(t)\xi(t)}(w) f_{\eta_t(t)\eta_t(t)}(w) - |f_{\xi(t)\eta_t(t)}(w)|^2}\,dw. \quad (2)$$

В качестве примера вычисляется скорость передачи информации через нелинейный дискретный фильтр в присутствии шума.

Находится $R(\eta; \xi)$, если

$$\eta_k = \sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j(\xi_{k-j} + \zeta_{k-j})\ \ (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

где $\zeta = \{\zeta_j\}$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$ — гауссовая стационарная последовательность, не коррелированная с ξ, а γ_j $(j = 0, 1, \ldots)$ — числа, характеризующие фильтр. Доказывается, что в случае, когда функция $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j z^j$ не обращается в 0 при $|z| < 1$, скорость $R(\eta; \xi)$ равна

$$R(\eta; \xi) = \frac{1}{4\pi i}\oint \log\left[1 + \frac{f_{\xi\xi}(z)}{f_{\zeta\zeta}(z)}\right]\frac{dz}{z},$$

т. е. не зависит от $\{\gamma_j\}$.

Далее в работе находятся выражения для $MJ(\eta_k; \xi_k, \xi_-|\eta_-)$ и $MJ(\eta_k; \xi_-|\eta_-)$ и дается их физическая интерпретация.

Примечание референта. Впервые на связь между скоростью передачи информации и теорией экстраполяции и фильтрации обратил внимание М. С. Пинскер в 1954 г. (РЖМат, 1956, 3972). В этой работе Пинскером получены формулы (1) и (2). Работы Пинскера остались, по-видимому, неизвестными автору. Б. С. Цыбаков

2937. Об основных теоремах теории информации. Хинчин А. Я., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 17—75

Дается полное доказательство двух основных теорем теории информации, впервые сформулированных Шенноном (Bell. System Techn.J., 1948, **27**, 379—423; 623—656). Автор проводит доказательство по пути, указанному работами Макмиллана и Фейнстейна, уклоняясь от них лишь для пополнения пробелов или с целью упрощения доказательства.

Статья содержит пять глав, введение и заключение. Во введении даются краткие сведения о существующей литературе по теории информации и подчеркивается ее математическая незавершенность. Первая глава статьи носит вспомогательный характер. Вторая глава посвящается теории источников. По Макмиллану источник понимается как некоторый случайный стационарный процесс с дискретным временем и с конечным множеством A (алфавитом) возможных состояний (букв). Через $x = (\ldots x_{-1}, x_0, x_1 \ldots)$ обозначается некоторая возможная „история жизни" источника. Множество всех x обозначается через A^I. Каж-

дое x представляет собой элементарное событие некоторого бесконечного поля вероятностей. Через F_A обозначается борелевское замыкание множества всех цилиндров из A^I. Полное описание источника как случайного процесса достигается заданием 1) алфавита A и 2) некоторого поля вероятностей $\mu(S)$, определенного на $S \in F_A$, причем $\mu(A^I) = 1$. Источник обозначается символом $[A, \mu]$. Если T — оператор сдвига, т. е. $Tx = (\ldots x'_{-1}, x_0', x_1' \ldots)$, где $x_k' = x_{k+}$ $(-\infty < k < +\infty)$ и для всякого $S \in F_A$ $\mu(TS) = \mu(S)$, то источник называется стационарным.

В третьей главе рассматриваются каналы передачи информации и питающие их источники. Канал определяется с помощью трех элементов: 1) конечного входного алфавита A, 2) конечного выходного алфавита B; 3) вероятности $\nu_x(S)$ того, что полученные цепочки $y = (\ldots y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$ при данном отправлении x принадлежат множеству $S \in F_B$. Эта вероятность должна быть задана для любого $x \in A^I$ и любого $S \in F_B$. Канал обозначается через $[A, \nu_x, B]$. Канал называется стационарным, если для любых $x \in A^I$ и $S \in F_B$ имеет место равенство $\nu_{Tz}(TS) = \nu_x(S)$, где T — оператор сдвига.

Если $\nu_x(y_n = b)$ не зависит от тех x_k, для которых $k > n$, то автор такой канал называет каналом „без предвосхищения".

Если $\nu_x(y_n = b)$ не зависит от всех x_k $(-\infty < k \leqslant n)$, а только от тех x_k, для которых $n - m \leqslant k \leqslant n$, то автор такой канал называет каналом „с конечной памятью". Наименьшее число m, для которого описанное имеет место, автор называет "памятью" канала.

Далее вводится понятие скорости передачи информации, исходящей от данного источника $[A, \mu]$ через канал $[A, \nu_x, B]$. В пятой главе доказываются теоремы Шеннона. В § 14 излагаются вопросы кодирования.

Если продукция стационарного источника $[A_0, \mu]$ подлежит передаче посредством стационарного канала $[A, \nu_x, B]$, причем алфавиты A_0 и A различны между собою, тогда необходимо перевести (кодировать) поступающую от источника цепь $\theta = \ldots \theta_{-1} \theta_0 \theta_1 \ldots$ букв алфавита A_0 в некоторую цепь $x = \ldots x_{-1} x_0 x_1 \ldots$ букв алфавита A. Таким образом код определяется как функция $x = x(\theta)$, где $\theta \in A_0^I$ и $x \in A^I$, . (A_0^I и A^I — множества всех θ и всех x соответственно).

Теорема. Пусть дано: 1) стационарный непредвосхищающий канал $[A, \nu_x, B]$ с эргодической пропускной способностью C и с конечной памятью m и 2) эргодический источник $[A_0, \mu]$ с энтропией $H_0 < C$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда при достаточно большом n можно закодировать продукцию источника $[A_0, \mu]$ в алфавит A так, что каждая цепочка α_i из n букв алфавита A_0 перейдет в цепочку u_i из $n + m$ букв алфавита A и, передавая цепочку u_i через данный канал, по цепочке, полученной на выходе канала, можно с вероятностью, превосходящей $1 - \varepsilon$, правильно определить посланную цепочку α_i. Здесь α_i $(i > 1)$ обозначает некоторую «высоковероятную» цепочку $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ продукции источника $[A, \mu]$, обладающей свойством E, и α_0 — совокупность всех цепочек «маловероятной» группы.

В тех же условиях доказывается, что код может быть выбран таким образом, чтобы скорость передачи была как угодно близка к H_0.

В заключение вкратце излагается основная мысль всех проведенных рассуждений и подчеркивается, что автору не удалось доказать обратное утверждение: если $H_0 > C$, то кодирование с требуемым эффектом невозможно. Для этого необходимо и достаточно доказать, что вместо C можно брать C_0 — верхнюю грань $R(X, Y)$ по всем источникам, которые могут питать данный канал.

Примечания референта. Определения, данные автором в § 9, стр. 48, для понятия канала без предвосхищения, канала с конечной памятью и для памяти канала, не являются полными. В действительности их надо определить следующим образом:

Пусть S_n — некоторое измеримое множество цепочек $y_0, y_1 \ldots y_n$. Если $\nu_x(S_n)$ не зависит от тех x_k, для которых $k > n$ для всевозможных целых n, всех $x \in A^I$ и всех измеримых S_n, то канал следует назвать каналом без предвосхищения.

Если $\nu_x(S_n)$ не зависит от всех x_k $(-\infty < k \leqslant n)$, а только от x_k, для которых $n - m \leqslant k \leqslant n$ для всевозможных целых n, всех $x \in A^I$ и всех измеримых S_n, то канал следует назвать каналом с конечной памятью.

Наименьшее число m, для которого описанное имеет место, следует называть памятью канала.

Несмотря на неполные определения, данные автором, он сам употребляет эти понятия в указанном референтом смысле. M. Rosenblath-Roth

2938. Кодирование непрерывного источника информации. Келли (Coding a continuous information source. Kelly J. L., Jr), Proc. Nat. Electronics Conf., 1956 (1957), **12**, 394 (англ.)

2939. О соотношениях между различными определениями информации. Тионе (Sur les rapports entre divers concepts d'information. Thionet Pierre), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 2, 223—224 (франц.)

Рассматривается опыт с M равновероятными исходами. Вводится понятие разброса $D(i\,j)$ между исходами i и j опыта $D(ij) = \dfrac{1 - \exp(-f(ij))^{-1}}{M^2}$, где f — положительная функция такая, что $f(ij) = f(ji)$, $f(ii) = 0$.

Сообщается, что величина $D(ij)$ связана с ранее введенной величиной «потери информации» следующим образом:

$$E\left[-\log\left(1 - \frac{1}{M^2 D(ij)}\right)\right] = Ef(ij) = (P_i),$$

где (P_i) — потеря информации. В. П. Швальб

2940. Методы Монте-Карло, не требующие сложной вычислительной аппаратуры. Хаммерсли, Мортон (Poor man's Monte Carlo. Hammersley J. M., Morton K. W.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 1, 23—38 (англ.)

Методы Монте-Карло часто являются и должны быть одними из тех стандартных приемов, которыми пользуется практик-статистик. Эта статья представляет введение в такие методы, причем наибольшее внимание уделяется тем методам, которые требуют мало или совсем обходятся без вычислительной аппаратуры. Три рабочих численных примера, расположенных в порядке трудности, иллюстрируют некоторые из наиболее важных правил. Последний из этих примеров касается некоторых проблем невозвратного блуждания, т. е. блуждания без кратных точек. Резюме автора

2941. Исследование по истории теории вероятностей и статистики. Принцип арифметической средней. Плаккетт (Studies in the history of probability and statistics. VII. The principle of the arithmetic mean. Plackett R. L.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 130—135 (англ.)

Прослеживается история задачи комбинирования множества независимых наблюдений над одним и тем же количеством с античных времен до появления в 18 столетии арифметической средней как статистической концепции. Резюме автора

2942. Логарифмически нормальное распределение и его нахождение методом моментов. Исихара, Такасэ (Ishihara Tojiro, Takase Nobuta da), Добоку гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Civil Engrs, 1957, № 47, 18—23 (японск.; рез. англ.)

Автор предлагает новый прием нахождения, основанный на методе моментов, логарифмически нормального распределения с бесконечным верхним и конечным нижним пределами. Используя метод моментов, автор показывает, что распределение Гумбеля является частным случаем логарифмически нормального распределения.

Из резюме автора

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2943. **Об относительной точности некоторых выборочных методов. Дес-Радж** (On the relative accuracy of some sampling techniques. Des Raj), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 281, 98—101 (англ.)

2944. **Выборка как средство статистического исследования (в кратком изложении). Сакалис** (Sakalis J. A.), Спудэ икономикэ, киноникэ, техникэ, 1957—58, 8, № 7-8, 112—141 (греч.)

2945. **Построение стандартного отклонения. Мёйлвейк** (Reconstructie van de spreiding. Muilwijk J.), Statist. neerl., 1958, **12**, № 2, 97—98 (гол.; рез. англ.)

2946. **Нахождение критериев значимости для больших выборок с помощью производящей функции для моментов. Атанассиадис** (Athanassiadis C.), Спудэ икономикэ, киноникэ, техникэ, 1957—58, 8, № 7-8, 1—10 (греч.)

2947. **О выборочном распределении среднего квадратического последовательных разностей. Гайен, Джогдео** (On the sampling distribution of mean square successive difference. Gayen A. K., Jogdeo S. S.), Proc. Ist Congr. Theoret. and Appl. Mech., 1955. Kharagpur, Indian Inst. Technol., s. a., 253—260 (англ.)

В статье с помощью первых четырех выборочных моментоз получено приближенное распределение среднего квадратического последовательных разностей в выборках объема n из нормальной совокупности. 5%- и 1%-ные точки протабулированы для некоторых значений $n \geqslant 10$, так как аппрокамация, по-видимому, является удовлетворительной для таких объемов выборок. Резюме авторов

2948. **Моменты выборочных моментов для цензурированных выборок из нормальной совокупности. Со** (Moments of sample moments of censored samples from a normal population. Saw J. G.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 211—221 (англ.)

2949. **Предельные распределения однородных функций выборочных промежутков. Уэйсс** (Limiting distributions of homogeneous functions of sample spacings. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 310—312 (англ.)

Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — длины n интервалов, на которые разбиваются интервал $[0,1]$ $n-1$ независимыми случайными величинами, каждая из которых равномерно распределена на $[0,1]$. Моран, Кимбалл и Дарлинг показали, что если r — положительное число, то асимптотическое распределение величины $T_1^2+T_2^2+\ldots+T_n^2$ нормально. В статье этот результат обобщается в двух направлениях: берутся функции от $T_1,\ldots,T_r$ более общего типа и изучается совместное распределение таких функций. Доказательство кратко и просто. Резюме автора

2950. **Статистические методы и научная индукция. Фишер** (Statistical methods and scientific induction. Fisher Ronald), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 1, 69—78 (англ.)

Попытки истолковать обычные критерии значимости используемые в научных исследованиях, как своего рода процедуры принятия «решения» в смысле Вальда привели и приводят к ряду недоразумений.

Автор разъясняет три фразы, употребительные в математической статистике, и предупреждает против тех ложных выводов, к которым они могут привести. Эти фразы следующие: 1) «выбор с возвращением из одной и той же генеральной совокупности», 2) ошибки «второго рода», 3) «индуктивное поведение». Из резюме автора

2951. **Статистические свойства обращенных гауссовых распределений. II. Туиди** (Statistical properties of inverse Gaussian distributions. II. Tweedie M. C. K.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 695—705 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 8012.

Пусть X — случайная величина с плотностью распределения $\exp\left\{-\frac{\varphi^2 x}{2\lambda}+\varphi-\frac{\lambda}{2x}\right\}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}$, $0<x<\infty$, причем $E(x)=\frac{\lambda}{\varphi}=\mu$. Дается метод вычисления функций от выборочного среднего m, математические ожидания которых просто выражаются через параметр φ (или μ).

В частности доказывается, что условное математическое ожидание любой несмещенной оценки $\tilde{k}_r$ для k-й кумулянты k_r есть

$$E(\tilde{k}_r \mid m) = 2m\left(\tfrac{1}{2}\lambda n^2\right)^{r-1} e^{\frac{1}{2}g}\int_1^\infty (u-1)^{2r-3} e^{-\frac{1}{2}gu^2}\,du/(r-2)!,$$

где $g=\lambda n/m$. $E(k_r \mid m)$ можно вычислить или с помощью разложения в ряд, или используя опубликованные таблицы численных значений некоторых известных функций. Также находится условная дисперсия обычной средней квадратической оценки s^2 для k_2.

Эти результаты позволяют построить асимптотическое разложение условной дисперсии обобщения $\chi_s^2 = (u-1)^2 s^2/E(s^2/m)$ статистики Кохрана. Обсуждаются точная формула для математического ожидания статистики s^2/m^3 и ее средняя квадратическая ошибка. Эта статистика является состоятельной оценкой для λ^{-1} и имеет асимптотическую эффективность, равную $\varphi/(\varphi+3)$.

Резюме автора

2952. **Достаточные статистики, подобные области и непараметрические критерии. Уотсон** (Sufficient statistics, similar regions and distributionfree tests. Watson G. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 262—267 (англ.)

Обсуждаются связи между достаточными статистиками и подобными областями. Разбираются случаи, когда все области, подобные пространству выборок, определяются с помощью достаточных статистик. Предлагается один непараметрический критерий проверки некоторой сложной гипотезы для зависимых случайных величин.

Б. А. Севастьянов

2953. **Замечание о двух методах оценки упорядоченных параметров вероятностных распределений. Эден** (Note on two methods for estimating ordered parameters of probability distributions. Eeden Constance van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 506—512; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 506—512 (англ.)

Методы нахождения оценок максимального правдоподобия для частично или вполне упорядоченных множеств параметров развиты независимо друг от друга Брунком и автором. На первый взгляд оба эти метода непохожи друг на друга. Условия, которые налагает, например, Брунк

(метод B), выглядят более сильными. Автор дает доказательство идентичности обоих методов, показывая тем самым справедливость метода B при более общих условиях, наложенных на метод A. Для достижения этой цели метод B сначала описывается в терминах и обозначениях, принятых в методе A, а затем доказывается равнозначность обоих методов. Б. М. Клосс

2954. Вероятности ошибок и выборочные объемы для критериев размаха в множественных сравнениях. Харт е р (Error rates and sample sizes for range tests in multiple comparisons. Harter H. Leon), Biometrics, 1957, **13**, № 4, 511—536 (англ.)

В последнее время проблема множественных сравнений вызывает большой интерес среди статистиков. Основной F-критерий в дисперсионном анализе определяет, существует ли значимая разность в группе средних, но не указывает, какие средние значимо отклоняются от других; а последнее часто и является как раз тем, что нужно знать исследователю. Были предложены различные критерии для множественных сравнений, включающие и обсуждаемые в этой статье критерии размаха. Здесь изучаются вероятности ошибок α и β 1-го рода и 2-го рода и их связь с выборочным объемом N, для трех фиксированных и трех множественных критериев размаха.

Пусть требуется проверить значимость размаха p из m упорядоченых средних для выборок объема N, где $p = 1,3,\ldots,n$. Для фиксированных критериев размаха, критический размах при фиксированной вероятности ошибки 1-го рода, α, зависит только от m и N; для множественного критерия размаха он зависит также от p. Действительно, при фиксированных m и N он есть неубывающая функция от p. Говорят, что размах p средних является значимым или незначимым (на уровне α) соответственно тому, превышает он или не превышает критический размах; за исключением того случая, когда p средних составляют подгруппу большей группы с незначимым размахом и когда размах этих p средних автоматически незначим.

Из-за этого исключения множественный критерий размаха начинается с испытания всех m средних. Если находится, что размах всех m средних значим, то производятся испытания размахов $(m-1)$ последовательных средних, $(m-2)$ последовательных средних и т. д., до тех пор пока не прекратятся значимые разности.

Из введения автора

2955. Критерий согласия χ^2 для нормальных распределений. Уотсон (The χ^2 goodness-of-fit test for normal distributions. Watson G. S.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 336—348 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ —выборка из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону с неизвестными средним и дисперсией. Следуя Чернову и Леману (РЖМат, 1956, 8183), автор изучает асимптотическое распределение статистики χ^2 для случая, когда неизвестные параметры оцениваются по выборке с помощью метода максимума правдоподобия, основанного на всех выборочных значениях. В отличие от обычной практики фиксирования границ интервалов разбиения, эти интервалы выбираются таким образом, чтобы вероятности попадания в них при значениях параметров, равных полученным оценкам, были постоянными, не зависящими от выборки.

Показано, что при этих условиях, асимптотическое распределение статистики χ^2 совпадает с распределением величины $\chi^2_{k-3} + \chi_1 y_1^2 + \chi_2 y_2^2$, где y_1 и y_2 — независимые случайные величины, распределенные нормально $(0,1)$, k — число интервалов разбиения $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_1 \to 0$ и $\lambda_2 \to 0$ при $k \to \infty$. В. В. Петров

2956. Еще о критических значениях для суммы двух случайных величин. Хёйтсон (Further critical values for the sum of two variances. Huitson A.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 279—282 (англ.)

Автор уже рассматривал (РЖМат, 1956, 8189) задачу вычисления на основе наблюдений доверительных пределов для функций вида $\Sigma \lambda_i \sigma_i^2$, где λ_i — произвольные константы, а σ_i^2 — дисперсия, оценка s_i^2 которой имеет f_i степеней свободы; причем $f_i s_i^2/\sigma_i^2$ — распределено по закону χ^2. В частности была приведена таблица верхних и нижних 5%-ных и 1%-ных критических значений для $(\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2)/(\lambda_1 \sigma_1^2 + \lambda_2 \sigma_2^2)$ (λ_1 и λ_2 — данные положительные константы). В настоящей статье представлена таблица верхних и нижних $2\frac{1}{2}$%-ных и $\frac{1}{2}$%-ных критических значений. Резюме автора

2957. Некоторые статистические аспекты факторного анализа. Леве (Enige statistische aspecten van de factoranalyse. Leve G. de), Statist. neerl., 1957, **11**, № 4, 201—209 (гол.; рез. англ.)

Изучается разница между факторным анализом и анализом компонент. Формулируются некоторые статистические задачи факторного анализа и приводится сводка некоторых известных статистических методов факторного анализа. Резюме автора

2958. Прямая и косвенная оценки образцов. Де-Лучия (Stime campionarie dirette e indirette. De Lucia Luigi), Statistica, 1958, **18**, № 1, 125—135 (итал.)

2959. Построение квадратов Рума и их применение в экспериментальных планах. Арчболд, Джонсон (A construction for Room's squares and an application in experimental design. Archbold J. W., Johnson N. L.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 219—225 (англ.)

Рум (Room T. G., Math. Gaz., 1955, **39**, 307) поставил следующую задачу: как расположить $n(2n-1)$ символов rs (или sr), образованных из всех пар $2n$ различных цифр в квадрате из $2n-1$ строк и столбцов так, чтобы в каждых строке и столбце оказалось по n символов (остальные $n-1$ клетки пусты), и в итоге разместить в квадрате все $2n$ цифры?

Рум показал, что задача разрешима, когда $n=1$ (тривиально) или $n=4$, но неразрешима при n равном 2 или 3, и привел решения для $n=4$. Квадраты такого типа находят применение в экспериментальных планах. В статье объясняется простое построение таких квадратов для $n=2^{2m-1}$.

Каждый построенный квадрат с помощью известной теоремы Сингера (J. Singer., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **43**, 377—385) представляется в канонической форме. Символы, стоящие в клетках квадрата, представленного в такой форме, непосредственно получаются из символов верхней строки прямым циклическим процессом. Таким образом, для каталогизации таких квадратов в канонической форме достаточно знание индекса первой строки.

В статье для того, чтобы показать естественное приложение регулярного представления линейных алгебр, доказательство теоремы Сингера слегка видоизменено. Резюме автора

2960. Условия существования неполного частично уравновешенного блока. Лафон-Оже (Conditions d'existence d'un bloc incomplet partiellement équilibré. Lafon-Augé Monique), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 21, 1774—1775 (франц.)

2961. Интерпретация эффектов неаддитивности в латинском квадрате. Кокс (The interpretation of the effects of non-additivity in the Latin square. Cox D. R.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 69—73 (англ.)

2962. Одновременные уравнения регрессии в экспериментировании. Вильямс (Simultaneous regression equations in experimentation. Williams E. J.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 96—110 (англ.)

2963. Моменты некоторых распределений. Камат (Moments of a certain distribution. Kamat A. R.), Math. Student, 1957, **25**, № 3-4, 147—152 (англ.)

Непараметрический тест, основанный на ранжировании наблюдений, существенно зависит от распределения статистики

$$Dn,m=R_n-R_m+m,$$

где R_n и R_m — размахи двух групп из n и m чисел, на которые случайно разбиваются целые числа $1,2,\ldots, m+n$. Автор дает метод получения Dn,m, который интересен и сам по себе, так как иллюстрирует применение комбинаторных приемов. Из введения автора

2964. **Тест симметричности Уилькоксона** (De symmetrietoets van Wilcoxon), Statist. neerl., 1957, **11**, № 4, 231—235 (гол.; рез. англ.)

2965. **Асимптотическое распределение для больших m статистики Терпстра для проблемы m ранжировок. Элтерен** (The asymptotic distribution for large m of Terpstra's statistic for the problem of m rankings. Elteren Ph. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 522—534; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 522—534 (англ.)

Пусть $X^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,2\ldots m)$ —n-мерные векторы, X_i^{α} $(i=1,2,\ldots,n)$ — их компоненты и пусть H_0 — гипотеза о том, что как все векторы, так и их компоненты взаимно независимы и одинаково распределены. Для проверки гипотезы Терпстра предложил использовать статистику

$$T=\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta,i,j} z_{ij}^{(\alpha)} z_{ij}^{(\beta)} \quad (\alpha,\beta=1,\ldots m;\ i,j=1,\ldots n),$$

где

$$z_{ij}^{(\alpha)}=\operatorname{sgn}(x_i^{(\alpha)}-x_j^{(\alpha)}).$$

Автор доказывает следующую теорему: Если для больших m $\nu_{2m}^{-1}=O(m^{-1})$, то $G_{2,3}^{-1}$ ограничено и при гипотезе H_0^1 распределение величины

$$Z=\frac{1}{2}G_{2,3}^{-1}\left(2m^{-1}T+\frac{1}{2}n(n-1)G_2\right)$$

стремится при $m\to\infty$ к распределению случайной величины

$$X=\left(\frac{1}{3}nG_3G_{2,3}^{-1}+1\right)X_1+X_2,$$

где X_1 и X_2 взаимно независимы и подчинены закону распределения χ^2 с $n-1$ и $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ степенями свободы соответственно.

Гипотеза H_0^1, фигурирующая здесь, заключается в следующем: если известно, что компоненты вектора $X^{(\alpha)}$ приняли $g^{(\alpha)}$ значений $u_1^{(\alpha)}<u_2^{(\alpha)}<\ldots<u_{g(\alpha)}^{(\alpha)}$ соответственно $t_1^{(\alpha)}, t_2^{(\alpha)},\ldots,t_{g(\alpha)}^{(\alpha)}$ раз, то все такие векторы $X^{(\alpha)}$ равновероятны. Величины, встречающиеся в формулировках, означают следующее:

$$G_2=\frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{m}G_2^{(\alpha)};\quad G_2^{(\alpha)}=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{h=1}^{g(\alpha)}t_h^{(\alpha)}(t_h^{(\alpha)}-1) & n\geqslant 2\\ 0 & n<2\end{cases}$$

$$G_3=\frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{m}G_3^{(\alpha)};\quad G_3^{(\alpha)}=$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\displaystyle\sum_{h=1}^{g(\alpha)}t_h^{(\alpha)}(t_h^{(\alpha)}-1)(t_h^{(\alpha)}-2) & n\geqslant 3\\ 0 & n<3\end{cases}$$

$$G_{2,3}=G_2-\frac{2}{3}G_3.$$

$\nu_{2,m}$ — число векторов $X^{(\alpha)}$, компоненты которых принимают не менее 3 значений.

Для распределения величины X автор дает разложение по ф. р. χ^2 и показывает, что $EZ=EX$, $\sigma^2Z<\sigma^2X$. Указывается, как распространяются результаты на случай, когда отсутствуют наблюдения части компонент.

Б. В. Финкельштейн

2966. **Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова. Королюк В. С.**, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1955, **19**, № 1, 103—124

Пусть

$$x_1,\ \ldots,\ x_n, \tag{1}$$
$$y_1,\ \ldots,\ y_m \tag{2}$$

$(m\geqslant n,\ N=m+n)$ —результаты независимых испытаний над случайной величиной ξ, имеющей непрерывное распределение вероятностей $F(x)$, $S_n(x)$, $T_m(x)$—эмпирические функции распределения для (1) и (2) соответственно. Доказываются следующие результаты:

Функция распределения максимума разности между двумя эмпирическими кривыми распределения есть:

$$\Phi_{nm}^{+}(z)=P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\sup_{-\infty<t<\infty}\left[T_m(t)-S_n(t)\right]<z\right\}=$$

$$=1-e^{-2z^2}\left[1-\sqrt{\frac{nm}{N}}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{2z}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{m^2+mn+n^2}{Nmn}\cdot\frac{2z^2}{3}\left(1-\frac{2z^2}{3}\right)\right]+O\left(\frac{z^{11}}{n^{3/2}}\cdot e^{-2z^2}\right)$$

$$\text{для } z=o\left(\sqrt[6]{\frac{nm}{N}}\right).$$

Функция распределения максимума разности между теоретической и эмпирической кривыми распределения есть:

$$\Phi_{n}^{+}(z)=P\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<t<+\infty}\left[F(t)-S_n(t)\right]<z\right\}=$$

$$=1-e^{-2z^2}\cdot\left[1+\frac{2z}{3\sqrt{n}}+\frac{2z^2}{3n}\left(1-\frac{2z^2}{3}\right)\right]+$$

$$+O\left(\frac{z^{11}}{n^{3/2}}\cdot e^{-2z^2}\right)\quad\text{для } z=o\left(\sqrt[6]{n}\right).$$

Функция распределения максимума модуля разности между двумя эмпирическими кривыми распределения есть:

$$\Phi_{nm}(z)=P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}}\cdot\sup_{-\infty<t<\infty}\left|T_m(t)-s_n(t)\right|<z\right\}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2}+\cdot$$

$$+\frac{m^2+mn+n^2}{N\,mn}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{2k^2z^2}{3}\times \tag{3}$$

$$\times\left(1-\frac{2k^2z^2}{3}\right)e^{-2k^2z^2}+O\left(\frac{z^{11}}{n^{3/2}}\cdot e^{-2z^2}\right)\text{ для } z=o\left(\sqrt[6]{\frac{nm}{N}}\right).$$

Функция распределения максимума модуля разности между теоретической и эмпирической кривыми распределения есть:

$$\Phi_n(z)=P\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<t<\infty}|F(t)-S_n(t)|<z\right\}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2}+\frac{1}{n}\times \qquad (4)$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{2k^2z^2}{3}\cdot\left(1-\frac{2k^2z^2}{3}\right)e^{-2k^2z^2}+O\left(\frac{z^{11}}{n^{3/2}}\cdot e^{-2z^2}\right)$$

при $z=o\left(\sqrt[6]{n}\right)$.

Предельные распределения $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(z)$, $\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\Phi_{nm}(z)$, $\lim_{n\to\infty}\Phi_n^+(z)$, $\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\Phi_{nm}^+(z)$ были получены А. Н. Колмогоровым и Н. В. Смирновым, а вид точных распределений для $m=np$ (p—целое) $\Phi_n^+(z)$, $\Phi_n(z)$, $\Phi_{nm}^+(z)$, $\Phi_{nm}(z)$ — Б. В. Гнеденко и В. С. Королюком.

В настоящей работе указываются правила, по которым могут быть вычислены любые члены разложения функций $\Phi_{nm}^+(z)$, $\Phi_n^+(z)$, $\Phi_n(z)$ (результаты (3) и (4) содержат погрешность, см. РЖМат, 1958, 4914, *ред.*).

M. Rosenblatt-Roth

2967. О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок. Королюк В. С., Изв. АН СССР, Сер. матем. 1955, **19**, № 1, 81—96

Пусть

$$x_1,\ldots,x_n, \qquad (1)$$

$$y_1,\ldots,y_m \qquad (2)$$

— результаты независимых испытаний над случайными величинами ξ, η, соответственно, имеющих непрерывное распределение вероятностей $F(x)$.

Пусть $S_n(x)$, $T_m(x)$ эмпирические функции распределения соответственно для (1) и (2). Доказываются следующие результаты.

При $m=np$ (p — целое число) вероятность

$$P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\cdot\sup_{-\infty<x<\infty}\left[S_n(x)-T_m(x)\right]<z\right\}$$ равна 0

при $z\leqslant 0$,

$$1-\frac{c}{C_N^n}\sum_{k=c}^{N-\left[\frac{c}{p}\right]}\frac{1}{k}C_k^{\frac{k-c}{p+1}}\cdot C_{N-k}^{n-\frac{k-c}{p+1}}$$ при $0<z\leqslant\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$

и 1 при $z>\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$, где $c=\left[pz\sqrt{\frac{Nn}{m}}\right]$, $N=n+m$, $k\equiv c(\mathrm{mod}\,(p+1))$

В общем случае эта вероятность равна 0 при $z\leqslant 0$

$$1-\sum_{r=0}^{n-\left[\frac{c}{m}\right]}\frac{A_r C_{N-k_r}^{n-r}}{C_N^n}$$ при $0\leqslant z\leqslant\sqrt{\frac{nm}{N}}$

и 1 при $z>\sqrt{\frac{nm}{N}}$, где

$$A_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & a_0\\ b_{1,0} & 1 & \ldots & 0 & a_1\\ b_{2,0} & b_{2,1} & \ldots & 0 & a_2\\ \vdots & \vdots & \ldots & 1 & a_{r-1}\\ b_{r,0} & b_{r,1} & \ldots & b_{r,r-1} & a_r\end{vmatrix},$$

$$b_{p,q}=C_{k_p-k_g}^{p-g},\quad a_p=C_{k_p}^{p},$$

$$k_r=\left[\frac{c-1+N_r}{n}\right]+1.$$

Пусть c_i равно $(-1)^i c$ при $i=1$, $\nu+1$ и равно $(-1)^i 2c$ при $i=2,3,\ldots,\nu$; δ_i равно $\frac{c_i}{k_i}$ при i нечетном,

$$1-\frac{\frac{p(p+1)}{k_i-c_i}}{C_{k_i}^{p+1}}\cdot\sum_{r_1+r_2=k_i-1}\frac{1}{r_1}C_{r_1}^{\frac{r_1-p}{p+1}}C_{r_2}^{\frac{r_2+c}{p+1}}$$ при i четном,

$\delta_{\nu+1}=1$; $\delta_i'=\frac{|c_i|}{k_i}$ при i нечетном, $\delta_{\nu+1}'=1$,

и при i четном

$$\delta_i'=1-\frac{\frac{p(p+1)}{k_i-c_i}}{C_{ki}^{p+1}}\cdot\sum_{r_1+r_2=k_i-1}\frac{1}{r_1}\cdot C_{r_1}^{\frac{r_1-p}{p+1}}\cdot C_{r_2}^{\frac{r_2-c_i}{p+1}}$$

При $m=np$ доказывается, что вероятность

$$P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\cdot\sup_{-\infty<x<\infty}|S_n(x)-T_m(x)|<z\right\}$$ равна 0 при $z\leqslant 0$;

$$1-\frac{1}{C_N}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{c}\right]}(-1)^{\nu+1}\sum\left[\prod_{i=1}^{\nu+1}\delta_i C_{k_i}^{\frac{k_i+c_i}{p+1}}+\prod_{i=1}^{\nu+1}\delta_i' C_{k_i}^{\frac{k_i-c_i}{p+1}}\right]$$

при $0<z\leqslant\sqrt{\frac{nm}{N}}$, 1 при $z>\sqrt{\frac{mn}{N}}$,

где $c=\left[pz\sqrt{\frac{Nn}{m}}\right]$, $N=n+m$, $k_i\equiv -c_i(\mathrm{mod}\,(p+1))$ для первого произведения и $k_i\equiv c_i(\mathrm{mod}\,(p+1))$ для второго произведения, а внутреннее суммирование распространяется на все k_i, для которых $\sum_{i=1}^{\nu+1}k_i=N$.

Пусть $\delta_i^0=\lim_{p\to\infty}\delta_i$; $\delta_i'^0=\lim_{p\to\infty}\delta'_i$; $c_i^0=\lim_{p\to\infty}\frac{c_i}{p}$,

тогда вероятность $P\left\{\sqrt{n}\sup_{-\infty<x<\infty}|S_n(x)-F(x)|<z\right\}$ равна 0 при $z\leqslant 0$,

$$1-\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\sqrt{n}}{Z}\right]}(-1)^{\nu}\sum\left[\prod_{i=1}^{\nu+1}\frac{n!}{m_i!\,n^n}\cdot\delta_i^0\,(m_i-c_i^0)^{m_i}+\right.$$

$$+\prod_{i=1}^{\nu+1}\frac{n!}{m_i!\,n^n}\cdot\delta_i^{\circ}\,(m_i+c_i^0)^{m_i}\Bigg]$$

при $0<z\leqslant\sqrt{n}$ и 1 при $z>\sqrt{n}$, причем внутреннее суммирование распространяется на все m_i, для которых

$$\sum_{i=1}^{\nu+1} m_i=n.$$

M. Rosenblatt-Roth

2968. **Общие статистические проблемы в физике и теории вероятностей. Бом, Шюцер** (The general statistical problem in physics and the theory of probability. Bohm D., Schützer W.), Nuovo Cimento, 1955, 2, Suppl., № 4, 1000—1047 (англ.)

Авторы считают теорию вероятностей недостаточно гибкой, чтобы ее можно было применить в некоторых задачах физики. Особо подчеркиваются те ситуации, в которых взвешивание событий асимптотически независимо от взвешивания параметров. На языке теории вероятностей это значит, что некоторые предельные распределения вероятностей при t (время) $\to\infty$ независимы от распределения этих параметров. Обычно физические параметры исключаются из некоторого исключительного множества меры нуль (которое, однако, в терминах обычной топологии может быть всюду плотным). По мнению авторов, даже если система находится в состоянии, определяемом такими исключительными значениями параметров, она все равно перейдет в нужное состояние благодаря возмущениям извне.

Примечание референта. Этот подход — не что иное, как простое правило, определяющее вероятностные меры, к которым вполне можно применить обычное исчисление вероятностей при условии, что все полученные результаты будут экспериментально проверены.

J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 752.

2969 К. **Биометрика — таблицы для статистиков. Том. I. Пирсон, Хартли** (Biometrika tables for statisticians. Vol. I. Pearson E. S., Hartley H. O., editors. Cambridge, at the University Press, 1954, xiv+238 pp., 4.50 doll.) (англ.)

Основное содержание: Введение, лист для справок, происхождение таблиц (103 стр.); I. Таблица нормальной функции распределения (6 таблиц, 18 стр.); II. Таблицы основных функций, выведенных из нормальной функции (13 таблиц, 42 стр.); III. Прочие таблицы интегральных функций, процентных точек и т. п. для распределений, выведенных из нормального (22 таблицы, 42 стр.); V. Различные таблицы (кривые Пирсона, ранговая корреляция, ортогональные полиномы (6 таблиц, 16 стр.); VI. Вспомогательные таблицы (7 табл., 1,7 стр.). Введение представляет превосходное руководство по статистической методике, содержащее сводку теоретических основ методов и иллюстрирующие их числовые расчеты вместе с инструкцией по применению таблиц.

Кроме стандартных таблиц для классических теперь статистических методов, книга содержит таблицы для применения методов, разработанных недавно, таких как метод „пробитов", вариант Велча для теста Беренса-Фишера, критерия значимости для наибольшего F-отношения в дисперсионном анализе, методы, основанные на ранговых характеристиках, и оценки с помощью наиболее коротких доверительных интервалов параметров биномиального и пуассонова распределений.

Использование книги было бы значительно облегчено, если бы в нее был включен алфавитный указатель (например, в конце книги). Хотя для доверительного коэффициента дается четкая частотная интерпретация, в комментариях о численно определенных доверительных интервалах встречаются неясные места; так, на стр. 12 говорится „Так что мы можем сказать, что с вероятностью $1-2\alpha=0{,}95$ средняя генеральной совокупности лежит в пределах от 162,1 до 172,0 фунтов". D. M. Sandelius

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, №1,53.

2970 К. **Вариационный ряд. Учебн. пособие для студ. заочн. ВЗЭИ. Карасев А. И.**, Всес. заочн. экон. ин-т, М., 1958, 65 стр., илл.

2971 Д. **Прямое исследование главных факторов в факториальном анализе. Босс** (La recherche directe des facteurs primaires en analyse factorielle. Thèse. Boss Jean Paul. Alençon, Impr. alençonnaise, 1957, 32 p., ill.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 19, 517 (франц.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

2972. **Проблема предсказания в теории игр. Гренандер** (A prediction problem in game theory. Grenander Ulf), Arkiv. mat., 1957, **3**, № 4, 371—379 (англ.)

Рассматривается следующая нулевая игра Г двух лиц: стратегиями первого игрока являются всевозможные спектральные функции стационарных случайных процессов $x=\{x_t\}$, для которых $Mx(t)=0$ и $Dx(t)=1$; стратегиями второго игрока являются все предсказания величины

$$z=\int_0^1 a(t)\,x_t dt=Ax$$

($a(t)$ — фиксированная вещественная непрерывная функция на (0,1)), получаемые как линейные формы случайных величин x_t ($t\leqslant 0$); выигрышем первого игрока объявляется $(Ax-px)^2$.

Доказывается, что игра Г обладает ситуацией равновесия в чистых стратегиях. Оптимальными стратегиями игроков являются при этом

$$x_t=\int_{-\infty}^{t}\gamma(t-u)\,d\xi(u)$$

и

$$px=\int_0^1 a(t)\,x_t^*\,dt,$$

где $\gamma(t)$ — собственная функция, соответствующая наибольшему собственному значению v симметричного ядра

$$K(x,y)=\int_0^{\min(1-x,\,1-y)} a(x+u)\,a(y+u)\,du,$$

а x_t^* — наилучший прогноз x_t, линейный относительно x_τ ($\tau\leqslant 0$), а $\xi(u)$ — процесс с некоррелированными приращениями, подчиненный условию $\|\Delta\xi(u)\|^2=\Delta u$.

Значение Г равно v.

Н. Н. Воробьев

2973. **Оперативные игровые модели (Разыгрывание операций)** (Operational gaming), Manag. Operat. Res. Digest, 1956, **2**, № 1, 14—16 (англ.)

Кратко обсуждается изучение конкретных военных и гражданских операций на моделях, посредством многократного приведения модели в действие. Метод рекомендуется не только для подготовки военных (игра на карте), но и для финансово-экономических операций, промышленных расчетов, улучшения эффективности производственных процессов, работы транспорта и т. п. Преимуществом метода является его наглядность и отсутствие необходимости прибегать к построению абстрактной теории, что особенно ценно в сложных ситуациях. Метод применим, например, при проектировании внутризаводского транспорта.

И. А. Полетаев

2974. **Теория стратегических игр и ее приложение к социальным наукам. Тинтнер** (Strategische Spiel-

theorie und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften. Tintner Gerhard), Allgem. statist. Arch., 1957, **41**, № 3, 242—251 (нем.)

Популярное изложение основных понятий, связанных с матричными играми.

2975. О шкале предпочтения. Маршак (Verso una scala di preferenza per prendere decisioni. Marschak Jacob), Industria (Milano), 1955, № 3, 319—331 (итал.)

2976. Практическое применение теории игр к решению сложных задач, относящихся к управлению. Уэрт (Practical application of the theory of games to complex managerial decisions. Weart Spencer A.), J. Industr. Engng, 1957, **8**, № 4, 203—209 (англ.)

Методы теории игр применяются к решению задачи о выгодности строительства нового завода при некотором комплексе условий. В. Н. Соколова

2977. Минимизация нелинейных выпуклых сепарабельных функционалов. Чарнс, Лемке (Minimization of non-linear separable convex functionals. Charnes A., Lemke C. E.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, **1**, № 4, 301—312 (англ.)

Проблема „выпуклого сепарабельного функционала" сформулирована следующим образом. Минимизировать $F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$ при условии $P_j' x \geqslant c_j$, $j = 1, \ldots, n$, где f_i — выпуклая функция единственного переменного x_i, а x и P_j — m-мерные векторы-столбцы.

Предлагается рассматривать линейный случай, решение которого аппроксимирует решение данной задачи. С этой целью функции f_i заменяются кусочно-линейными функциями. Возникающая задача решается при помощи симплекс-метода. Приводится эффективный алгорифм для решения вспомогательной линейной программы.

Н. М. Митрофанова

2978. Что такое линейное программирование? Хед (Vad är «linjar programmering»? Hed Sven), Affärsekonomi, 1958, **31**, № 15, 1049—1051, 1116, 1118 (шведск.)

2979. Приложение линейного программирования к одной конкретной задаче машиностроения. Камполонги, Пераккио (Una applicazione della programmazione lineare a un problema concreto dell' industria meccanica. Campolonghi Luigi, Peracchio Sandro), Tecn. ed organizz., 1957, **8**, № 33, 42—46, 4, 6, 8 (итал.; рез. англ., исп., франц.)

Рассматривается задача линейного программирования, по методу решения совпадающая с обобщенной транспортной задачей (РЖМат, 1958, 6029). С. С. Кислицын

2980. Вырожденность в линейном программировании: простая геометрическая интерпретация. Нелсон (Degeneracy in linear programming: a simple geometric interpretation. Nelson Richard R.), Rev. Econ. and Statist., 1957, **39**, № 4, 402—407 (англ.)

Кратко описывается геометрия линейного программирования и симплекс-метод. В связи с затруднениями, возникающими при некоторых обстоятельствах в употреблении последнего, делается попытка дать геометрическое объяснение вырожденности и решения. Приводятся примеры вырожденных линейных программ.

Н. М. Митрофанова

2981. Линейные программы. Эберль (Lineare Programme. Eberl Walther), Unternehmensforschung, 1956, **1**, № 1, 7—14 (нем.)

Четыре известные проблемы иллюстрируют широту применения понятия линейной программы. Разъясняется основная мысль важнейшего метода решения линейных программ — симплекс-метода Данцига. О. В. Шалаевский

2982. Применение исследования операций в планировке баз стратегических снарядов. Пратт (Operations research inputs to design of a strategic missile base. Pratt V. E. Amer. Rocket Soc. (Preprints), 1958, № 631, 5 pp., ill.) (англ.)

Описывается применение методов исследования операций к планированию баз для запуска баллистических ракет. Указываются существенные параметры и факторы, от которых зависит «мера эффективности» базы. Представлен математико-графический анализ проблемы.

Резюме автора

2983. Методы линейного программирования. Кауфман (Méthodes de calcul des programmes linéaires. Kaufmann A.), Automatisme, 1957, **2**, № 10, 390—397 (франц.)

2984. О линейном программировании. Ранку, Тёвишши (Despre programarea liniară. Rancu N., Tövissi L.), Rev. statist., 1958, **7**, № 4, 45—51 (рум.)

2985. Методы линейного программирования. Кауфман (Méthodes de calcul des programmes linéaires. Kaufmann A.), Automatisme, 1957, **2**, № 11, 428—435 (франц.)

2986. Новые методы решения задач линейного программирования. Ацел, Рассел (New methods of solving linear programmes. Aczel M. A., Russell A. H.), Operat. Res. Quart., 1957, **8**, № 4, 206—219 (англ.)

В первой части статьи коротко описана идея, использование которой при проведении вычислений на машинах с программным управлением ускоряет решение задач линейного программирования. Во второй части описан двойной градиентный метод Фриша (о методе см. РЖМат, 1958, 1415). Сущность метода состоит в следующем: а) в многогранике допустимых решений определяем направление, по которому возрастает максимизируемая линейная форма и б) сужаем задачу, исключая переменные, значения которых можно с уверенностью предсказать. Л. И. Горьков

2987. Формулировка задач для решения на счетных машинах. Френч, Снодграсс (Licking problems the «brain» way. French Charles E., Snodgrass Milton M.), Food Engng, 1957, **29**, № 11, 52—56 (англ.)

Упрощенно излагается для читателя, не обладающего математической подготовкой, применение метода линейного программирования для решения транспортной задачи. Выясняется постановка задачи, формулировка ее в математических терминах и решение посредством ручных или машинных вычислений. Приведены таблицы счета и примеры вычислений. И. А. Полетаев

2988. Перенесение метода редуцированных матриц на машины. Голлер, Дуайер (Translating the method of reduced matrices to machines. Galler Bernard A., Dwyer Paul S.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, **4**, № 1, 55—71 (англ.)

Предлагается новый метод решения k-индексных транспортных задач (в обычно рассматриваемых транспортных задачах $k = 2$). Метод основан на вычитании наименьшего элемента матрицы из каждого элемента (строки, столбца).

Описание метода дано в форме, удобной при проведении вычислений на машинах. Л. И. Горьков

2989. Математическое программирование как инструмент для принятия решений в сельскохозяйственной экономике. Бассетти (La programmazione matematica come strumento di decisione nell'economia agricola. Bassetti Piero), Riv. internaz. sci. econ. e commerc., 1957, **4**, № 10, 923—936 (итал.)

Автор останавливается на причинах сравнительно меньшей изученности экономистами сельского хозяйства и указывает, что линейное программирование дает общий подход к разрешению проблем как промышленности, так и сельского хозяйства. С. С. Кислицын

2990. Области применения и ограничения эконометрики. Клейн (Lo scopo e i limiti dell'econometrica. Klein L. R.), Industria (Ital.), 1957, № 4, 621—642 (итал.)

Итальянский вариант работы автора (РЖМат 1958, 2281).

2991. Наиболее выдающиеся факты макроэкономики и развитие системы Парето. Паломба (I fatti salienti della macroeconomica e gli sviluppi del sistema paretiano. Palomba Giuseppe), Ricerca, 1957, 8, genn.-giugno, 25—41 (итал.)

2992. Взаимозависимость экономических величин и определенность относительных цен и их изменений при совершенной конкуренции в нестационарном состоянии. Карелль (Die Interdependenz der ökonomischen Grössen und die Bestimmtheit der relativen Preise und ihrer Änderungen bei vollkommener Konkurrenz im nichtstationären Zustand. Carell Erich), Schweiz. Z. Volkswirtsch. und Statist., 1957, **93**, № 1, 24—48 (нем.)

2993. Изучение линейных экономических систем. Ван, Моргенстерн (A study of linear economic systems. Wong Y. K., Morgenstern Oskar), Weltwirtsch. Arch., 1957, **79**, № 2, 222—241 (англ.; рез. нем., франц., исп., итал.)

Рассматривается леонтьевская система (в данной работе она называется „доминирующей системой") вида

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = h_i,$$

где a_{ij}, $h_i \geqslant 0$, $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$, и указываются условия, при которых она имеет единственное неотрицательное решение. Далее приводятся условия существования единственного неотрицательного решения, если система „недоминирующая" (т. е. не соблюдается условие $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$). Доказательств нет. В. Н. Соколова

2994. Оптимальный план распределения пустых вагонов из центров концентрации к центрам их использования. Руссо-Фраттази (Sulla programmazione «ottima» della distribuzione dei carri vuoti dai centri di concentramento ai centri utilizzatori. Russo Frattasi Alberto), Trasp. industr., 1958, **4**, № 19, 730—736 (итал.; рез. англ., франц., нем.)

Численный пример на решение задачи линейного программирования симплекс-методом. См. также РЖМат, 1958, 9118. С. С. Кислицын

2995. Грубые заменители и динамическая устойчивость общего равновесия. Хан (Gross substitutes and the dynamic stability of general equilibrium. Hahn F. H.), Econometrica, 1958, **26**, № 1, 169—170 (англ.)

2996. Статистический контроль оборотных фондов. Хохинг (Statistical inventory control. Hoehing W. F.), Industr. Quality Control, 1957, **13**, № 7, 7—13 (англ.)

Ищется величина оборотных фондов на предприятии (сырье, вспомогательные материалы, готовые детали, готовые изделия), при которой требования на отпуск товара удовлетворялись бы наиболее полно и в то же время на создание этих фондов затрачивалось бы возможно меньше средств. Основной случайной величиной в данной проблеме автор считает число требований за единицу времени. Приводятся формулы и графики, по которым определяются размеры оборотных фондов с таким расчетом, чтобы отказ от удовлетворения требований покупателей имел ту или иную малую вероятность. А. А. Конюс

2997. Экстремальные гамильтоновы линии. Супник (Extreme Hamiltonian lines. Supnick Fred), Ann. Math., 1957, **66**, № 1, 179—201 (англ.)

Исследуются экстремальные (кратчайшие или длиннейшие) гамильтоновы линии (H-линии) графов, вершинами которых являются n различных точек в E_r ($r > 0$), а сторонами — прямолинейные отрезки, соединяющие все различные пары вершин. Под H-линией графа понимается замкнутая связная цепь сторон графа такая, что каждая вершина графа является конечной точкой 2 и только 2 сторон цепи.

Отмечается, что к рассмотрению минимальных H-линий данного графа приводят, например, проблемы типа задачи о бродячем торговце, которому необходимо выбрать кратчайший путь, проходящий через данные n точек. Знание длиннейших H-линий оказывается полезным при исследовании некоторых военных операций. Автор выделяет классы графов, для которых существуют достаточно простые способы обнаружения экстремальных H-линий. Полученные результаты имеют следующий характер:

Теорема 3. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки E_r такие, что для любых целых a, b, c, d $(1 \leqslant a < b < c < d \leqslant n)$ выполняется

$$d(P_a, P_b) + d(P_c, P_d) \leqslant d(P_a, P_c) + d(P_b, P_d) \leqslant \leqslant d(P_a, P_d) + d(P_b, P_c).$$

Здесь $d(P_a, P_b)$ — расстояние между точками P_a и P_b.

Тогда линия $[\ldots P_7 P_5 P_3 P_1 P_2 P_4 P_6 \ldots]$ минимальна, а линия $[\ldots P_{n-5} P_5 P_{n-3} P_3 P_{n-1} P_1 P_n P_2 P_{n-2} P_4 P_{n-4} \ldots]$ — максимальна. И. А. Ибрагимов

2998. Решение методом аналогии обобщенной транспортной задачи с особым приложением к расположению рынков. Бринк, Кани (Una soluzione analogica del problema di trasporti generalizzato con particolare applicazione alla ubicazione delle aree di mercato. Brink Edward L., Cani John S. de), Boll. Centro ricerca operat., 1957, № 5-6, 45—52 (итал.)

Имеется n рынков, причем потребность i-го рынка составляет T_i единиц продукции. Где разместить $m < n$ складов, на какие рынки и в каком количестве направлять продукцию с каждого склада, чтобы суммарная стоимость доставки была наименьшей? Предполагается, что стоимость перевозки пропорциональна количеству груза и расстоянию. Описан итеративный метод решения этой задачи. Для случая, когда стоимость перевозки — нелинейная функция расстояния, предлагается решение с помощью электрической модели. С. С. Кислицын

2999. Модель запаса. Джексон (A stock model. Jackson R. R. P.), Operat. Res. Quart., 1956, **7**, № 4, 140—142 (англ.)

Пусть первоначальный запас в момент $t = 0$ равен N единицам. Возобновление запаса производится только в моменты, когда его уровень падает до нуля. При этом предполагается, что потребление запаса происходит случайно и в среднем равно μ единицам за единицу времени.

Тогда вероятность $P_n(t)$ найти в запасе n единиц товара в момент t равна для $0 < n \leqslant N$

$$P_n(t) = \{[\mu t]^{N-n} / [N-n]!\} e^{-\mu t}$$

В. Н. Соколова

3000. Динамические задачи в теории фирм. Уагнер, Уитин (Dynamic problems in the theory of the firm. Wagner H. M., Whitin T. M.), Naval Res. Logist. Quart., 1958, **5**, № 1, 53—74 (англ.)

Исследуется решение частных случаев задачи максимизации прибыли при условии, что требование на продукт и функция стоимости зависят от времени и учитываются расходы на хранение и доставку продукта.

В. Н. Соколова

3001. Письмо редактору по поводу статьи Прагера «К проблеме поставщика». Бил (Letter to the editor (on the paper «On the Caterer problem» by W. Prager.), Beale E. M. L., Author's reply), Manag. Sci., 1957, **4**, № 1, 110—111 (англ.)

Указывается на возможность сведения проблемы поставщика (как обычно, имеются в виду действия поставщика салфеток. *Прим. реф.*, см. также РЖМат, 1958, 10129; 1959, 1827) к транспортной проблеме, даже если общее число салфеток, которые должны быть куплены, неизвестно. Во второй половине письма приводится задача, подобная проблеме, рассмотренной Прагером, но не тождественная ей. О. В. Шалаевский

3002. Матричное исчисление в «исследовании производства». Пихлер (Die Matrizenrechnung in der «Produktionsforschung». Pichler Otto), Allgem. statist. Arch., 1956, **40**, № 4, 364—370 (нем.)

В связи с применением матричных вычислений при изучении вопросов, относящихся к рациональному ведению крупного производства, выделяются и обсуждаются с привлечением примеров следующие четыре задачи: изображение хода производства для определенного отрезка времени, предсказания о будущих течениях производства, хозяйственный контроль, разыскание оптимальной формы ведения производства. О. В. Шалаевский

3003. Замечание о формулировке теории планирования военного снабжения. Моргенштерн (Note on the formulation of the theory of logistics. Morgenstern Oskar), Naval Res. Logist. Quart., 1955, **2**, № 3, 129—136 (англ.)

Военное снабжение представляет собой сложную и разветвленную деятельность, имеющую дело с миллионами предметов снабжения и осуществляемую обширной централизованной организацией. Для рационализации этой деятельности и повышения ее эффективности и экономичности необходима теория. В качестве первого шага для построения этой теории в статье формулируются определения характерных понятий, описание и классификация типичных ситуаций.

Определяются „операции" снабжения и задачи их. Различаются предметы снабжения „расходные" (например, горючее) и предметы, „требующие дополнительного снабжения" (например, машины, требующие запасных частей). Рассматривается взаимозаменяемость и комплектность предметов снабжения, а также уровень минимальных потребностей в предметах снабжения.

Проводится сравнение операций военного снабжения с деловыми и хозяйственными операциями. Военное снабжение представляется более сложным явлением, чем хозяйственная деятельность.

Одной из основных задач планирования снабжения является предсказание потребностей в предметах снабжения для своевременного и экономичного их удовлетворения. И. А. Полетаев

3004. Экономическая жизнь оборудования. Клапем (Economic life of equipment. Clapham J. C. R.), Operat. Res. Quart., 1957, 8, № 4, 181—190 (англ.)

Исследуется влияние уклонения от оптимального срока службы оборудования, определяемого условием минимума суммы капитальных амортизационных платежей и стоимости обслуживания, на общую стоимость эксплуатации. Выделяется линейный случай плотности стоимости обслуживания. Результаты прилагаются к примерам, касающимся подземных угольных перевозок. Н. М. Митрофанова

3005. Исследование операций. II. Метод Монте-Карло. Чакон (Investigacion operativa. II. Metodo de Monte Carlo, Chacon, S. I. R. P. Enrique), Bol. estud. econ., 1958, **13**, № 43, 83—102 (итал.)

Ч. I см. тот же журнал, **12**, № 42, 65—79

3006. Исследование операций в Японии. Исследование операций и педагогическая деятельность Объединения японских ученых и инженеров. Коянаги (Operations research and training activities by the Union of Japanese Scientists and Engineers. Koyanagi Kenichi), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 418—427 (англ.)

Содержит подробную программу курса исследования операций (166,5 час.) для инженеров и административных работников.

3007. Об ошибках и оптимальном размещении ресурсов при переписи. Нурботтен (On errors and optimal allocation in a census. Nordbotten Svein), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1-2, 1—10 (англ.)

Делается попытка построить модель для неслучайных ошибок при переписи. Строится простая модель и формулируется проблема размещения ресурсов. Эта проблема переводится в стандартную задачу линейного программирования. Излагаются принципы симплекс-метода решения. Резюме автора

3008. Основная задача исследования операций. Биллетер (Hauptprobleme der Unternehmensforschung. Billeter E. P.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 4, 149—159 (нем.; рез. англ., франц.)

Популярное изложение некоторых задач исследования операций.

3009. Построение планов чередования смен для предприятий с непрерывной работой (в частности, с учетом вопросов, связанных с 45-часовой неделей). Неб (Aufbau von Schichtwechselplänen für Betriebe mit kontinuierlicher Arbeit (Unter besonderer Berücksichtigung von Problemen der 45-Stundenwoche). Neeb F.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 4, 178—200 (нем.; рез. англ., франц.)

3010. К теории линейных резервов. Руфенер (Beiträge zur Theorie linearer Reserven. Rufener E.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1958, **58**, № 1, 89—111 (нем.)

Статья посвящена вопросам страхового дела.

3011. Коллоквиум по исследованию операций 25—26 ноября 1956 г. (Colloque de recherche opérationnelle des 25 et 26 novembre 1956. Aix-en-Provence, Inst. admin. entreprises, 1958, 135 p., ill.) (франц.)

3012 К. Операционное исследование на практике. Дейвис, Верхюлст (Operational research in practice. Rep. NATO Conf, Paris, 7th—12th Apr., 1957. Gen. Eds. Davies Max, Verhulst Michel. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, IX, 201 pp., ill., 84 sh.) (англ., франц.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

3013. Экономические приложения факторного анализа. Эйк (Economische toepassingen van factoranalyse. Eijk C. J. van), Statist. neerl., 1957, **11**, № 4, 211—213 (гол.; рез. англ.)

Краткое изложение применения факторного анализа к некоторым задачам строительства. Резюме автора

3014. Исследование причин событий и определение места расположения агрегатов на производстве приемами математической статистики. Зом (Ursachenforschung und Standortbestimmung im Betrieb mittels mathematischer Statistik. I. Mathematisch-statistische Grundlagen. Soom Erich), Industr. Organis, 1958, **27**, № 1, 17—24 (нем.)

3015. Задача минимального пробега в инженерном деле. Сороа-Тероль (Problemas de recorrido minimo en ingenieria civil. Zoroa Terol Procopio), Rev. Real acad. cienc. exact., fis., y natur. Madrid, 1958, **52**, № 2, 323—342 (исп.; рез. англ.)

Ставятся некоторые задачи о минимальном пробеге по прямой, сходные с задачей минимизации выражения

$$\Sigma_i p_i | x - x_i .$$

Аналогичные задачи рассматриваются на плоскости и вообще на поверхности. Резюме автора

3016. Исследование массовых явлений и теория вероятностей в технике сварки. Гильде (Großzahlforschung und Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schweißtechnik. Gilde W.), Schweißtechnik, 1958, **8**, № 5, 164—167 (нем.)

3017. Об одной задаче массового обслуживания. Гнеденко (Про одну задачу масового обслуговування. Гнєденко Б. В.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 5, 477—479 (укр.; рез. русск., англ.)

Имеется большое число потребителей энергии. Интенсивность потребления в каждый момент времени является случайной величиной. При весьма общих предположениях суммарное потребление в произвольные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_s$ при любом s представляет собою случайный вектор, распределение которого близко к нормальному. Из резюме автора

3018. Что такое статистический контроль? 2. Манайра (Che cos'è il controllo statistico? 2. Manaira Mario), Ufficio mod., 1957, **31**, № 6, 927—929; № 7, 1105—1107 (итал.)

3019. Что такое статистический контроль? 13, 14, 15. Манайра (Che cos'è il controllo statistico? 13. 14. 15. Manaira Mario), Ufficio mod., 1958, **32**, № 5, 807—810; № 6, 995—998; № 7, 1149—1152 (итал.)

3020. Задача, предложенная читателем. (Problème posé par un abonné), Rev. statist. appl., 1957, **5**, № 1, 91—93 (франц.)

Необходимо изготовить n доброкачественных деталей вероятность каждой отдельной детали быть забракованной равна p; детали, изготовленные сверх n, не нужны, и потеря на каждой из них составляет B; если годных деталей окажется менее n, убыток составит твердую сумму A. Требуется определить такое число деталей, подлежащих изготовлению N, чтобы математическое ожидание общей суммы потерь было наименьшим. Решение приводит к биномиальному выражению, определение минимума которого представляет заметные трудности. Поэтому предлагается приближенное решение, основанное на замене биномиального распределения нормальным со стандартным отклонением, не зависящим от N. А. А. Конюс

3021. Минимаксное решение выборочного приемочного плана. Йиржина, Недома (Minimaximální řešení výběrového přejímacího postupu. Jiřina Miloslav, Nedoma Jiří,), Apl. mat., 1956, **1**, № 4, 296—314 (чеш.; рез. русск. и англ.)

Пусть $H(p, c, n, N)$ — вероятность приема партии объема N на основе случайной выборки объема n с приемочным числом c, причем p — доля брака в партии. Среднее значение числа проконтролированных изделий в партии равно

$$N - (N - n)\int_0^1 H(p, c, n, N)\,dF(p), \qquad (1)$$

где через $F(p)$ обозначена функция распределения доли брака в партии. Авторы решают проблему нахождения приемочного плана, определенного парой чисел (n,c), такого, чтобы максимум выражения (1) при всех функциях распределения F, для которых

$$\int_0^1 dF(p) = 1, \qquad (2)$$

$$\int_0^1 p\,dF(p) = \text{const}, \qquad (3)$$

был минимальным. Оказывается, что этот минимум максимумов равен среднему значению (1) по отношению к такой функции распределения, которая удовлетворяет условиям (2) и (3) и которая постоянна, за исключением самое большее двух скачков. Для описанных приемочных планов составлены таблицы. A. Špaček

3022. Контроль производственных процессов. Бишоп (Control of industrial processes. Bishop Albert B.), News Engng, 1957, **29**, № 4, 17—21 (англ.)

В связи с автоматизацией и усложнением производства возникла необходимость сформулировать строгую теорию контроля производственных процессов, учитывающую их стохастический характер. По резюме автора

3023. Качественный контроль оборота фондов. Кан (Quality control of inventory turnover. Kahn Louis B.), Industr. Qualtiy Control, 1958, **14**, № 10, 4—7 (англ.)

3024. Применения статистических методов для изучения механической прочности огнеупорных изделий. Деплю, Кантрелль (Application des méthodes statistiques à l'étude de la résistance mécanique de produits réfractaires. Deplus C., Cantrelle R.), Bull. Soc. franç. céram., 1958, № 39, 111—139 (франц.; рез. англ., нем.)

3025. О некоторых методах математической статистики в контроле качества и их применении. Мантейфель (Über einige mathematisch-statistische Verfahren der Gütekontrolle und ihre Anwendung. Manteufel Karl), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1957, **1**, № 1, 63—66 (нем.)

3026. Определение верхней границы временной функции линейной системы по заданной ее частотной характеристике. Овсеевич И. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1956, № 2, 59—68

Во многих практических задачах техники связи, телевидения, автоматического регулирования бывает необходимо знать верхнюю границу переходного процесса, возникающего в линейной системе при заданных возмущении и частотной характеристике системы. Часто также приходится определять разность между временными функциями (временной функцией называется реакция линейной системы на возмущение типа единичного толчка) по заданной разности соответствующих частотных характеристик, особенно в связи с приближенным анализом переходных процессов. Решение такого рода задач обычно требует весьма трудоемких вычислений, в связи с чем возникает необходимость разыскания эффективных оценок верхней границы уклонения двух временных функций по заданному уклонению соответствующих частотных характеристик (верхняя граница временной функции может рассматриваться как частный случай верхней границы уклонения двух временных функций, из которых одна тождественно равна нулю во всем временном интервале).

В предлагаемой работе даются оценки верхней границы уклонения временных функций по заданному уклонению соответствующих частотных характеристик, которые позволяют фиксировать также и малые уклонения, и в этом смысле дополняют оценки В. В. Солодовникова (Автоматика и телемеханика, 1950, 11, № 8). Из резюме автора

3027. Бинарные шаги и направленные импульсы с точки зрения теории информации. Рейхардт (Binärschritte und gerichtete Impulse im Lichte der Informationstheorie. Reichardt W.), Hochfrequenztechn. und Elektroakust., 1955, **64**, № 3, 76—83 (нем.)

3028. Флуктуационная скорость χ-процесса. Силверман (The fluctuation rate of the chi process. Silverman Richard A.), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, **4**, № 1, 30—34 (англ.)

Пусть $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ — n стационарных и стационарно связанных процессов, имеющих совместные гауссовы распределения и одинаковые одномерные корреляционные функции $R(t)$. Пусть существуют производные $\dot{g}_i(t)$ и пусть при любом t

$$M\{g_i(t)\,g_j(t)\} = M\{g_i(t)\,\dot{g}_j(t)\} = M\{\dot{g}(t)_j\,\dot{g}_j(t)\} = 0, \quad (1)$$

$$1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Условие (1), в частности, выполняется, если процессы $g_i(t)$ независимы. Автор называет χ-процессом процесс

$$\chi_n(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2(t)\right)^{1/2}. \qquad (2)$$

Используя известную формулу Райса, он устанавливает, что процесс $\chi_n(t)$ принимает значение α в среднем

$$N_n(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{-\ddot{R}(0)}\, W_n(\alpha) \qquad (3)$$

число раз, где

$$W_n(x) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-(x^2/2R(0))}$$

Указывается, что огибающая стационарного гауссовского процесса является χ-процессом, и поэтому из (3) можно вывести известную формулу для среднего числа пересечений некоторого уровня огибающей. Приводится также формула для $N_n(\alpha)$ в случае огибающей, включающей вместо $R(t)$ корреляционную функцию самой огибающей. Р. Л. Добрушин

3029. Нули гауссовского шума. Уайт (Zeros of Gaussian noise. White Gerald M.), J. Appl. Phys., 1958, **29**, № 4, 722—729 (англ.)

Приводятся результаты опыта по определению некоторых статистических характеристик гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$. Экспериментально измерены: 1) P — вероятность того, что $\xi(t_1) = 0$ для $t \leqslant t_1 \leqslant t + \Delta t$ (Δt — малый отрезок времени) при условии, что $\xi(0) = 0$, а также зависимость P от t; 2) вероятность W того, что $\xi(t)$ обращается в нуль на интервале длины T ровно n раз, а также зависимость W от T при фиксированном n; 3) первый N и второй σ моменты распределения числа нулей процесса $\xi(t)$ на интервале длины T, а также зависимости N и σ от T. Б. С. Цыбаков

3030. Циклические очереди. Кёнигсберг (Cyclic queues. Koenigsberg Ernest), Operat. Res. Quart., 1958, **9**, № 1, 22—35 (англ.)

Рассматривается циклическое производство, когда N объектов последовательно проходят M операций, причем объект, прошедший последнюю операцию, становится в очередь к машине, производящей первую операцию. Такая ситуация возникает, например, в шахте, когда добыча угля ведется в N забоях циклически с помощью M агрегатов машин (подготовка забоя к взрыву, взрыв, вывоз угля, установка креплений, опять подготовка к взрыву и т. д.). Объект, прошедший i-ю операцию, начинает проходить $i+1$-ю операцию, если соответствующая машина свободна; в противном случае он становится в очередь на $i+1$-ю операцию (при этом $M+1 \equiv 1$).

Пусть система работает в стационарном режиме, и длительность i-й операции распределена показательно со средним $1/\mu_i$ и независима от взаимного положения объектов и машин в любой предшествующий момент времени. Обозначим $P(n_1, n_2, \ldots, n_M)$ вероятность того, что n_i объектов обслуживается или ожидает обслуживания i-й операцией. Тогда

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_M) = \frac{\mu_1^{N-n_1}}{\mu_2^{n_2}\mu_3^{n_3}\ldots\mu_M^{n_M}} \cdot \frac{1}{Z_M^N},$$

где

$$Z_M^N = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots n_\mu \geqslant 0 \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_\mu = N}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{n_2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)^{n_3}\cdots\left(\frac{\mu_1}{\mu_M}\right)^{n_M}.$$

С помощью этих вероятностей вычисляется среднее время простоя оборудования, среднее время ожидания перед каждой операцией и средняя длина цикла. Приводятся таблицы значений этих параметров при $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_M$, $M = 3, 4, 5, 6$ и некоторых N. По полученным в статье формулам приведены некоторые расчеты, относящиеся к двум шахтам.

В конце рассматривается некоторое усложнение задачи, связанное с параллельным обслуживанием некоторых операций несколькими однотипными машинами.

Б. А. Севастьянов

3031. Проблема движущегося единичного сервера. Мак-Миллан, Риордан (A moving single server problem. McMillan B., Riordan J.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 471—478 (англ.)

Рассматривается схема пунктов обслуживания агрегатной линии, движущейся с равномерной скоростью. Единичный сервер движется вдоль линии, пока происходит обслуживание, и в обратном направлении (с бесконечной скоростью), когда обслуживание передается к следующему пункту линии. На линии имеется барьер, в котором сервер „поглощается" в том смысле, что обслуживание прекращается, если сервер попадает в барьер. Проблема заключается в следующем: если сервер с экспоненциально распределенным временем обслуживания начинает работать на первом пункте, когда уже прошло T единиц времени выхода из барьера, то какова вероятность $p(k, T)$, что он обслужит k пунктов перед поглощением? Очевидно, для ее решения достаточно найти производящую функцию $p(x, T) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k, T)\, x^k$. Указывается на идентичность этой проблемы с задачей нахождения числа пунктов в занятый период для обычного (стационарного) сервера. Интересны два случая: постоянного и случайного распределения пунктов обслуживания. Для обоих случаев выводится функциональное уравнение для производящей функции; получаются точные выражения для вероятностей $p(k, T)$ и моментов распределения. Б. М. Клосс

3032. Об очередях при пуассоновском потоке. Бенеш (On queues with Poisson Arrivals. Benes V. E.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 670—677 (англ.)

Рассматривается телефонная система с ожиданием с одной линией и с пуассоновским потоком вызовов с параметром λ. Распределение времени разговора имеет среднее b_1, а в остальном произвольно. Изучается распределение времени ожидания $W(t)$ для вызова, поступившего в момент времени t. Рассматривается марковский процесс $W(t)$. Изучение ведется с помощью исследования преобразования Лапласа функции распределения случайной величины $W(t)$. Изучаются также свойства случайной величины z, равной времени, протекающему от момента образования очереди до ее исчезновения. Доказано, что для того чтобы $P\{z < \infty\} = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda b_1 \leqslant 1$. В конце изучаются корреляционные свойства $W(t)$ при стационарном режиме работы системы (в случае $\lambda b_1 < 1$). Б. А. Севастьянов

3033. Библиография теории очередей. Дойг (A bibliography on the theory of queues. Doig Alison), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 490—514 (англ.)

Попытка собрать вместе все статьи, относящиеся к изучению очередей. Вместе с чисто теоретическими работами представлены статьи о практических приложе-

ниях, из которых наиболее важные и плодотворные относятся к области телефонии. Статьи расположены в алфавитном порядке и классифицируются по принадлежности к одной или более десяти главных групп, а именно: 1) Задачи, связанные с хранением запасов. 2) Задачи, возникающие при изучении потока через сеть. 3) Приложения, не попадающие в другие категории. 4) Проблемы фонда. 5) Проблемы, возникающие при обслуживании автоматов. 6)Точечные процессы и проблемы, связанные с работой счетчиков. 7) Общая теория очередей. 8) Уличное движение и связанные с ним вопросы. 9) Стохастические процессы, непосредственно связанные с изучением очередей. 10) Проблемы, возникающие в телефонии.

Из введения автора

3034. Математические критерии браковки сомнительных наблюдений. Ортис-Сантос (Criterios matematicos para desechar observaciones dudosas. Ortiz Santos Gabriel), Ingeniería hidrául. México, 1957, **11**, № 4, 30—32, 11 (исп.; рез. порт., франц., англ.)

3035. Основы статистики с применениями к коммерции и экономике. Нието-де-Альба (Fundamentos de estadistica con aplicaciones al comercio y a la economia. (XII). Nieto de Alba Ubaldo), Técn. econ., 1958, **3**, № 5, 155—160 (исп.)

3036. Изучение сезонных колебаний во временных рядах. Маргаритис (Margaritis E.), Спудэ икономикэ, киноникэ, техникэ, 1957—58, **8**, № 7-8, 98—111 (греч.)

3037. Де Морган и статистический подход к изучению литературного стиля. Лорд (De Morgan and the statistical study of literary style. Lord R. D.), Biometrika, 1958, № 1-2, 282 (англ.)

3038. Управляющая система ракеты «Титан» надежна и точна. Класс (Titan guidance reliable, accurate. Klass Philip J.), Aviat. Week, 1958, **68**, № 19, 92—93, 95, 97, 99, 101, 103 (англ.)

3039. Интерпретация производственных данных; некоторые примеры, иллюстрирующие применение статистических методов Ч. I. Котрелл (Interpretation of production engineering data—some vase studies illustrating the application of statistical techniques. Part. I. Cottrell P. J. W.), Austral. Machinery, 1958, **11**, № 113, 13—17 (англ.)

После краткого введения об использовании статистического метода как приема исследования операций автор обсуждает шесть примеров из его собственной производственной практики. Из резюме автора

3040. Применение уравнений стохастических процессов к механике горных пород. Литвинишин (Zastosowanie równań procesów stochastycznych do mechaniki górotworu. Litwiniszyn Jerzy), Arch. górn. i hutn., 1956, **1**, № 3, 243—269 (польск.; рез. русск., англ.)

Классическая механика не в состоянии разрешить некоторые задачи земной коры. К таковым, например, относится задача определения сдвигов и деформации земной поверхности, в которой проводится какая-либо разработка. Земная кора очень разнородна и в ее деформации участвует много различных и часто случайных причин. В статье выведено уравнение, определяющее сдвижение среды, вызываемое заданными краевыми условиями; это уравнение сходно с уравнением стохастических процессов Планка-Фоккера-Колмогорова. Из резюме автора

3041. Применение методов математической статистики к изучению свойств металлокерамических композиций. Лившиц П. С., В сб.: Порошковая металлургия. Вып. 4. М., 1956, 5—21

Рассматриваются результаты массовых текущих контрольных испытаний качества электроугольного полуфабриката, применяемого для изготовления электрического скользящего контакта в электрощеточном производстве. Приведены средние арифметические значения признаков качества (удельное электросопротивление, прочность, износ и т. д.)по отдельным маркам, отличающимся друг от друга содержанием входящих в них компонентов (графит, медь, свинец и т. д.), — и сравнительные характеристики этих средних. Построены графики, показывающие зависимость признаков качества электрощеточного полуфабриката от входящих в него компонентов (в соответствии с разными марками). Для сопоставления приведены графики, построенные по данным специальных лабораторных опытов. Они подтверждают выводы, полученные статистически.

А. А. Конюс

3042. О распределении размера угольных пылинок в воздухе. Сичел (On the size distribution of airborne mine dust. Sichel H. S.), J. S. Afric. Inst. Mining and Metallurgy, 1957, **58**, № 5, 171—213. Discuss., 213—225 (англ.)

Указывается важность знания математических законов, лежащих в основе распределения размеров пыли. Представлены данные о различных типах пыли и обсуждаются характеристики такого распределения. Применительно к этим характеристикам рассматривается согласованность различных ранее предложенных законов распределения пыли с эмпирическими данными и показывается, что ни один из них не является удовлетворительным.

Автор предлагает новый закон, а именно $y=Be^{-\beta\sqrt{x}}+Ae^{-\alpha\sqrt{x}}$, где x — размер частицы; A, B, α, и β — константы. В пользу этого уравнения приводятся некоторые примеры и подчеркивается значение плотности распределения поверхностной площади пылинок, получаемой из закона распределения частот. Показывается, что не существует общей корреляции между концентрацией частиц и полной поверхностной площадью воздушной пыли. Хотя полуграфическая процедура оценки параметров генеральной совокупности, развитая в этой статье, может с успехом быть применена для согласования наблюденных данных с предлагаемым уравнением распределения, тем не менее существует потребность в дальнейших математических и статистических исследований в этой области.

Резюме автора

3043. Приложение теории связи к анализу функций человека, управляющего машиной. Норт (Application of communication theory to the human operator. North J. D.), Inform. Theory 3 rd London Sympos., 1955, London, 1956, 372—393 (англ.)

Рассматривается вопрос о применении теории информации и теории игр к случаю, когда человек выполняет определенные механические действия на основании получаемой им извне информации. Информация представляет собой дискретную последовательность сигналов, выбираемых из некоторого конечного множества. При этом человеку может быть заранее известна вероятность появления какого-нибудь отдельного сигнала. Такие сведения могут быть получены также из рассмотрения структуры последовательности сигналов. Она названа метаинформацией. В приложении к статье, написанном С. К. Заремба, рассматривается частный случай такой задачи.

А. В. Шилейко

3044. Рассмотрение порядковых статистик для логарифмически нормального распределения. Такасэ (Takase Nobutada), Добоку гаккай ромбунсю, Trans. Japan. Soc. Civil Engrs, 1957, № 47, 24—29 (японск.; рез. англ.)

В последнее время стали популярны порядковые статистические характеристики и стохастическая трактовка гидрологических величин. Хотя порядковые статистики имеют очень широкое поле применения, они еще достаточно не исследованы и не внедрены в инженерных расчетах. В этой работе автор изучает порядковые статистики логарифмически нормального распределения с целью представления кумулятивных распределений гидрологиче-

ских данных для проектирования речного стока. Кроме того, вычислены различные таблицы, чтобы облегчить быстрое получение практически важных оценок в подобного рода задачах. Резюме автора

3045. Метод усеченной выборки для подсчета колоний на бактериальных пластинках. II. Случай, когда технической ошибкой пренебречь нельзя. Сандeлиус (Inverse sampling applied to bacterial plate counts. II. Cases when technical errors cannot be neglected. Sandelius Martin), Kgl. lantbrukshögskol. ann., 1952 (1953), **19**, 197—204 (англ.)

Одной из характеристик бактериального посева является плотность a, определяемая как математическое ожидание отношения r/v, где r — количество колоний и v—вес бактериальной суспензии на пластинке. Так как количество колоний бывает обычно очень велико, то для оценки a, в случае круглых пластинок, предлагается использовать метод усеченной выборки. Согласно этому методу, на пластинке наугад выбирается какой-либо радиус-вектор, а затем определяется второй радиус-вектор таким образом, чтобы полученный сектор содержал ровно k колоний (k — заранее заданное число). Пусть x — отношение длины дуги сектора к длине дуги окружности пластинки, и пусть v — общий вес бактериальной суспензии на пластинке. Если $r \geqslant k$, то в качестве оценки для a рассматривается отношение $a' = (k-1)/(vx)$, если же $r < k$, то $a' = r/v$.

В первой части работы, опубликованной ранее (Sandelius M., Kgl. lantbrukshögskol. ann., 1951, 18, 86—94), предполагалось, что технической ошибкой (т. е. ошибкой определения веса v) можно пренебречь. В данной работе рассматривается случай, когда v является случайной величиной, подчиняющейся Г-распределению. Указаны несмещенные оценки и доверительные интервалы для a.

Л. Н. Большев

3046. Применение корреляционных исчислений в ихтиологических исследованиях. Опарин Д. И., Тр. Моск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1958, вып. 9, 200—209

3047. Математическая биология как тема нашего времени. Мараваль-Кассесновес (La biologia matematica como tema de nuestro tiempo. Maravall Casesnoves Dario), Cuad. hispanoamer., 1958, № 99, 321—351 (исп.)

3048. Когорт-анализ, в частности, как средство измерения плодовитости. Якоби (Kohorten-Analyse insbesondere als Mittel zur Messung der Fruchtbarkeit. Jacoby E. G.), Allgem. statist. Arch., 1958, **42**, № 1, 21—28 (нем.)

3049. Квантальные реакции на действие смеси ядов в условиях, когда действия ядов независимы и направлены на одну и ту же физиологическую систему, — пример анализа неконтролируемых данных. Ашфорд (Quantal responses to mixtures of poisons under conditions of simple similar action—the analysis of uncontrolled data. Ashford J. R.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 74—88 (англ.)

Оценивается ядовитость отдельных ядов, действующих раздельно или совместно на совокупность живых организмов. Дается краткое описание методов анализа „квантальных реакций" (т. е. организмы подразделяются на отреагировавших и неотреагировавших). Эти методы распространяются на случай смеси ядов. Строится модель, представляющая совместное действие смеси, и обсуждается применение оценок максимального правдоподобия в рассматриваемой проблеме. Резюме автора

3050. Оценка относительных частот четырех типов спермы Drosophila melanogaster. Кастенбаум (Estimation of relative frequencies of four sperm types in Drosophila melanogaster. Kastenbaum Marvin A.), Biometrics, 1958, **14**, № 2, 223—228 (англ.)

3051. Изменения в средней выживаемости для многоаллельного локуса в биологической совокупности со случайным скрещиванием. Мандел, Хьюз (Change in mean viability at a multiallelic locus in a population under random mating. Mandel S. P. H., Hughes I. M.), Nature, 1958, **182**, № 4627, 63—64 (англ.)

3052. О вероятности выживания бактерий в морской воде. Гаррис (On the probability of survival of bacteria in sea water. Harris Eugene K.), Biometrics, 1958, **14**, № 2, 195—206 (англ.)

3053. Замечания и приложения теории Кантелли. Фрауэнфельдер (Bemerkungen und Anwendungen zur Theorie von Cantelli. Frauenfelder W.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1958, **58**, № 1, 77—88 (нем.)

3054. XV Международный конгресс страховых математиков. Амметер (Der XV internationale Kongress der Versicherungsmathematiker. Ammeter Hans), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1958, **58**, № 1, 21—38 (нем.)

3055. Исследования по n-методу для вычисления резервов. Еклин (Untersuchungen zur n-Methode der Reserveberechnung. Jecklin H.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1958, **58**, № 1, 39—51 (нем.)

3056. Характер страхования жизни как вспомогательное средство для определения гарантийных премий и резервов. Шторк (Der Charakter einer Lebensversicherung als Hilfsmittel zur Ermittlung risikotechnisch ausreichender Prämien und Reserven. Storck Hans), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1958, **3**, № 4, 417—460 (нем.)

3057 Д. Теория коллективного риска с учетом колебания основных вероятностей с конечной областью колебания. Квинкерт (Die kollektive Risikotheorie unter Berücksichtigung schwankender Grundwahrscheinlichkeiten mit endlichem Schwankungsbereich. Quinkert Werner.—Diss., Math-naturwiss. Fak., Köln, 1957. Karlsruhe, 1957, 39 S., ill.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, **B**, № 25, 1969 (нем.)

См. также: 2173, 2180, 2788

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

3058. О различных интерпретациях геометрии Лобачевского. Резниченко (Про різні інтерпретації геометрії Лобачевського. Резніченко З. О.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1957, **26**, 71—87 (укр.)

Краткое изложение работ Бельтрами, Кэли, Клейна, Пуанкаре, Кагана. В конце дается проверка выполнимости аксиом геометрии Лобачевского (не всех) на модели Клейна. В. Ф. Рогаченко

3059. Сети окружности и лагерровская инверсия. Погодина Г. В. Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, **7**, 149—164

И. М. Ягломом была дана элементарная теория преобразований Лагерра (РЖМат, 1956, 5436). В реферируемой статье излагается несколько отличный вариант той же теории с более простым доказательством некоторых теорем. Р. М. Гейдельман

3060. Тензорное исчисление и приложения. Лихнерович (Calcul tensoriel et applications. Lichnerowicz André), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 192, 309—327 (франц.)

Изложение двух популярных лекций, посвященных понятиям векторного пространства, тензорного умножения, алгебре аффинных тензоров. Дается понятие о приложениях к специальной теории относительности.

В. В. Рыжков

3061. Проблема анаморфозы и номографической интерпретации функций комплексного переменного. Вильнер И. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**, М., АН СССР, 1956, 145—146

3062. Элементы барицентрического исчисления. Кошницэ (Elemente de calcul baricentric. Cosnita C.), Gaz. mat. si fiz., 1958, **B9**, № 2, 75—86 (рум.)

3063. Иррациональность некоторых значений тригонометрических функций. Ясиновый Э. А., Матем. в школе, 1958, № 3, 3—6

Доказывается иррациональность чисел:

$\cos\frac{\pi}{n}$ $(n \neq \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3)$; $\sin\frac{\pi}{n}$ $(n \neq \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 6)$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ $(n \neq \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4)$; $\cos^2\frac{\pi}{n}$, $\sin^2\frac{\pi}{n}$, $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$, где n — целое, не равное ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6.

Как следствие получается теорема: Отрезки a_n, k_n и R попарно несоизмеримы, где a_n, k_n и R суть соответственно стороны, апофема и радиус правильного n-угольника, в котором $n = 5$ или $n > 6$. И. Я. Депман

3064. Об определении геометрии. Слебодзинский (O definicji geometrii. Ślebodziński W.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 153—162 (польск.)

Приводятся соображения в пользу определения: геометрия состоит из тех областей математики, в которых оперируют с группой движений определенных объектов, а задачей геометрии является открытие и изучение тех свойств объектов, которые сохраняются при движениях соответствующей группы. Автор отмечает, что приведенное определение может встретить возражения „компетентных людей", о которых говорят Веблен и Уайтхед (Veblen O., Whitehead J. H. C., The foundations of differential geometry. Cambridge Tracts in Mathem. and Math. Phys. 29, Cambridge, 1932), но считает, что такое определение, не отмежевывая геометрию от других областей математики, охватывает те из них, которые тем или иным образом можно геометризировать. Г. И. Дринфельд

3065. Свойство симметрии основных законов природы. Макке (Symmetrieeigenschaften der Naturgesetze. Macke Wilhelm), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1954—1955, **4**, № 4, 545—548 (нем.)

Содержание. 1. Симметрия геометрических фигур и ее влияние на физические системы. 2. Основы физических законов. 3. Роль симметрии при изучении движения. 4. Симметричные свойства пространства и времени. Существуют вращения и отражения, переводящие фигуру в себя, т. е. оставляющие фигуру инвариантной. Они образуют группу движений. Эта группа допускает наименьшее число движений для произвольного четырехугольника, а наибольшее у круга. Приводятся фигуры, допускающие промежуточное число движений. Если приводимые фигуры рассматривать как механические системы, то можно получить свойства, связанные с симметрией механических систем. Рассматривается положение материи в два разных момента времени: в момент t и в момент $t + \delta t$. Время t — параметр и рассматривается подобно углу α в группе движений. С. И. Зетель

3066. К вопросу о методике преподавания геометрии в 6-м и 7-м классах. Воробьев Г. В., Матем. в школе, 1958, № 3, 36—42

3067. О нескольких вопросах, связанных с методом преподавания аналитической геометрии. Голомб (O kilku kwestiach związanych z metoda wykladu geometrii analitycznej. Golab S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 216—221 (польск.)

Указывается, что в учебниках аналитической геометрии (рассматриваются польские учебники Борсука (K. Borsuk) и Старка (M. Stark)) уделяется недостаточное внимание строгому аналитическому изложению вопросов, связанных с понятием ориентации геометрических образов на плоскости и в пространстве. Даются: более точное определение понятия одинаковой ориентации двух троек некомпланарных векторов; формула для определения угла между прямыми на ориентированной плоскости; критерий совпадения ориентаций плоскости и треугольника на ней, заданного уравнениями сторон; выражения внутренних углов треугольника непосредственно через коэффициенты уравнений его сторон. Высказываются общие соображения о необходимости исключения интуиции при строгом изложении аналитической геометрии. В. Ф. Рогаченко

3068. О некоторых задачах, касающихся изложения аналитической геометрии. Бернацкий (O niektórych zagadnieniach dotyczacych wykladu geometrii analitycznej. Biernacki M.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 222—225 (польск.)

14—15 мая 1954 г. в Кракове состоялась методическая конференция, посвященная преподаванию аналитической геометрии. В реферируемой статье изложено содержание доклада, прочитанного автором. Автор считает подготовку выпускников польских средних школ в области математики крайне низкой и потому рекомендует не торопиться с введением векторного исчисления и геометрии в пространстве.

Автор рекомендует следующее построение программы: сентябрь — ноябрь: теория прямой (на плоскости) и окружности, канонические уравнения кривых второго порядка; декабрь — элементы векторной алгебры, прямая и плоскость в пространстве, во втором семестре рекомендуется изучать кривые и поверхности второго порядка.

Автор возражает против включения в курс аналитической геометрии элементов начертательной геометрии, на которую отводится две недели, подчеркивает необходимость обратить внимание слушателей на приложения и ратует за самостоятельную работу студентов. Г. И. Дринфельд

3069. Дидактическая конференция по преподаванию аналитической геометрии в университете (Konferencja dydaktyczna w sprawie nauczania geometrii analitycznej na uniwersytecie), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 260—262 (польск.)

Краткое изложение содержания докладов, прочитанных на методической конференции по преподаванию аналитической геометрии в университетах, состоявшейся 14 и 15 мая 1954 г. в Кракове. Приводится текст решения конференции по рассмотренному вопросу. В. Ф. Рогаченко

3070 К. Геометрия в пространстве. Мандельбаум, Конт (Solid geometry. Mandelbaum Hugo, Conte Samuel. New York, Ronald Press Co., 1957, VI, 261 pp., ill.) (англ.)

Традиционное изложение евклидовой геометрии заменено изложением, основанным на положениях и принципах современной математики. Конг руэнтность, подобие и перспектива рассматриваются как проективное соответствие между пространственными фигурам. Инвариантность элементов расценивается как характеристика геометрических преобразований. Из предисловия

3071 К. Геометрия для класса математики. Коммо (Géométrie, classe de mathématiques. Commeau Joanny. Paris, Masson et Cie, 1957, X, 523 p., ill., 2980 fr), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 13, 370 (франц.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3072. **Случай неустойчивости из практики. Ноз** (Een labiliteitsgeval uit de praktijk. Noz F. J.), Euclides (Nederl.), 1955—1956, **31**, № 4, 183—187 (гол.)

Рассматриваются положения равновесия балки, подвешенной на канате в двух ее точках (в конечной точке балки A и в другой, не обязательно конечной X), причем канат проходит через подвешенный блок без трения. Для разных случаев относительной длины l/a каната (l — длина каната, a — расстояние от A до центра тяжести балки) элементарными рассуждениями определяются те положения точки X, в которых положение равновесия устойчивое. К. С. Сцилард

3073. **Геометрическое представление переходных состояний равновесия механических систем. Тодескини** (Rappresentazione geometrica della labilità dei sistemi meccanici. Todeschini Bartolomeo), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 596—603 (итал.; рез. англ.)

В своей теории фигур равновесия Пуанкаре предложил изучать положения равновесия механических систем, подчиненных действию консервативных сил с силовой функцией, зависящей от некоторого переменного параметра, с помощью геометрического изучения в пространстве свободных параметров системы и переменного параметра уравнений, определяющих положения равновесия. В реферируемой работе содержится геометрическая характеристика: тех точек (в случае одной степени свободы и одного параметра,) линий (в случае одной степени свободы и двух параметров), поверхностей (при одной степени свободы и при трех параметрах) и т. д., которые отделяют на „многообразиях равновесия" устойчивые положения равновесия от неустойчивых. Если, например, силовая U механической системы с одной степенью свободы α зависит от двух параметров F и G, то на поверхности $\frac{\partial U(\alpha, F, G)}{\partial \alpha} = 0$ линия, отделяющая устойчивые положения равновесия от неустойчивых, будет представлять собою линию прикосновения к поверхности $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$ цилиндра, имеющего в качестве своей направляющей огибающую семейства тех линий, расположенных на плоскости FOG, вдоль каждой из которых переменное α, вычисляемое из уравнения $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$, сохраняет постоянное значение. Л. Н. Сретенский

3074. **Конхоидальная направляющая для шести бесконечно близких положений. Мейер-цур-Капеллен** (Der Konchoidenlenker für sechs unendlich benachbarte Lagen. Meyer zur Capellen W.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 11-12, 485—487 (нем.)

Рассматривается механизм с качающейся кулисой. Шатун проскальзывает через неподвижную точку B. При определенных геометрических соотношениях окружность, описываемая концом кривошипа, имеет касание шестого порядка с конхоидой, для которой точка B является узловой. При этом на шатуне можно найти такую точку, которая описывает замкнутую кривую с участком, близким к прямолинейному. Н. В. Бутенин

3075. **Построение из элементарных криволинейных треугольников четырехугольного сетного полотна с равным количеством узлов на кромках. Гуревич М. И., Зонов А. И.**, Тр. Моск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 8, 66—71

Рассматривается элементарный криволинейный треугольник A_1A_20, в котором A_1A_2 является подборой, A_10 и A_20 — нитями, образующими с подборой в точках прикрепления угол α_1. Формы подборы и угол α_1 задаются произвольно, тогда формы нитей вполне определяются. К треугольной части сети A_1A_20 пристраиваются еще три аналогичных криволинейных треугольника так, чтобы получилась четырехугольная сеть с постоянными посадочными коэффициентами по кромкам и одинаковым числом узлов на каждой кромке. На основании свойств подборы и нитей и при помощи комплексных чисел, которыми изображаются векторы, выводятся условия, при выполнении которых нити двух соседних треугольников совпадают, и находится способ построения четырехугольной сети. Описывается модель рассматриваемой сети. В. С. Люкшин

3076. **Определение формы элементарного криволинейного треугольника сетного полотна. Гуревич М. И., Григорьянц А. Н.**, Тр. Моск. техн. ин-та рыбн. пром-сти и х-ва, 1957, вып. 8, 72—75

Задача определения формы элементарного криволинейного треугольника сетного полотна, закрепленного на плоскости без складок, решается при помощи теорем о сетях Чебышева. Как и в случае криволинейного треугольника сети Чебышева, рассматривается равнобедренный элементарный треугольник с углом α при основании; при помощи соотношения между сторонами этого треугольника получают после интегрирования параметрические уравнения нити — второй стороны сети, считая, что первая сторона (подбора) известна. Если посадочный коэффициент постоянный, то нить получается из подборы поворотом на угол α и последующим преобразованием подобия с коэффициентом $1/(2\cos\alpha)$. В. С. Люкшин

3077. **Переходная кривая—спираль и соприкасающийся круг. Хартман** (The highway spiral and the osculating circle. Hartman Paul), Trans. N. Y. Acad. Sci., 1955, **17**, № 8, 602—612 (англ.)

Для переходных кривых на дорогах обычно употребляется клотоида. В данной статье рассматривается случай построения переходной кривой спирали между двумя дугами GA и BH окружностей разных радиусов и с разными центрами. Переходная спираль заданной длины L_a соединяет точки A и B, в которых радиусы соответствующих окружностей должны совпадать с радиусами соприкасающихся кругов спирали. Из свойств соприкасающегося круга с использованием определения клотоиды, выводятся параметрические уравнения спирали в виде рядов по степеням длины дуги $l = AP$ в текущей точке P спирали и находятся формулы других геометрических элементов для точки P. Эти последние величины табулированы и для них построены графики, облегчающие приближенное построение переходной кривой заданной длины $L_a = 1{,}000$ футов. При помощи номограммы показывается, как находить элементы переходной спирали длины, отличной от L_a. В. С. Люкшин

3078. **Геометрический вывод теоремы Ребхана. Львин Я. Б.** В сб.: Исследования по теории сооружений. Вып. 7, М., Госстройиздат, 1957, 605—606

В строительной механике доказывается теорема Ребхана при помощи составления функции давления E и исследования ее на максимум. В заметке доказывается та же теорема при помощи геометрического истолкования dE и геометрических соотношений между дифференциалами веса призмы обрушения и площади основания этой призмы; при доказательстве пренебрегают бесконечно малыми порядков выше первого. В. С. Люкшин

3079. **Использование дифференциальной геометрии в навигации. Намикава** (Namikawa Yoshimasa), Кобэ сёсэн дайгаку киё. Рикогаку-хэн, Rev. Kobe Univ. Mercant. Marine. Scient. and Technol. Sec., 1955, № 2, 37—44 (японск.; рез. англ.)

3080 К. **Метод выравнивания в практической геометрии. Штван** (Vyrovnaváci pocet v prakticke geometrii. Stván Antonin. 157 s., ill., Praha, SNTL, 1954, 6, 60 Kčs), Česka, kniha, 1954, № 42, 1061 (чешск.)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3081. О треугольниках. Штейнхаус (O trójkatach. Steinhaus H.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 169—174 (польск.)

Рассматриваются принадлежащие одной и той же плоскости треугольники с периметром 1. Принадлежащими одному классу считаются такие треугольники, которые могут быть совмещены движением по плоскости. Треугольник характеризуется тройкой чисел (x, y, z), выражающих его стороны, которые обходятся в направлении часовой стрелки. Множество таких троек, удовлетворяющих очевидным дополнительным условиям, представляет все типы треугольников плоскости, включая вырожденные случаи. Каждый треугольник (x, y, z) можно изобразить точкой (x, y) на вспомогательной плоскости OXY. При этом образы треугольников заполняют на плоскости OXY треугольник T с вершинами $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Образы равнобедренных треугольников будут лежать тогда на отрезках прямых

$$x + 2y = 1, \quad 2x + y = 1, \quad x = y,$$

а прямоугольных треугольников — на отрезках гипербол

$$(1 - x)(1 - y) = \frac{1}{2}, \quad (y + x)(1 - x) = \frac{1}{2},$$

$$(x + y)(1 - y) = \frac{1}{2}.$$

Перенося множество образов на сферу, можно получить „карту плоских треугольников", рассмотрение которой позволяет дать естественную и единообразную классификацию плоских треугольников, не прибегая к классификации по различным признакам, как это делается в элементарной планиметрии. Р. С. Гутер

3082. О приложении теории измерения величин к измерению длин отрезков и площадей многоугольников. Мацкин М. С., Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 184—207

Показывается применение известной общей теории величин к измерению длин прямолинейных отрезков и площадей плоских многоугольников, для чего доказывается ряд теорем и лемм о равносоставленных многоугольниках, прямоугольниках и треугольниках.

Н. В. Наумович

3083. О равностороннем треугольнике. Гурматай (Sur le triangle équilatéral. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1957, **66**, № 4-6, 167—172 (франц.)

Методом комплексных координат доказывается ряд теорем о равностороннем треугольнике, в частности: 1) В равностороннем треугольнике средина расстояния между точками, инверсными относительно описанной окружности двум инверсным относительно треугольника точкам, принадлежит вписанной в него окружности. 2) Если A и B суть точки, инверсные относительно равностороннего треугольника, то сумма углов, сбразуемых каждой из его высот с диаметрами описанной окружности, проходящими через A, B и средину отрезка AB— кратна π. 3) В равностороннем треугольнике взаимная трансверсаль касательной к описанной окружности в переменной точке T касается своей огибающей в точке диаметра описанной окружности, перпендикулярного к прямой Симсона точки T. К. К. Мокрищев

3084. Обобщение на вписанный многоугольник прямой Симсона произвольного угла. Гурматай (Extension au polygone inscriptible de la droite de Simson d'angle quelconque. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 23—27 (франц.)

Ланглей определил прямую Симсона точки M окружности относительно вписанного многоугольника $A_1A_2...A_n$. Проекции точки M на прямые Симсона этой точки относительно треугольников $A_2A_3A_4$; $A_3A_4A_1$; $A_4A_1A_2$; $A_1A_2A_3$ принадлежат одной прямой, называемой прямой Симсона точки M относительно четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$; проекции точки M на прямые Симсона этой точки относительно четырехугольника $A_2A_3A_4A_5$, $A_3A_4A_5A_1$, $A_4A_5A_1A_2$, $A_5A_2A_3A_4$ принадлежат прямой, называемой прямой Симсона точки M относительно пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ и т. д.

Рассматривается обобщение прямой Симсона относительно данной точки M на произвольный вписанный в окружность многоугольник, если из точки M проводятся прямые, образующие со сторонами многоугольника данный угол (не обязательно прямой). Это обобщение интересно тем, что углы, заменяющие прямые углы при проектировании точки M на прямые Симсона (последовательно относительно треугольника, четырехугольника и т. д.), могут быть различными. Кроме того, простое уравнение обобщенной прямой Симсона показывает, что уравнение прямой Симсона не меняется от перестановки углов при последовательных косоугольных проекциях. Исследование ведется при помощи комплексных координат. Интересно полученное следствие, обобщающее известную теорему геометрии треугольника. Прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек относительно n'-угольника перпендикулярны, если n нечетно, и параллельны, если n четно. С. И. Зетель

3085. К отысканию ядра сечения произвольного четырехугольника. Барта (Zur Ermittlung des Kernes einer beliebigen Viereckfläche. Barta J.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 245 (нем.)

Обобщен способ отыскания ядра сечения прямоугольника на произвольный четырехугольник. С. И. Зетель

3086. Некоторые замечания к теореме Помпею. Скопец З. А., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 205—210

Приводится новое доказательство известной теоремы Помпею, позволяющее установить, что если в плоскости равностороннего треугольника $\Delta(A_1A_2A_3)$ дана точка P, то на отрезках PA_i можно построить треугольник π, который: 1) вписывается в данный треугольник Δ, 2) вырождается в отрезок тогда и только тогда, когда точка P принадлежит описанной около треугольника Δ окружности, 3) имеет углы ψ_i, связанные с углами $\varphi_i = \angle A_jPA_k$ определенными соотношениями в зависимости от того, в какой части плоскости находится точка P. Находится также геометрическое место точек P, которым соответствуют прямоугольные треугольники π. Дается обобщение теоремы Помпею на трехмерное пространство.

Н. В. Наумович

3087. Ортополяры прямой в комплексном треугольнике. Котов В. Ф., Уч. зап. Магнитогорского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 340—343

Три произвольные прямые A, B, C и три перпендикуляра a, b, c, так что a пересекается ортогонально с B и C (соответственно b и c), образуют в пространстве комплексный треугольник. Первые три прямые называются его вершинами, а остальные три — его сторонами. Пусть d — любая прямая. Прямая A_d (соответственно B_d или C_d) ортогонально пересекается с прямой d и с кратчайшим расстоянием между d и A (соответственно B или C). При помощи винтового исчисления доказывается существование прямой, ортогонально пересекающейся с тремя прямыми кратчайших расстояний между A_d и a, B_d и b, C_d и c. Эта прямая и называется ортополярной прямой d относительно вершин комплексного треугольника. Рассматриваются некоторые применения для обыкновенного треугольника на плоскости.

Примечание референта. Возникает вопрос, имеется ли связь построений автора с конфигурацией Петерса — Морлея (Математика в СССР за 30 лет, 1948, стр. 952). К. И. Гринцевичюс

3088. О свойстве n-сторонника. Клосон (An n-line property. Clawson J. W.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 1, 32—33 (англ.)

Заметка дополняет статью автора (РЖМат, 1958, 1483). Доказаны теоремы:

Теорема 1. n кругов Микела $(n-1)$-сторонников, полученных из данного n-сторонника удалением одной из его сторон, имеют общий радикальный центр.

Теорема 2. Радикальный центр n кругов Микела и радикальный центр новой цепи кругов коллинеарны с центром круга Морлея данного n-сторонника.

А. Л. Вернер

3089. Заметка о существовании многоугольника. Гавел (Poznámka o existenci mnohoúhelníka. Havel Václav), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 4, 405—409 (чешск.)

Пусть заданы числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ $(n \geqslant 4)$; обозначим $a_i = \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_i)$, $b_i = \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_i)$, $d_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$, M — множество всех (i, j), для которых $d_{ij} \neq 0$, $x_i = -b_j d_{ij}^{-1}$, $x_j = b_j d_{ij}^{-1}$.

Многоугольник, i-й угол которого равен φ_i, существует именно тогда, когда выполнено одно из следующих условий: (1) $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$ и некоторое φ_i является нечетным кратным π; (2) $d_{ij} \neq 0$ для некоторых i, j и (a) $x_r \neq 0 \neq x_s$ для некоторой пары $(\lambda, s) \in M$ и существует пара (u, v), для которой $\operatorname{sg} b_u = -\operatorname{sg} b_v = \operatorname{sg} d_{uv} \neq 0$ или (b) $x_i x_j = 0$ для $(i, j) \in M$, $b_i = 0$ именно тогда, когда $i = \tau_1, \ldots, \tau_r$, среди коэффициентов a_{τ_j} $(j = 1, \ldots, r)$ имеется хотя бы один отрицательный и среди коэффициентов b_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ имеется хотя бы один положительный и один отрицательный.

A. Švec

3090. О четырех попарно ортогональных действительных сферах. Корт (Sur quatre sphères réelles deux à deux orthogonales. Court Nathan Altshiller), Mathesis, 1956, **65**, № 1-3, 53—67 (франц.)

Рассматриваются различные геометрические объекты, связанные с четверкой попарно ортогональных сфер (A), (B), (C), (D). Центральный тетраэдр $ABCD$ имеет ортоцентр H, являющийся центром мнимой сферы (H), ортогональной к данным. Разбивая четверку сфер на 2 пары и заменяя каждую пару на их радиальную сферу и сферу подобия, т. е. на сферы, концами диаметров которых служат соответственно центры данных сфер и их центры подобия, или на две сферы антиподобия, т. е. на сферы, относительно которых данные сферы взаимно инверсны, получим 6 новых четверок попарно ортогональных сфер с тою же общей ортогональной сферой (H). Описанные сферы центральных тетраэдров всех семи четверок имеют общую мнимую ортогональную сферу с центром H. Две различные точки пересечения трех данных сфер названы дополнительными; геометрические объекты, определяемые соответственно дополнительными точками, также названы дополнительными. Тетраэдр, определяемый точками пересечения, среди которых нет дополнительных, и его описанная сфера названы тетраэдром пересечения и сферой пересечения. Точка H является центром гомологии каждой из 8 пар дополнительных тетраэдров пересечения и центром подобия каждой пары дополнительных сфер пересечения. Сфера (H) ортогональна всем сферам пересечения. Каждая из 8 плоскостей подобия данной четверки сфер является плоскостью гомологии одной из пар дополнительных тетраэдров пересечения, радикальной плоскостью соответствующих сфер пересечения и общей плоскостью Лемуана этих тетраэдров, оказывающихся изодинамическими. Рассмотрены некоторые следствия перечисленных утверждений. Подробно исследована задача построения четверки попарно ортогональных сфер по их тетраэдру пересечения.

Примечание референта. Квадрат радиуса сферы центров H, ортогональной к описанной сфере центрального тетраэдра, равен не трети квадрата радиуса сферы (H), как сказано на стр. 56, а в 3 раза больше последнего.

Е. Г. Гонин

3091. Задача Аполлония, примененная к четырем окружностям, вписанным в треугольник. Эппли (Das Taktionsproblem von Apollonius, angewandt auf die vier Berührungskreise eines Dreiecks. Aeppli Alfred), Elem. Math., 1958, **13**, № 2, 25—30 (нем.)

Дается конструктивное решение задачи о построении всех окружностей, которые касаются любой тройки из четырех окружностей, вписанных в данный треугольник. Кроме окружности Фейербаха и сторон данного треугольника, являющихся общими решениями задачи для всех четырех троек вписанных окружностей, существует еще 16 окружностей — решений задачи, которые разбиваются на четыре группы по четыре окружности в каждой. Указывается ряд интересных геометрических свойств этих окружностей. Далее приводятся рациональные выражения их радиусов через стороны и радиус окружности Фейербаха данного треугольника. С помощью этих выражений выведены две группы линейных зависимостей между радиусами касательных окружностей, а также их обратными величинами.

В. Ф Рогаченко

3092. Синус тройного угла в круге. Тебо (Sine-triple-angle-circle. Thébault V.), Mathesis, 1956, № 4-6, 282—284 (франц.)

Если вписать в основной треугольник $T = ABC$, который сам вписан в круг (O, R), два треугольника $T_1 \equiv A_1 B_1 C_1$; $T_2 \equiv A_2 B_2 C_2$ так, что при обычных обозначениях имеем равенство углов

$$(a_1; b) = A \qquad (b_1; c) = B \qquad (c_1; a) = C$$

и

$$(a_2; c) = A \qquad (b_2; a) = B \qquad (c_2; b) = C,$$

то треугольники T_1 и T_2 вписаны в круг (ω) с центром ω и радиусом

$$\rho = \frac{R}{1 + 8\cos A \cos B \cos C}.$$

Эта теорема была доказана Тукером, а круг (ω) был назван Нейбергом "кругом утроенного угла", так как

$$A_1 A_2 : B_1 B_2 : C_1 C_2 = \sin 3A : \sin 3B : \sin 3C.$$

В заметке показано, что на прямой $O\omega$ лежит точка Q с нормальными координатами $\sin^2 A \cos A$, $\sin^2 B \cos B$, $\sin^2 C \cos C$, причем точка ω делит отрезок OQ в отношении $\frac{\rho}{R + \rho}$. Рассмотрен интересный частный случай, когда

$$A = 2B = 4C = \frac{4\pi}{7}.$$

В этом случае „круг тройного угла" вырождается в прямую.

С. И Зетель

3093. О быстром вычерчивании полярных кривых. Гринспан (On rapid sketching of polar curves. Greenspan Donald), Math. Teacher, 1957, **50**, № 4, 267—271 (англ.)

3094. Построение треугольника Пифагора. Зибель (Konstruktion der pythagoreischen Dreiecke. Siebel A.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, **9**, № 3, 133 (нем.)

3095. О построении прямых, удовлетворяющих определенным условиям. Рёвекамп (Over het construeren van rechten, die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen. Reuvecamp W. J., Jr), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1955—1956, **43**, № 6, 275—293 (гол.)

Систематизация задач на определение прямых линий в трехмерном пространстве. Задачи группируются сле-

дующим образом: задачи, которые сводятся 1) к определению прямой линии, проходящей через две конечные точки, 2) к определению прямой линии с заданным направлением через заданную точку, 3) к определению прямой линии с заданным направлением и с добавочными условиями, определяющими его положение (не равносильными требованию, чтобы прямая линия проходила через одну заданную точку), 4) к определению прямой, проходящей через заданную точку и с добавочными условиями, которые не равносильны заданию направления прямой (или заданию второй точки), 5) к определению прямой линии из условий, которые, однако, нельзя толковать как задание двух ее точек. Наконец, рассматриваются 6) некоторые особые случаи. Например, из группы 3) перечисляется 31 задача. Характерный пример из этой группы: искомые прямые с заданным направлением должны пересечь заданную прямую и касаться заданного конуса.

К. С. Сцилард

3096. Геометрические задачи на построение с бесконечным множеством решений. Кушка (Геометричні задачі на побудову з нескінченною множиною розв'язків. Кушка З. П.), Наук. зап. Полтавськ. держ. пед. ін-т, 1955, 8, 67—90 (укр.)

Задачи с бесконечным множеством решений часто возникают как необходимый этап решения некоторых определенных задач на построение, особенно при использовании метода геометрических мест. Поэтому учащиеся должны овладеть решением задач на построение с бесконечным множеством решений, что, в частности, поможет им приобрести навыки в исследовании решений конструктивных определенных задач. Даются образцы решения (с полным исследованием) восьми задач на построение треугольников с бесконечным множеством решений, а также краткие методические указания для преподавателей математики в VI — VII классах. В. Ф. Рогаченко

3097. Аналитический метод решения геометрических задач на доказательство (по планиметрии). Кушка (Аналітичний метод розв'язування геометричних задач на доведення (з планіметрії). Кушка З. П.), Наук. зап. Полтавськ. держ. пед. ін-т, 1955, 8, 91—105 (укр.)

Отмечается, что в практике школьной работы мало внимания уделяется решению геометрических задач на доказательство. При этом учителя отдают предпочтение синтетическому методу. Рекомендуется более широко применять аналитический метод, начиная с VI класса. Решение задач на доказательство аналитическим методом сводится к основным этапам: 1. Анализ решения, с помощью которого устанавливается: а) какое дополнительное построение нужно выполнить, если такое построение имеет место при решении данной задачи; б) какие геометрические предложения необходимо использовать при решении задачи; 2. Синтетическое решение задачи (после окончания анализа). Дается подробная методическая разработка решений 11 задач на доказательство по планиметрии аналитическим методом. В. Ф. Рогаченко

3098 К. Задачи по геометрии для класса математики. (Problèmes de géométrie. Classe de mathématiques. Paris, Ligel, 1957, 486 p., ill., 1900 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 14, 394 (франц.)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3099. Удвоение куба по Архиту и изучение кривой, связанной с этим вопросом. Скоф (Duplicazione del cubo secondo Archita e studio delle curve connesse al problema. Skof Fulvia), Period. mat., 1958, **36**, № 1, 19—40 (итал.)

Греческий математик Архит Тарентский (430—365 г. до н. э.) указал геометрическое решение задачи удвоения куба, заключающееся в конечном счете в нахождении точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ пересечения поверхностей: 1) $x^2 + y^2 = ax$, 2) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, 3) $(a^2 - b^2)x^2 - b^2y^2 - b^2z^2 = 0$. Действительно, если положить $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, то получится $b : r = r : \rho = \rho : a$ и $r = \sqrt{a^2}$ (при $a = 2$, $b = 1$ будет $r = \sqrt{2}$). Таким образом, решение Архита основано на гиппократовом замечании. Автор (ссылаясь на Лория) воспроизводит чисто геометрическое решение Архита и указывает приведенное аналитическое решение. Далее автор находит точку P методами начертательной геометрии и теми же методами исследует пересечения: цилиндра 1) с конусом 3); цилиндра с тором 2); и конуса с тором. Обширный параграф посвящен изучению проекций этих пересечений на координатные плоскости. Особым точкам этих проекций будет посвящено продолжение работы. Г. И. Дринфельд

3100. Кривые второго порядка в элементарном изложении аналитической геометрии. Страшевич (Krzywe stopnia drugiego w elementarnym wykladzie geometrii analitycznej. Straszewicz S.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 234—243 (польск.)

Методическая статья, посвященная изложению элементарной теории кривых второго порядка в технических учебных заведениях в объеме 12 лекционных часов. Автор исходит не из фокальных свойств кривых, а непосредственно из соответствующих частных случаев общего уравнения кривой второго порядка. В. Ф. Рогаченко

3101. О стереометрическом изложении теории конических сечений. Гавел (O stereometrickém vybudování theorie kuželoseček. Havel Václav), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, **2**, № 6, 687—697 (чешск.)

Доказываются некоторые элементарные теоремы, связанные с центральным проектированием окружности, например: окружность K можно центрально спроектировать в окружность K' так, что данный треугольник, вписанный в K, спроектируется в прямоугольный равнобедренный треугольник. На основании этих теорем делается основной вывод: центральная проекция конического сечения есть коническое сечение. В. А. Маневич

3102. Геометрический смысл первого и второго эксцентриситетов. Стовас В. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 13, 139—141

3103. Аналитический метод для построения кривых второго и третьего порядков. Сиспанов (An analytic method for tracing quadratics and cubics. Sispanov Sergio), Rev. Univ.-Mat. Argentina, 1955, **16**, 129—150 (исп.)

3104. О тройном произведении векторов. Кламкин (On the vector triple product. Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 10, 705—707 (англ.)

Дается несколько различных способов для вычисления векторного произведения трех векторов

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}.$$

К. И. Гринцевичюс

3105. Замечания о векторном методе в аналитической геометрии. Шарский (Uwagi o metodzie wektorowej w geometrii analitycznej. Szarski J.), Roczn. Polsk. towarz. mat. 1956, Ser. 2, **1**, № 2, 226—229 (польск.)

На примерах из аналитической и дифференциальной геометрии иллюстрируются положительные и отрицательные стороны применения векторного метода. На этой основе рекомендуется векторное изложение применять в теоретической части курса, а на практических занятиях, требующих числовых расчетов, предлагается использовать обычные аналитические методы. В. Ф. Рогаченко

3106. Алгебраические основы векторного исчисления. Вакселъ (Algebraische Grundlage der Vektorrechnung. Vakselj Anton), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, 12, № 3, 161—169 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Ставится задача обоснования свойств векторов трехмерного евклидова пространства и, в частности, существования у них двух произведений с помощью гиперкомплексных чисел, конструируемых в виде квадратных матриц, для которых, помимо обычных правил действий над матрицами, устанавливается обобщенное умножение (π):

$$A\pi B = a_1 AB + a_2 BA + b_1 A_1 B + b_2 B_1 A + \\ + [2c(AB)_1 + d A_1 B_1] E, \qquad (1)$$

$A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ — квадратные матрицы n-го порядка; E — единичная матрица; AB, BA — обычные произведения матриц (по правилу умножения строки на столбец); A_1, B_1 $(AB)_1$ — следы соответствующих матриц; a_1, a_2, b_1, b_2, c, d — произвольные фиксированные комплексные числа, выбор которых определяет ту или иную операцию умножения: $\pi = (a_1, a_2, b_1, b_2, c, d)$. В частности, произведение AB получается при $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, при $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, $\pi = p = (0, 0, 0, 0, c, d)$ произведение ApB представляет собой скалярную матрицу, которая отождествляется с соответствующим скаляром:

$$ApB = 2c(AB)_1 + d A_1 B_1. \qquad (2)$$

Произведение (2) называется внутренним произведением матриц A и B; в силу равенства $(AB)_1 = (BA)_1$ оно коммутативно. Произведение (1) называется внешним, в общем случае оно не является ни коммутативным, ни ассоциативным.

Исследуются условия, при которых смешанное произведение $(A\pi B)pC$ можно рассматривать как скалярное произведение трех матриц A, B и C. В частности, такое смешанное произведение доставляет пара:

$$\pi = \wedge = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right) \text{ и } p = (0, 0, 0, 0, c', d') \qquad (3)$$

при любых c' и d'. Внешнее произведение

$$A \wedge B = \frac{1}{2}(AB - BA), \qquad (4)$$

меняющее знак при перестановке сомножителей, называется альтернирующим произведением матриц A и B.

Вводится понятие композиции умножений: $\pi'' = \pi\pi'$. Произведение $A\pi'' B = A\pi\pi' B$ получается подстановкой в (1) вместо матриц AB, BA, B, A, E соответственно

$$A\pi' B,\ B\pi' A,\ {}^1/_2(B\pi' E + E\pi' B),\ {}^1/_2(A\pi' E + \\ + E\pi' A),\ E\pi' E.$$

Заменяя в формуле (1) коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2, c, d новыми l, m, r, s, t, u, связанными со старыми соотношениями:

$$a_1 = \frac{l+m}{2},\ a_2 = \frac{l-m}{2},\ b_1 = \frac{2r - 2l + ns}{2n},\ b_2 = \\ = \frac{2r - 2l - ns}{2n},\ c = t, \qquad (5)$$

$$d = \frac{l - 2r - 2nt + u}{n^2},$$

находим, что коэффициенты π'' связаны с коэффициентами π и π' следующим образом:

$$l'' = ll',\ m'' = mm',\ r'' = rr',\ s'' = \\ = ms' + sr',\ t'' = lt' + tu',\ u'' = uu'. \qquad (6)$$

Эти соотношения позволяют установить изоморфное соответствие между множеством операций умножения π и множеством матриц $\tilde{\pi}$ вида:

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \text{ где } L = \begin{pmatrix} l & 0 & t \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 & s \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Отсюда вытекает, что композиция умножений ассоциативна.

Для построения гиперкомплексных чисел, представляющих трехмерные векторы, рассматриваются матрицы второго порядка, следы которых равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

В качестве внешнего произведения для них берется альтернирующее произведение $A \wedge B = \frac{1}{2}(AB - BA)$, которое также является матрицей со следом, равным нулю. В соответствующем этому внешнему произведению внутреннем произведении (3) кладем $c' = -\frac{1}{2}$.

Получаем

$$AB = -a_{11} b_{11} - {}^1/_2(a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12}). \qquad (9)$$

Полагая теперь: $a_{11} = -a_1 i$, $a_{12} = a_2 i + a_3$, $a_{21} = a_2 i - a_3$ (a_1, a_2, a_3 — действительные числа, i — мнимая единица), записываем матрицу (8) в виде:

$$A = A_2 = \begin{pmatrix} -a_1 i & a_2 i + a_3 \\ a_2 i - a_3 & a_1 i \end{pmatrix} = \\ = a_1\tilde{i} + a_2\tilde{j} + a_3\tilde{k}, \qquad (10)$$

где $\tilde{i} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\tilde{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — единицы кватернионов. Таким образом вектору (a_1, a_2, a_3) ставится в соответствие кватернион (10). В соответствии с (9) внутреннее произведение находится по правилу:

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

внешним произведением служит $A \wedge B$.

Представление трехмерных векторов гиперкомплексными числами A_2 не единственное. Теми же свойствами, что матрицы A_2, обладают матрицы третьего порядка:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которых внешнее и внутреннее умножение производится по указанным выше правилам. Комбинируя эти представления, можно получать новые представления, например:

$$A_4 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

А. Г. Школьник

3107 К. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Келлер (Analytischer Geometrie und lineare Algebra. Keller Ott-Heinrich. Berlin. VEB Dtsch Verl. Wiss., 1957, XI, 442 S., ill.) (нем.)

Курс аналитической геометрии в трехмерном и n-мерном евклидовом и проективном пространствах и линейной алгебры. В гл. I вводятся координаты на плоскости и в трехмерном пространстве, в гл. II изложена векторная

алгебра (вектор определяется как параллельный перенос в пространстве), в гл. III изложены общая теория прямых, плоскостей, окружностей и сфер и элементарная теория линий и поверхностей второго порядка. Гл. IV представляет собой обычный курс линейной алгебры. В гл. V вводится n-мерное евклидово пространство, определяющееся с помощью арифметической модели (точки — системы чисел $x^1, x^2, \ldots, x^n$), в этом пространстве определяются векторы (как преобразования, переводящие точки $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в точки $x^1 + a^1, x^2 + a^2, \ldots, x^n + a^n$) и строится векторная алгебра. В гл. VI сообщаются общие сведения о геометрических преобразованиях и эрлангенской программе Ф. Клейна. В гл. VII рассматриваются ортогональные преобразования (движения и отражения), в связи с движениями рассматриваются эйлеровы углы и представления движений с помощью кватернионов; здесь же рассматриваются преобразования уравнений второй степени при ортогональных преобразованиях. В гл. VIII изучаются аффинные преобразования и их важнейшие частные виды, а также аффинная теория линий и поверхностей второго порядка, в частности, теория сопряженных диаметров, теоремы Аполлония о сопряженных диаметрах и т. д. В гл. IX „Пучок и связка" рассматриваются пучки и связки прямых и плоскостей, несобственные элементы и вводятся однородные координаты, таким образом, с этой главы начинается изложение проективной геометрии. В гл. X проективная геометрия развивается дальше: определяются координаты прямых линий на плоскости и в пространстве, координаты гиперплоскостей, рассматривается принцип двойственности и основы линейчатой геометрии, в гл. XI рассматриваются „теоремы о точках пересечения" — теоремы Дезарга и вырожденный случай теоремы Паскаля, в гл. XII изучаются двойное отношение и гармонизм, в гл. XIII — проективные преобразования на прямой и в плоском пучке прямых и, в частности, инволюции, в гл. XIV — пучки кругов (в связи с инволюциями на прямой), в гл. XV — проективные преобразования в пространстве; здесь же вводятся проективные координаты и рассматривается приведение матриц к нормальной форме Жордана, с помощью чего производится классификация проективных преобразований. В гл. XVI изложена проективная теория линий и поверхностей второго порядка, в частности проективное порождение линий второго порядка, теорема Паскаля, теория поляр, применения к геометрическим построениям.

Книга охватывает огромный материал, изложенный весьма экономно и часто очень оригинально. Тщательно указаны все применения к элементарной геометрии и геометрическим построениям. Много исторических указаний, после фамилии каждого математика указаны даты жизни, профессия, город, в котором он жил и работал. Экономное изложение материала приводит, однако, иногда к чрезмерной конспективности. Исторические справки не всегда верны, например, на стр. 135 „формулы Кели" на самом деле найдены Л. Эйлером. Геометрическому духу книги не соответствует определение пространства через арифметическую модель, этому духу более соответствовало бы аксиоматическое определение основных понятий. В книге 190 обычных чертежей, изображающих плоские фигуры, и 77 стереоскопических чертежей, к которым приложены специальные очки; эти чертежи дают наглядное объемное изображение самых сложных пространственных конфигураций. Стереоскопические чертежи представляют собой замечательную техническую особенность книги. Б. А. Розенфельд

3108 К. Аналитические кривые второго порядка. Спейн (Analytical conics. Spain Barry. London—New York, Pergamon Press, 1957, ix, 145 pp., ill., 30 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 411, 12 (англ.)

3109 К. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Цубербиллер (Zadania i ćwiczenia z geometrii analitycznej. Wyd. 3 fotooffs. Cuberbiller O l'ga. Tłum. z ros. Warszawa, PWN, 1957, 311 s., il., 29 zł), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 44, № 607 (польск.)

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3110. О двух взаимообратных точках и о их дополнительных точках. Било (Sur deux points réciproques et leurs complémentaires. Bilo J.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 324—325 (франц.)

Приводится проективное доказательство и обобщение теоремы, доказанной аналитически Барроканом: В треугольнике ABC две взаимообратные точки P и Q и их дополнительные P' и Q' расположены на коническом сечении, описанном около треугольника ABC (РЖМат, 1958, 318). Обобщение теоремы Баррокана: Если u, u_a, u_b, u_c — точки, принадлежащие инверсии относительно треугольника ABC, то точки P и Q взаимообратные и точки P' и Q', им соответственные в гомологии с центром u, переводящей $u_a u_b u_c$ в ABC, лежат на одном коническом сечении, описанном около ABC. При совпадении U с G — центром тяжести треугольника ABC — треугольник $u_a u_b u_c$ совпадает с антидополнительным треугольника ABC и получается теорема Баррокана. С. И. Зетель

3111. Символизм для рассмотрения проектирований и подобных им математических действий. Аллен (Symbolism in the treatment of projectives and similar mathematical procedures. Allen Howard D.), Quart. J. Florida Acad. Sci., 1956, **19**, № 1, 52—54 (англ.)

Вводятся символические обозначения для координатных осей, плоскостей, гиперплоскостей, а также окружностей, кругов и т. д. в 4-мерном пространстве и показывается, как в этих обозначениях выражаются проекции кругов на координатные оси, шаров на координатные плоскости и т. д. А. Л. Онищик

3112. Проективные соответствия в прямолинейных рядах. Лебедев П. Н., Сб. статей Всес. заочн. политехн. ин-та, 1956, вып. 15, 112—127 и 1957, вып. 16, 30—46

Часть I см. РЖМат, 1958, 1498.

Излагается метрическая теория проективных соответствий проективных рядов на плоскости. Метод автора таков. Пусть ряды u и u_1 проективны. Расположим носитель ряда u_1 перпендикулярно носителю u и так, чтобы ряды стали перспективны. Будем переносить параллельно себе ряд u_1, сохраняя его перспективность ряду u. Центр перспективы S при этом будет перемещаться по прямой, перпендикулярной к u и проходящей через предельную точку ряда u. Предельная же точка ряда u_1, сохраняя среди точек этого ряда неизменное положение, опишет равнобочную гиперболу, с помощью которой и решаются все задачи, рассмотренные автором.

Решение наиболее важной задачи — построения двойных точек двух совмещенных проективных рядов — приводится к элементарным построениям при помощи циркуля и линейки, более простым, чем классическое построение Штейнера. А. С. Лейбин

3113. К определению поверхностей второго порядка. Ленц (Zur Definition der Flächen zweiter Ordnung. Lenz Hanfried), Math. Ann., 1956, **131**, № 4, 385—389 (нем.)

Приводится следующее определение Штаудта кривой второго порядка: коническое сечение — непустое множество точек и прямых действительной проективной плоскости, самосопряженных относительно заданного полярного соответствия. Автор переносит это определение на N-мерное пространство. Доказывается теорема:

Если в любом проективном пространстве конечного или бесконечного измерения (или в проективной плоскости, в которой справедлива теорема Дезарга) дано квазиполярное соответствие (РЖМат, 1957, 3427), при котором существует некоторая прямая g, содержащая не менее двух самосопряженных точек (но конечное число), то справедлива теорема Паппа—Паскаля.

Если g содержит, кроме того, бесконечное множество несамосопряженных точек, то квазиполярное соответствие — проективное. Множество самосопряженных точек и гиперплоскостей, образует поверхность второго порядка, в смысле указанного выше определения.

В. А. Маневич

3114. Стереографическая проекция параболического цилиндра на касательную плоскость. Скопец З. А., Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. ин-та, 1957, **7**, 61—71

Рассматривается стереографическое отображение параболического цилиндра на касательную к нему плоскость π, когда центром проектирования является несобственная точка, определенная перпендикулярным направлением к π. Отображение получается как частный случай отображения посредством моноида (реф. 3116), когда последний является параболическим цилиндром.

С помощью указанного отображения устанавливается взаимно однозначное соответствие между прямыми пространства и группами точек на π, между плоскостями пространства и параболами на π, имеющими общую несобственную точку. Решаются три позиционные задачи на определение линий пересечения некоторых линейчатых поверхностей с данным параболическим цилиндром.

Рассматривается инверсное преобразование в полуевклидовой плоскости. В. А. Маневич

3115. Стереографическая и изотропная проекции параболоида вращения на касательную плоскость в его вершине. Скопец З. А., Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. института, 1957, **7**, 73—92

Рассматривается стереографическое отображение параболоида вращения F_2 на касательную плоскость π в его вершине. Это отображение получается как частный случай отображения посредством моноида (реф. 3116), когда последний является параболоидом вращения.

Показано, что плоские сечения F_2 имеют своими стереографическими изображениями окружности или прямые. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между инверсиями на плоскости π и инволюциями на F_2. Рассматривается изотропная проекция F_2 на π, при которой произвольной точке S пространства, лежащей вне F_2, соответствует кривая 2-го порядка пересечения касательного конуса из S к F_2 с π. Указано построение изображений линий пересечения F_2 с некоторыми линейчатыми поверхностями. В. А. Маневич

3116. Отображение прямых проективного пространства на плоскость посредством моноидов. Скопец З. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 152—157

Моноидом n-го порядка называется алгебраическая поверхность n-го порядка с $(n-1)$-кратной особой точкой.

С помощью проектирования из $(n-1)$-кратной точки моноида устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости изображений и точками моноида (за исключением особых точек) и соответствие между прямыми пространства и группами точек на плоскости изображений. Для обоснования этого соответствия доказываются четыре леммы, из которых две последние получаются как частные случаи теоремы о направляющей кривой соответствия (n, n_1) (Sturm R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Bd 1, 270, Leipzig, 1908), когда последнее является циклическим проективитетом. В. А. Маневич

3117. Характеризация аффинной плоскости с ортогональностью. Клингенберг (Eine Charakterisierung von affinen Ebenen mit Orthogonalität. Klingenberg Wilhelm), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 152—154 (нем.)

Допустим, что при любом выборе точек P, P', Q, Q' аффинной плоскости π с ортогональностью (РЖМат, 1958, 7087) таких, что $P \neq P'$, $Q \neq Q'$, $PP' \perp QQ'$ существует ортогональная коллинеация плоскости π, переводящая P в P', а Q—в Q' (ортогональность коллинеации означает, что она индуцирует на несобственной прямой инволюцию). Доказывается, что каждой такой плоскости π соответствует однозначно определенная инволюция ω в 1-мерной проективной группе коллинеаций над телом K. Эта инволюция ω определяет на несобственной прямой l плоскости π, рассматриваемой как проективная прямая, инволюцию α, определяющую ортогональность в π. Группа автоморфизмов плоскости π состоит из тех коллинеаций, которые индуцируют на l коллинеации, перестановочные с α. Получены и некоторые другие результаты.

Л. А. Скорняков

3118. К геометрии трехмерного пространства с вырожденным абсолютом. Войтенко М. А., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, **7**, 137—147

Рассматривается трехмерное проективное пространство, в котором введено мероопределение с помощью абсолюта, представляющего несобственную плоскость, с взятой на ней прямой и взятой на прямой точкой; движение в этом пространстве определяются формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= x &&- a, \\ y' &= \alpha x + y &&+ b, \\ z' &= \beta x + \gamma y + z &&+ c. \end{aligned}$$

Указываются формулы для расстояния между двумя точками, угла между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями; при этом отмечается ряд случаев, отвечающих наличию в пространстве прямых трех различных типов и плоскостей трех типов. Находятся расстояния между двумя параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между точкой и прямой. Перечисляются свойства трехгранного угла. Отмечаются некоторые свойства тетраэдра, включая формулу для вычисления его объема. Н. М. Макарова

3119. Некоторые огибающие ∞^3 коллинеаций в S_5. Швец (Certaines enveloppes des familles ∞^3 d'homographies dans S_5. Švec Alois), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 1, 57—65 (франц.; рез. русск.)

Плоскости однопараметрической системы плоскостей в комплексе K плоскостей $\pi = \pi(u_1, u_2, u_3)$ (т. е. в системе ∞^3 плоскостей) в проективном пятимерном пространстве S_5 образуют многообразие V_3, о котором предполагается, что размерность его касательных пространств меньше 5. Автор изучает комплексы K, фокусы (т. е. общие точки „бесконечно близких" плоскостей) которых образуют в каждой плоскости три линейно независимые прямые. Эти комплексы зависят от шести функций двух переменных. Пусть в пространстве S_5' дан еще комплекс K' плоскостей того же типа и пусть комплексы K и K' находятся в соответствии C (плоскость→плоскость), которое восстанавливает многообразие V_3. Соответствие является точечным изгибанием (в смысле Э. Чеха), если его можно распространить на точечное соответствие C^* между S_5 и S_5' таким образом, чтобы к любой паре соответствующих друг другу плоскостей $\pi \in K$ и $\pi' \in K'$, $\pi' = C\pi$ существовала коллинеация $H = H(u_1, u_2, u_3)$, обладающая следующим свойством: Если γ — произвольная кривая в S_5, проходящая через произвольную точку $A \in \pi$, то кривые C^*_γ и H_γ имеют в точке $C^*A = HA$ аналитическое касание первого порядка. C является тогда огибающей ∞^3 коллинеаций (в смысле Э. Чеха). Комплексы K', находящиеся с данным комплексом K в точечном изгибании C,

зависят от всемнадцати функций одного аргумента. В заключение разъяснен геометрический смысл шести условий, определенных точечным изгибанием комплексов K и K'. Z. Nádení

3120. Некоторые замечательные классы точечных преобразований проективного пространства в себя. Сперанца (Alcune notevoli classi di trasformazioni puntuali di uno spazio proiettivo in sé. Speranza Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 2, 179—188 (итал.; рез., англ.)

Работа продолжает прежние исследования того же автора (РЖМат, 1957, 5891, 7384). Точечное преобразование $\bar{X}^i = f^i(X^k)$ совмещенных пространств S_r и $\bar{S}_r$ порождает для каждой пары соответствующих точек A, $\bar{A}$ проективное соответствие Ω связок с центрами $A, \bar{A}$. Если $_1S_{r-p}$ — пространство минимальной размерности, соответствующее себе в преобразовании Ω, то пара A, $\bar{A}$ называется парой рода p. Под T_p понимается преобразование, для которого каждая пара A, $\bar{A}$ — рода p (в частности, $> p$). T_p называется точечным преобразованием рода p. Простым примером преобразований T_p служат преобразования T_p^*, конструкция которых осуществляется таким образом. В S_r строится произвольное p — параметрическое семейство S_{r-p} (предполагается, по крайней мере локально, что через каждую точку проходит одно и только одно S_{r-p}), в каждом S_{r-p} задается точечное преобразование. Тогда образом точки A пространства S_r будет точка $\bar{A}$, получаемая из нее в преобразовании S_{r-p}, проходящем через A. Широта класса преобразований T_p^* определяется в $r-p$ функций r аргументов и совпадает с широтой класса всех T_p; однако класс T_p^* исчерпывает T_p лишь в случае $p = r-1$. Кроме случая $p = r-1$, специально рассматривается другой частный случай $p = 1$. При $p = 1$ в каждой точке A определяется S_{r-1}, т. е., вообще говоря, неголономная гиперповерхность V. Изучается порождаемое таким путем преобразование $A \to S_{r-1}$. Показывается, что для голономности V необходимо и достаточно, чтобы T_p было T_p^*.

В. В. Рыжков

3121. О точечной группе преобразований, сохраняющей семейство конических сечений плоскости с данным касательным элементом. Лагранж (Sur le groupe ponctuel conservant la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné. Lagrange René), Ann. scient. École norm. supér., 1957, **64**, № 3, 197—229 (франц.)

Исследуются группы G точечных преобразований плоскости, сохраняющих семейство конических сечений Γ, проходящих через две данные фиксированные точки I, J. Если эти две точки I и J различны, то структура группы G аналогична структуре группы аналлагматических преобразований. Новые результаты получены автором в случае, когда эти две точки I и J совпадают и конические сечения Γ имеют общий касательный элемент. В этом случае задание пары различных точек A и B определяет пучок конических сечений Γ семейства, проходящих через эту пару точек. Задание еще одной точки M определяет коническое сечение пучка, проходящее через M. Преобразование, переводящее точку M в M', гармонически сопряженную точке M относительно пары A, B, автор называет симметрией относительно пары AB $M_1 = H_{AB}M$ в группе G. Произведение конечного числа таких симметрий составляет подгруппу H группы G. Подгруппа H зависит от 6 параметров. Группа G зависит от 7 параметров. Группа H изоморфна группе движений трехмерного пространства E_3, а группа G — группе подобия этого пространства. В этом соответствии симметрия $H_{AB}M$ изображается в E_3 симметрией относительно некоторой прямой. Всякое преобразование группы H есть произведение не более трех симметрий. Преобразования группы H, являющиеся произведениями трех инверсий, изображаются в E_3 геликоидальными движениями с изотропной осью.

Р. М. Гейдельман

3122. Пространственные циклические бирациональные преобразования с четным периодом. Турри (Sulle trasformazioni birazionali cicliche dello spazio a periodo pari. Turri Tullio), Rend. Semin. Fac. sci. Univ. Cagliari, 1955, **25**, № 3-4, 119—129 (итал.)

Автор показывает, что каждое циклическое преобразование трехмерного пространства, имеющее четный период, является произведением коммутирующих между собой инволюции и циклической гомографии. Затем, пользуясь данной им ранее (РЖМат, 1957, 8179) классификацией инволюций, он исследует вопрос о циклических гомографиях, коммутирующих с некоторой инволюцией. При этом выясняется, что циклическими преобразованиями с нечетным периодом, коммутирующими с некоторой инволюцией, могут быть только циклические гомографии. Автор предполагает, что последними исчерпываются все циклические преобразования с нечетным периодом. В. В. Морозов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3123. Интерпретация координат и проекций Гаусса, Меркатора и Зольднера на шаре как перспективно-конических координат и проекций. Петренко А. И., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 1, 78—82

Рассматриваются перспективно-конические координаты и проекции, превращающиеся в перспективно-цилиндрические, если сферическая широта главного луча $S_0 = 0$. Они являются обобщением координат и проекций Гаусса, Меркатора и Зольднера на шаре при условии, когда вместо географического экватора и осевого географического меридиана берутся соответственно сферический экватор и осевой сферический меридиан. При совмещении сферической оси такой проекции с географической осью Земли получаются проекции Меркатора, при совмещении же сферической оси с плоскостью географического экватора получаются проекции Гаусса или Зольднера на шаре. Доказывается, что координаты Гаусса, Меркатора и Зольднера можно рассматривать как частный вид перспективно-конических координат. Определяется положение точки зрения в перспективно-цилиндрических координатах и показывается, что по типу расположения точки зрения проекции Зольднера относятся к внешним, а проекции Гаусса и Меркатора — к внутренним перспективно-коническим проекциям.

Н. В. Наумович

3124. Построение центрально-аксонометрических проекций методом треугольников следов. Горбунов К. Г., Тр. Саратовск. ин-та механиз. с. х., 1957, вып. 11, ч. I, 125—131

Каждой точке пространства A ставится на картинной плоскости в соответствие треугольник следов $A_x A_y A_z$, подобный так называемому основному треугольнику следов $a_x a_y a_z$, соответствующему началу координат O.

Центру проекций S соответствует единственный треугольник следов $S_x S_y S_z$. Каждая пара треугольников следов образует конфигурацию Дезарга, причем центр ее соответствия является изображением определенной точки координатного пространства. Это обстоятельство используется для построения центрально-аксонометрических проекций отдельных точек и фигур. Показывается также переход к метрическому построению точек. Н. В. Наумович

3125. Начертательная геометрия пространства Лобачевского. Несторович Н. М., Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, **115**, № 10, 16—17

3126. Использование модели в преподавании начертательной геометрии в десятом классе. Ланта (Užití

modelů v deskriptivní geometrii v 10. třídě. (Metodické pokyny.). Lanta Oldřich), Mat. škole, 1958, 8, № 4, 225—228 (чешск.)

3127 К. Первые понятия начертательной геометрии. Массон (Premières notions de géométrie descriptive. 5e éd. Masson Henri. Paris, Eyrolles, 1956, 51 p., ill., 250 fr.), Bibliogr. France, 1957, **146**, № 45, 1020 (франц.)

3128 К. Начертательная геометрия с приложением 382 упражнений и задач для 1-го класса и для класса технической математики и подготовки к вступительному конкурсу в национальные школы инженеров искусств и промышленности. Майар, Мийе (Géométrie descriptive, avec 382 exercices et problèmes. Classes de 1-re et mathématiques technique préparation au concours d'admission aux écoles nationales d'ingénieurs arts et métiers. Maillard Roland, Millet Albert. Paris, Hachette, 1957, ii, 256 p., ill., 680 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 2, 37 (франц.)

3129 К. Начертательная геометрия. 1. Методы изображений. Ченек, Медек (Deskriptívna geometria. 1. Zobrazovacie metódy. Čeněk Gabriel, Medek Václav. Bratislava, SVTL, 1956, 381 s., il., 31, 90 Kčs) Bibliogr. katal. ČSR. Slov. kniha (y), 1957, 8, № 4, 120 (словацк.)

3130 К. Параллельное проектирование на три плоскости. Завадзкий (Trójobrazowy rzut równoległy. Zawadzki Adam. Warszawa, PWN, 1957, 148 s., il., 19.50 zl), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 35, 486 (польск.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3131. Об изотропных парах лучей второго рода конгруэнций лучей первого порядка, 3-го, 2-го и 1-го классов. Ниче (Über die isotropen strahlenpaare 2. Art der Strahlenkongruenzen 1. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse. Ničе Vilko. Hrvatsko Prirodoslovno Društvo. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II. 1953, 8, 293—296) (нем.; рез. сербо-хорв.)

3132. Элементарная теория плоских кубических кривых. Кизини (Teoria elementare delle cubiche piane. Chisini Oscar), Period. mat., 1957, **35**, № 3, 126—148 (итал.)

Кривые третьего порядка обладают рядом интересных свойств, но еще интереснее методы, которыми эти свойства обнаруживаются. При исследовании кривых третьего порядка применяется следующая, основная теорема, доказанная в рассматриваемой статье. Всякая кривая третьего порядка, проходящая через 8 из девяти точек пересечения кривых третьего порядка $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, не имеющих ни одной общей части и не имеющих двойных точек, проходит и через девятую точку. Из основной теоремы, как следствия, получаются:

1) Теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение,

2) Свойства секущих. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения данной кубической кривой K с прямой a и соответственно B_1, B_2, B_3 — точки пересечения K с прямой b. Пусть r_1, r_2, r_3 — соответственно прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Если C_1, C_2, C_3 — точки пересечения K с прямой C и C_1 и C_2 лежат на прямых r_1 и r_2, то и точка C_3 лежит на прямой r_3. Касательные к кривой 3-го порядка в трех точках, лежащих на одной прямой, пересекают кривую в трех точках, лежащих на одной прямой.

Теорема. Прямая, проходящая через две точки перегиба кубической кривой, пересекает ее в третьей точке, которая является точкой перегиба.

3) Теорема Понселе: Необходимым и достаточным условием того, чтобы точка F была точкой перегиба кривой третьего порядка K, является принадлежность к коническому сечению H шести точек $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ пересечения кривой с прямыми a, b, c, проходящими через F. Подробно рассматривается структура точек перегиба кривой 3-го порядка, изучаются прямые Маклорена, каждая из которых проходит через три точки перегиба кубической кривой. Показано существование 12 прямых Маклорена.

Теорема Сальмона. Четыре касательных, проведенных из одной точки O кривой K третьего порядка, касаются той же кривой K в других точках, и двойное отношение этих четырех касательных сохраняет постоянное значение k при перемещении точки O по кривой K. При доказательстве теоремы вновь используется основная теорема, приведенная в этой статье.

Статья заканчивается рассмотрением канонических уравнений действительных кубических кривых. Исследуется уравнение $y^2 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ в зависимости от корней кубического четырехчлена $y^2 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Рассматриваются 5 случаев, соответствующих 5 различным видам кубической кривой K: 1) α, β, γ действительны $\alpha < \beta < \gamma$; 2) α, β, γ действительны $\alpha = \beta < \gamma$; 3) α, β, γ действительны $\alpha < \beta = \gamma$; 4) α, β, γ действительны $\alpha = \beta = \gamma$; 5) уравнение имеет один действительный корень. Все пять случаев совпадают с кривыми, данными Ньютоном и соответственно называются: 1) колоколообразной параболой с овалом; 2) колоколообразной параболой с изолированной точкой; 3) параболой с узлом; 4) параболой с острием и 5) простой колоколообразной параболой.

С. И. Зетель

3133. Обобщение теоремы Бахараха о точках пересечения. Кастелс (Extension d'un theorème de J. Bacharach sur les points d'intersection. Casteels L. Meded. Kon. Vlaamse Acad. Kl. Wetensch., 1954, **16**, № 10, 18 pp.) (датск.; рез. франц.)

Пусть B_p и C_q — фиксированные алгебраические кривые степеней соответственно p и q, пересечение которых состоит из конечного числа точек. Пусть $G(pq - \varepsilon)$ — некоторая группа из $pq - \varepsilon$ различных точек пересечения B_p и C_q. Если $p \leqslant q$ и n — целое число, удовлетворяющее условию $q \leqslant n \leqslant p + q - \varepsilon + 2$, то доказано: 1) Тот факт, что некоторая кривая A_n содержит $G(pq - \varepsilon)$, выражается $pq - \frac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2)$ независимыми условиями на коэффициенты кривой A_n; 2) Каждая кривая A_n, содержащая $G(pq - \varepsilon)$, проходит через все точки пересечения B_p с C_q и имеет вид $A_n = bD_{n-p}B_p + cE_{n-q}C_q$, где b и c — константы. Частный случай, когда пересечение B_p с C_q состоит из pq различных точек, был доказан Бахарахом (Math. Ann., 1885, **26**, 275 — 299, см. стр. 286 — 288). F. J. Terpstra

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 531.

3134. Циклические группы плоских преобразований Жонкьера. Манара (I gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières. Manara Carlo Felice), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, **87**, № 1, 115—129 (итал.)

1. Статья имеет целью классификацию и приведение к каноническому виду циклических (конечных) групп плоских преобразований Жонкьера. Этими вопросами занимались Кантор (S. Kantor), Виман (Wiman) и в новейшее время Тури (T. Turri) (в 1948 г.), однако формулировки недостаточно точны и пропускаются некоторые случаи. В нижеследующем плоское циклическое преобразование Жонкьера будет обозначаться через T, его период — через n; центр пучка инвариантных прямых — через S. Наконец, для данной точки $P_0(x_0, y_0)$ через $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \ldots, P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ будем обозначать точки, полученные из P_0 преобразованиями $T, T^2, \ldots, T^{n-1}$; различные между собой точки $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ образуют цикл преоб-

разования T. Наведенный преобразованием T проективитет в пучке прямых через S обозначим через σ', он будет циклическим периода s ($s = 1$ или $s = n$ или s делит n.).

2. Автор сначала рассматривает случай $s = 1$; с помощью гомографии можно точку S перевести в несобственную точку оси y декартовой системы координат и тогда доказывается: циклическое преобразование Жонкьера периода $n > 2$ с пучком соединенных прямых бирационально идентично с циклической гомологией

$$X_1 = X_0, \quad Y_1 = \varepsilon Y_0$$

и проективно-эквивалентно преобразованию

$$x_1 = x_0,$$
$$\frac{a(x_1)y_1 + b(x_1)}{c(x_1)y_1 + d(x_1)} = \varepsilon \frac{a(x_0)y_0 + b(x_0)}{c(x_0)y_0 + d(x_0)},$$

где $a(x_0)$, $b(x_0)$, $c(x_0)$, $d(x_0)$ — многочлены по аргументу x_0 ε — первообразный корень n-й степени из 1; последняя форма уравнений для T принимается за каноническую. Если же n равно 2, то циклические преобразования Жонкьера с пучком соединенных прямых будут двух типов: преобразование 1-го типа имеет кривую соединенных точек приводимую и является частным случаем преобразования с периодом $n > 2$; преобразования 2-го типа существенно отличны от предыдущих и бирационально эквивалентны преобразованиям вида:

$$x_1 = x_0,$$
$$y_1 y_0 = F(x_0),$$

где $F(x_0)$ — многочлен (эта форма принимается за каноническую).

3. Если период циклического проективитета σ равен s-n, то можно применить классическое рассуждение Нётера (M. Nöther), с помощью которого он доказал фундаментальную теорему о рациональности поверхности, содержащей пучок рациональных кривых; в данном случае такое рассуждение показывает, что существует пучок рациональных кривых, инвариантных относительно T и пересекающих по одной точке прямые пучка S, не считая самой точки S. Таким способом получается предложение: циклическое преобразование Жонкьера периода n, которое на инвариантном пучке прямых S наводит циклический проективитет того же периода n, бирационально эквивалентно преобразованию Жонкьера, имеющему пучок соединенных прямых. В частности, всякое циклическое преобразование Жонкьера периода n равного простому числу, бирационально эквивалентно циклической гомологии периода n.

4. Далее автор рассматривает случай, когда s является собственно делителем n, полагая $n = \nu s$; при этом он в примечаниях заявляет, что случаи, найденные в этом и следующих §§, ускользнули от внимания Тури, в анализе которого доказательства неправильны и утверждения неточны. Здесь σ имеет две различных соединенных прямых, которые проективным преобразованием можно перевести в прямую $x = 0$ и в несобственную прямую в декартовой системе отнесения; если через η обозначить первообразный корень степени s из единицы, то σ изобразится уравнением $x_1 = \eta x_0$. Преобразование $T_1 = T^s$ циклично с периодами ν и оставляет неизменными все прямые пучка S, поэтому подходит под исследования § 2; в частности, на общей прямой $x = x_0$ устанавливается циклический проективитет $\tau_1(x_0)$ периода ν, откуда следует, что T проективитет $\tau_1(x_0)$ на прямой $x = x_0$ переводят в проективитет $\tau_1(x_1)$ на соответствующей прямой, $x = x_1 = \eta x_0$; при этом T соединенные точки проективитета $\tau_1(x_0)$ переводят в соединенные точки проективитета $\tau_1(x_1)$. Далее приходится различать случаи $\nu > 2$ и $\nu = 2$. Пусть сначала $\nu > 2$, тогда, как раньше в § 2, на общей прямой пучка S преобразование $T_1 = T^s$ дает циклический проективитет периода ν, имеющий две различных точки U и V, которые опишут две различных рациональных кривых u и v, уравнения которых могут быть записаны в виде

$$u \equiv ya(x) + b(x) = 0,$$
$$v \equiv yc(x) + d(x) = 0.$$

Что касается преобразования T над кривыми u и v, то может быть: а) каждая из кривых инвариантна относительно T или б) T переводят одну из них в другую. Автор вводит преобразование θ

$$X = x, \quad Y = \frac{ya(x) + b(x)}{yc(x) + d(x)},$$

в случае а) преобразование $\overline{T} = \theta^{-1} T \theta$ изобразится уравнениями

$$X_1 = \tau_1 X_0, \quad Y_1 = \vartheta Y_0,$$

где корень ϑ n-й степени из единицы такой, что ϑ^s есть первообразный корень n-й степени из единицы, автор показывает, что ϑ — постоянное (не зависит от x_0) и притом $\vartheta^s = \varepsilon$. Далее показывается опять с помощью $\overline{T}$, что предположение б) несовместимо с условием $\nu > 2$. Что касается 1-го случая, то с помощью очевидного соотношения $\vartheta^m = \tau_1^{m'}$, где $D(m, m') = 1$, автор показывает, что T и его группа оставляют инвариантной каждую кривую пучка

$$Y^m = \lambda X^{m'};$$

но кривые этого пучка рациональны и некоторым кремоновым преобразованием H переводятся в прямые.

Таким образом, преобразование θH переводит T в преобразование, имеющее пучок соединенных прямых.

5. Исследование случая $\nu = 2$ приводит к результату: циклическое преобразование Жонкьера периода $n = 2s$, наводящее в инвариантном пучке прямых циклический проективитет σ периода s и такое, что T^s имеет неприводимую гиперэллиптическую кривую соединенных точек, должно иметь s нечетным и бирационально эквивалентно преобразованию

$$x_1 = \tau_1 x_0, \quad y_0 y_1 = F(x_0),$$

где τ_1 — первообразный корень степени s из единицы и $F(x_0)$ — многочлен, инвариантный относительно преобразования $x_1 = \tau_1 x_0$.

В заключение для случаев, когда s — собственный делитель n, даются некоторые характеристики этих преобразований T и указываются, когда они бирационально эквивалентны преобразованиям § 2 и когда они им не эквивалентны.

С. С. Бюшгенс

3135. Об эффективном вычислении ассоциированной формы $F(W^{gl}_{\alpha+\beta-n})$ для пересечения двух эффективных чистых циклов U^g_α, V^l_β пространства S_n в виде функции форм $F(U^g_\alpha)$, $F(V^l_\beta)$, относящихся к этим циклам. Заметка I. Гаэта (Sul calcole effettivo della forma associata $F(W^{ge}_{\alpha+\beta-n})$ all'intersezione di due cicli effettivi puri U^g_α, V^l_β di S_n, in funzione delle $F(U^g_\alpha)$, $F(V^l_\beta)$ relative ai cicli secanti. Nota I. Gaeta Federico), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 3, 269—276 (итал.)

Дается выражение формы Чжоу для циклов, распадающихся в сумму линейных пространств, это выражение, как обещает доказать автор в следующей заметке, сохраняет смысл для любых циклов, если его рассматривать как символическое и получающее значение после того, как некоторым группам входящих в него символов придается известный смысл. Далее, воспользовавшись идеей Сегре (Segre B., Proc. London Math. Soc., 1942, **47**, 351 — 403) представления произведения двух проективных пространств размерности n в виде линейчатой модели в $(2n + 1)$-мер

ном проективном пространстве, автор дает символические выражения для формы Чжоу произведения циклов, для некоторого инварианта („интерсеканты"), обращение в нуль которого является необходимым и достаточным условием инцидентности циклов и для формы Чжоу пересечения циклов. В. В. Морозов

3136. О кубических нелинейчатых поверхностях, имеющих с плоскостью вдоль прямой касание второго порядка. Годо (Sur les surfaces cubiques non réglées osculant un plan le long d'une droite. Godeaux Lucien), Mathesis, 1957, **66**, № 1-3, 5—7 (франц.)

Выведены синтетически необходимые и достаточные условия того, чтобы кубическая нелинейчатая поверхность F оскулировала плоскость α вдоль прямой r. Эти условия суть следующие.

1. Поверхность F имеет две двойные бипланарные точки на прямой r (касательные конусы в этих точках вырождаются в пары плоскостей), плоскость α принадлежит обоим касательным конусам в этих точках, или

2. Поверхность F имеет одну двойную бипланарную точку на r, обе касательные в этой точке плоскости проходят через r и одна из них пересекает поверхность по прямой, считаемой трижды, или

3. Поверхность F имеет на прямой r двойную унипланарную точку, касательный конус в которой представляет из себя плоскость α, считаемую дважды, и эта плоскость пересекает поверхность F по прямой r, считаемой трижды. Дано эффективное доказательство существования поверхностей трех указанных разновидностей: установлены их уравнения в проективных координатах.

О. А. Котий

3137. Замечание об инволюции жанра единица, принадлежащей одной поверхности жанра четыре. Годо (Note sur une involution de genres un appartenant à une surface de genre quatre. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 3, 152—158 (франц.)

С новой точки зрения пересматривается построение алгебраической поверхности с жанрами $p_a = P_4 = 1$, проведенное автором ранее (Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1938, **24**, 308—313). В. В. Морозов

3138. Регулярные алгебраические поверхности произвольного геометрического жанра $p_g \geqslant 4$ и линейного жанра $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \ldots, 8p_g + 7$. Заметка I. Бюрниат (Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geqslant 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \cdots, 8p_g + 7$. Nota I. Burniat Pol), Atti Accad. naz. Lincei. Cl. Rend. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 3, 276—281 (итал.).

Применяя неоднократно использованный им метод кратных плоскостей (см., например, РЖМат, 1955, 1931; 1956, 4806, 8266), автор показывает, что для всякого значения геометрического жанра $p_g \geqslant 4$ существуют регулярные поверхности с неприводимой (а при $p^{(1)} \geqslant 3p_g - 6$ даже простой) канонической системой и линейными жанрами $p^{(1)} = 2p_g - 3, \ldots, 4p_g - 3$. В. В. Морозов

3139. Регулярные алгебраические поверхности произвольного геометрического жанра $p_g \geqslant 4$ и линейного жанра $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \ldots, 8p_g + 7$. Заметка II. Бюрниат (Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geqslant 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \cdots, 8p_g + 7$. Nota II. Burniat Pol), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 4, 404—409 (итал.)

Завершение предыдущей заметки (реф. 3138). Устанавливается существование регулярных алгебраических поверхностей указанных линейных жанров при $p_g \geqslant 4$, однако же для некоторых четных значений p_h поверхностей с $p^{(1)} = 8p_g + 2$, возможно, не существует (т. е. их существование не устанавливается). Указываются случаи, когда каноническая система построенной поверхности неприводима и когда она неприводима и проста.

В. В. Морозов

3140. Арифметико-геометрическая теория алгебраических поверхностей. Абельянас (Teoria aritmetico-geometrica de las superficies algebraicas. Abellanas Pedro), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, **17**, № 2-3, 65—149 (исп.)

Развивается бирационально инвариантная и не зависящая от теоремы редукции особенностей теория алгебраических поверхностей. Автор исходит из произвольной (проективной, может быть с особенностями) модели P данной поверхности и строит посредством процесса антипроектирования, описанного в другой работе (РЖМат, 1955, 2837; русский перевод заглавия очень вольный), бесконечную совокупность S моделей той же поверхности. Тогда для заданного простого дивизора D (одномерной валюации поля рациональных функций на поверхности) найдется подмножество $S_D \subset S$ моделей, обладающих тем свойством, что центр D на любой из этих моделей не имеет особенностей. Совокупность таких центров и моделей называется простым циклом, или центром D в S. Также для двух простых дивизоров D, D' существует не пустая совокупность $S_{D,D'}$ моделей ($S_{D,D'} \subset S_D$; $S_{D,D'} \subset S_{D'}$), таких, что центры D и D' в любой модели из $S_{D,D'}$ определяются главными идеалами в соответствующем неоднородном кольце. Аналогичное построение для любых дивизоров. Исходя из этих понятий, оказывается возможным определить пересечение и индекс пересечения циклов, понятия полных линейных систем, жанров и т. д., вплоть до доказательства теоремы Римана—Роха.

В. В. Морозов

3141. О касании третьего порядка двух алгебраических поверхностей вдоль кривой. Галларати (Sul contatto di terz'ordine di due superficie algebriche lungo curve. Gallarati Dionisio), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 195—214 (итал.)

Устанавливаются условия, необходимые для того, чтобы две алгебраические поверхности, принадлежащие неособенному алгебраическому трехмернику, имели касание заданного порядка вдоль не имеющей кратных точек кривой. Подробно рассматривается случай касания третьего порядка двух алгебраических поверхностей в S_3, когда условия эти записываются в форме соотношений между некоторыми числовыми характеристиками исследуемых образов. Разбирается ряд примеров: случай, когда одна из поверхностей — конус четвертого порядка; случай, когда одна из поверхностей — четвертого порядка и на кривой касания не имеется кратных точек ни одной из касающихся поверхностей и др. В приведенных двух примерах устанавливаются общие формы уравнения второй поверхности.

Статья является продолжением более ранних работ автора (РЖМат, 1956, 9036; 1958, 4145) и содержит большую библиографию по вопросам касания алгебраических образов. В. В. Морозов

3142. О касании поверхности и коники. Дифференциальная характеризация римской поверхности Штейнера. Мураккини (Sul contatto fra superficie e coniche. Una caratterizzazione differenziale della superficie romana di Steiner. Muracchini Luigi), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **44**, 331—356 (итал.)

Дарбу (Darboux G., Bull. sci. math., 1880, **4**, 348—384) в связи с исследованием некоторых поверхностей рассматривал отнесенный точке P поверхности Σ конус K_P — огибающую плоскостей, для которых точка P — сестатическая (т. е. пересекающих Σ по кривым, имеющим в P с соответствующей соприкасающейся коникой касание 6-го порядка). Автор исследует те аналитические поверхности Σ, для которых K_P приводим, и получает следую-

щие результаты. Если Σ — не линейчатая, то это — либо римская поверхность Штейнера (см., например, Pascal, Repertorium der höheren Math., Lpz., 1922, II, стр. 872), либо дуальная ей кубика Коррадо Сегре, либо огибающая однопараметрического семейства квадрик, каждая из которых касается Σ по некоторой конике и является для Σ квадрикой Мутара в каждой точке касания. В частности, единственными нелинейчатыми поверхностями, для которых K_P в каждой точке распадается на две или три компоненты класса $\leqslant 6$, являются поверхности двух первых типов. Если же Σ — линейчатая, то это кубика (общая линейчатая кубика или линейчатая кубика Кели).

В. В. Морозов

3143. Простые модели иррегулярных поверхностей с вырожденной канонической системой. Бюрниат (Modèles simples de surfaces irrégulières à système canonique dégénéré. Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 2, 145—152 (франц.)

Рассматривается эллиптический конус 3-го порядка F, p — одна из его образующих, d — некоторая прямая, пересекающая p в точке P. Пусть β_1, β_2 и β_3 — три из четырех плоскостей, касательных к F, проходящих через образующую p, и b — прямая, вдоль которой четвертая касательная плоскость, проходящая через образующую p, касается конуса F.

Пусть φ — конус порядка $2r+1$ с вершиной в точке P, проходящий $2r$ раз через прямую d.

Двойной конус $2F$, порождаемый полным распространением (diramation)

$$E + 2A = (F, \varphi + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3),$$

имеет род — геометрический $p_g = r$, арифметический $p_a = p_g - 1$ и линейный $p^{(1)} = 4p_g - 3$. Его чистая каноническая система составлена с помощью двойной прямой $2b$ рода p_g и p_{g-1} двойных кривых $2C_1$ — рода 2, причем $C_1 = (F, \alpha)$, где α есть плоскость, проходящая через прямую d.

Далее исследуется конус 4-го порядка F, который дважды проходит через прямую p. Пусть β_1 и β_2 — две проходящие через прямую p касательные плоскости к конусу F соответственно вдоль двух образующих b_1 и b_2 и α — переменная плоскость, проходящая через прямую d, инцидентную с прямой p; φ — группа из $2r+2$ плоскостей α.

Двойной конус $2F$ с носителем F, порождаемый кривой полного распространения

$$E + 2A = (F, \varphi + \beta_1 + \beta_2),$$

имеет род: геометрический $p_g = r$, арифметический $p_a = p_g - 2$ и линейный $p^{(1)} = 8p_g - 7$. Его канонические кривые составлены с помощью двойных прямых $2b_1$ и $2b_2$, которые имеют фиксированный род p_g, и с помощью p_{q-1} двойных кривых $2C$ рода 3, $C = (F, \alpha)$. Автор использует свои предыдущие результаты (РЖМат, 1955, 3374; 1956, 7577).

М. П. Черняев

3144. Об арифметически регулярных и арифметически нормальных поверхностях. Маркьонна (Gulle Sunormali. Marchionna Ermanno), Atti Accad. naz. perbicie anitmeticamente regolari ed aritmeticamente Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 1, 24—35 (итал.)

Поверхность F в S_r называется арифметически регулярной (арифметически нормальной), если примали произвольного порядка l высекают на ней регулярную (соответственно полную) систему кривых; для регулярности в обычном смысле ($p_g = p_a$) сохраняется название топологической регулярности. Две поверхности F и F' в S_r называются дополнительными, если в совокупности они представляют полное пересечение $r-2$ прималей порядков $n_1, \ldots, n_{r-2}$. Доказываются две теоремы.

1. Если F и F' дополнительны в S_r, q, q', Δ_e, $\Delta_{e'}$, s_l, s'_l — соответственно их иррегулярности, дефекты и избытки систем, высекаемых на них прималями порядка l и $p = n_1 + \ldots + n_{r-2} - r - 1$, то при $l > p$, $s_l = s_{l'} = \Delta_l = \Delta_{l'} = 0$, при $l = p$, $s_p = s_{p'} = 0$, $\Delta_p = q$, $\Delta_{p'} = q'$ и при $l < p$, $\Delta_l + \Delta'_{p-l} = s_l + s'_{p-l}$.

2. Если F арифметически нормальна и не сингулярна, то для арифметической нормальности ее примсечений необходимо и достаточно, чтобы F' была арифметически нормальной.

В. В. Морозов

3145. Об одном критерии существования односекущего многообразия. Малезани (Su un criterio per l'esistenza di varietà unisecanti. Malesani Paolo), Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, 1953—1954, **3**, 55—66 (итал.; рез. франц.)

Работа является продолжением работ Балдассарри (Baldassari M., Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1950, **19**, 1—43; Rend. Accad. naz. Lincei, 1952, **12**, 390—397). Дается достаточное условие существования односекущего многообразия (м.) для алгебраической ρ-параметрической системы Σ_ρ многообразий V_r^n размерности r (над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0), производящее м. которой содержит s-кратное м. Δ_{r-1}, являющееся полным пересечением V_r^n с некоторым r-мерным м. Если Σ рассматривать, как совокупность специализаций некоторого r-мерного м., заданного над полем алгебраических функций ρ переменных K над k уравнениями $\lambda_{yi} = \chi_i$ $(i = 0, \ldots, d)$, где λ, χ_i — полиномы (неоднородные) от $x_1, \ldots, x_{r+1}$ над K, причем выполняется соотношение $f(x_1, \ldots, x_{r+1}) = 0$ и f — абсолютно неприводимый полином степени n относительно каждого переменного, если затем $F(x_1, \ldots, x_{r+1})$ — другой полином над K степени m, причем пересечение $F = 0$ и $f = 0$ задает Δ_{r-1} (и состоит только из простых точек м. $F = 0$), то упомянутое условие имеет вид $r + 2 - \left\{\left(m + n - \frac{n}{s}\right)^\rho - \left(n - \frac{n}{s}\right)^\rho - \left(m - \frac{n}{s}\right)^\rho\right\} > 0$. Оно оказывается также и необходимым, если V_r и Δ_{r-1} удовлетворяют некоторым условиям общности. При выполнении этого условия систему Σ возможно пресбразовать к более простой форме. Следствием этих результатов являются две теоремы о возможности в некоторых случаях преобразовать форму Φ_{r+p} (место ∞^ρ м. V_r) в аналогичную форму более простого вида. Обзор работ по теории односекущих см. в книге Рота (Roth L., Algebraic Threefolds. Berlin, Springer, 1956).

В. В. Морозов

3146. О теореме Римана — Роха для алгебраических многообразий. Маркьонна (Sul teorema di Riemann—Roch relativo alle varietà algebriche. Marchionna Ermanno), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 4, 396—404 (итал.)

Дается доказательство теоремы Римана—Роха для неособенного алгебраического многообразия в форме, приданной ей Ходжем (РЖМат, 1956, 4800). Доказательство, опирающееся на некоторые результаты Кодаиры (РЖМат, 1955, 4684) и Севери, проводится в духе итальянской школы. Теория связок (faisceaux) не используется.

В. В. Морозов

3147. Аналитические многообразия и алгебраическая геометрия. Шафаревич И. Р., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 233

3148. О пересечениях гиперповерхностей с алгебраическими многообразиями, погруженными в проективное пространство. Нисн, Накаи (On the hypersurface sections of algebraic varieties embedded in a projective space. Nishi Mieo, Nakai Yoshikazu), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, **A29**, № 1, 1—5 (англ.)

Пусть V^n — n-мерное алгебраическое многообразие в N-мерном проективном пространстве L^N и k — общее поле определения для L^N и V^n, H_m — гиперповерхность степени m, $C(H_m)$ — её точка Чжоу и $l(N, m) = \binom{N+m}{N} - 1$ — размерность пространства точек Чжоу всех гиперповерхностей степени m. Доказывается, что для любого натурального числа g пересечение V^n и H_m определено и неприводимо, если $\dim_k C(Hm) \geqslant e(N, m) - g$ для всех достаточно больших m. Отсюда следует, что если U_m — многообразие всех пересечений V^n с различными H_m и W_m — подмногообразие U_m, точкам которого соответствуют приводимые пересечения, то $\dim(U_m) - \dim(W_m) \to \infty$ при $m \to \infty$. В качестве приложения доказывается, что через любое конечное множество точек на V^n проходит подмногообразие $\bar{V}$ любой наперед заданной размерности s, $0 < s < n$, являющееся полным пересечением V^n с гиперповерхностями объемлющего проективного пространства.

И. Р. Шафаревич

3149. Дилатации дифференцируемых многообразий. Cerpe (Dilatazioni di varietà differenziabili. Segre Beniamino), Atti. Accad. naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **22**, № 3, 249—257 (итал.)

Рассматриваются вещественные компактные дифференцируемые класса C^1 многообразия (м.). Показывается, что если U_c, V_d ($c < d$, нижние индексы означают размерности) — два таких м. и $U \subset V$, то им можно однозначно сопоставить два м. U'_{d-1}, V'_d, где $U' \subset V'$ и U' — расслоенное м., слоем которого является проективное пространство S'_{d-c-1}, а базисом U, причем обратный переход к U и V осуществляется отождествлением точек каждого из слоев S'. Преобразование, посредством которого пара U, V заменяется парой U', V', автор называет дилатацией индекса 1. Рассмотрение дилатаций позволяет перенести на рассматриваемые м. введенные ранее для алгебраических м. понятия ковариантных последовательностей вложения канонических последовательностей (РЖМат, 1955, 2369; 1956, 5452) и при посредстве первых решать некоторые вопросы иррегулярных пересечений.

Определяются также дилатации индекса $k+1$; они переводят U в м. размерности $d - (k+1)$ — расслоенное пространство с базисом U, слоем которого является некоторое k-мерное подпространство слоя S'.

Указывается ряд возникающих здесь проблем, одна из которых — сравнительное исследование дилатаций и модификаций Гуггенхеймера (Guggenheimer H., Math. Japon., 1956, **4**, 5—11, 33—47).

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3150. Относительно спиралей в плоскости. Мохат (Concerning spirals in the plane. Mohat John T.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 2, 249—264 (англ.)

В терминах теории спиралей на плоскости, основанной Муром (РЖМат, 1954, 2276), доказывается несколько теорем о спиралях на плоскости, главная из которых следующая:

Пусть R обозначает внутренность прямоугольника $ABCE$ с вертикальной стороной AB. Пусть M есть внутренняя 0-мерная предельная серия, находящаяся в R так, что проекция M на AE есть сегмент AE, и не вертикальная линия содержит две точки из M. Тогда если $A'B'C'E'$ — прямоугольник, существует равномерно непрерывное множество Y взаимно исключающихся дуг и серия точек M', гомеоморфных M, так что:

1) каждая дуга из Y имеет одну конечную точку на сегменте $B'C'$, а другую на $A'E'$ и, за исключением этих точек, лежит внутри прямоугольника $A'B'C'E'$ и навивается только на одну точку;

2) каждая внутренняя точка $A'B'C'E'$ принадлежит дуге из Y;

3) точка P принадлежит M' тогда и только тогда, когда некоторая дуга из Y навивается на P.

Р. М. Гейдельман

3151. Замечания к дифференциальной геометрии кривых в пространстве. Винце (Bemerkungen zur Differentialgeometrie der Raumkurven. Vincze Stefan), Publs mat., 1955, **4**, № 1-2, 61—69 (нем.)

Автор устанавливает зависимость между распределением масс вдоль кривой обычного пространства с дважды непрерывно дифференцируемым параметрическим представлением и векторами кривизны и касательной ее.

Пусть $\mu(s)$ — по отношению к длине дуги дважды непрерывно дифференцируемая функция плотности распределения масс и S — центр масс дуги $\overset{\frown}{Q_1 Q_2}$, S' — центр масс пары точек Q_1 и Q_2, которым соответствуют значения параметра дуги S_1 и S_2, тогда имеет место формула

$$\lim_{S_1, S_2 \to 0} \frac{\overrightarrow{SS'}}{\overset{\frown}{Q_1 Q_2}} = \frac{1}{12}\left(\mathrm{k} + z\frac{\mu'}{\mu}\mathrm{t}\right),$$

где k — означает вектор кривизны в точке $Q(s)$ и t — единичный вектор касательной в этой точке.

Центры масс, принадлежащие всей совокупности частичных дуг кривой, образуют поверхность. Доказывается, что исходная кривая будет асимптотической линией этой поверхности. Далее выводятся два уравнения, которые связывают среднюю или гауссову кривизну в точке поверхности, принадлежащей кривой с кручением и кривизной этой линии. Кроме того, дается формула для площади поверхности, которая опирается на свойства центра тяжести.

O. Varga

3152. Определение касательной к кривой. Флетт (The definition of a tangent to a curve. Flett T. M.), Edinburgh Math. Notes, 1957, № 41, 1—9 (англ.)

В трехмерном евклидовом пространстве дана кривая C уравнениями $x_i = x_i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$; функции $x_i(t)$ — действительные непрерывные на $[a, b]$. Пусть ξ и η ($\xi < \eta$) суть точки кривой C, $d(\xi, \eta)$ — расстояние между этими точками и

$$L_i(\xi, \eta) = \frac{x_i(\eta) - x_i(\xi)}{d(\xi, \eta)} -$$

направляющие косинусы хорды $\xi\eta$. Автор определяет три типа касательных к кривой C: 1) C имеет α-касательную в точке t, если существуют числа $l_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) такие, что когда ξ и η ($\xi < \eta$) стремятся к t, то $L_i(\xi, \eta) \to l_i(t)$. 2) C имеет β-касательную в точке t, если существуют числа $l_i(t)$ — ($i = 1, 2, 3$) такие, что когда $\xi, \eta \to t$, то имеет место или $L_i(\xi, \eta) \to l_i(t)$, или $L_i(\xi, \eta) \to -l_i(t)$. 3) C имеет γ-касательную в точке t, если существуют числа $m_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) такие, что $L_i(\xi, t) \to m_i(t)$, когда $\xi \to t$ ($\xi < t$) и $L_i(t, \eta) \to m_i(t)$, когда $\eta \to t$ ($\eta > t$). Доказывается, в частности что если C имеет в каждой точке α-касательную, то отношение ее дуги к стягивающей хорде стремится к единице и она будет спрямляемой, а α-касательная — непрерывна. Выясняются взаимоотношения между α-, β-, γ-касательными (например, если C имеет β-касательную в t_0, то она имеет там и α-касательную).

К. К. Мокрище

3153. Изгибание поверхностей с сохранением главных кривизн. Гаспарян Сероб, Сб. научн. тр. Ереванск. гос. пед. ин-т, 1955, № 5, 159—188

Рассмотрено изгибание аналитических поверхностей с сохранением средней кривизны. Омбилические точки исключаются. Пусть γ_{ij} — основной метрический тензор по

верхности, H и K — ее средняя и гауссова кривизны, $N = \frac{1}{H^2 - K}$ — величина, обратная гауссовой разности.

Тогда необходимое и достаточное условие изгибаемости поверхности с сохранением главных кривизн состоит в выполнении условия

$$H\{(NH_\alpha)_\beta + (NH_\beta)_\alpha\} = \left\{\frac{1}{2}\gamma^{\lambda\mu}(NK_\lambda)_\mu + 2K\right\}\gamma_{\alpha\beta},$$

где индексы, отделенные запятой, означают ковариантное дифференцирование по отношению к метрике γ_{ij}. Далее получены различные конкретные результаты, относящиеся к изгибаемости с сохранением главных кривизн известных классов поверхностей (поверхности W, развертывающиеся поверхности, поверхности вращения, линейчатые поверхности). В. В. Рыжков

3154. О результатах Фубини об обращении теоремы переместительности Бьянки. Маркус (Sopra i risultati di Fubini sull'inversione del teorema di permutabilità di Bianchi. Marcus F.), Boll. Unione mat.-ital., 1958, **13**, № 2, 189—195 (итал.; рез. англ.)

Результаты, полученные Фубини (Fubini G., Ann. Math., 1940, **41**, № 3) по обращению теоремы переместительности Бьянки, были, как указал сам Фубини, неполными. Автор реферируемой работы доказал соответствующую теорему к 1948 г. (Ann. Math., 1948, **49**, № 3). Именно, если поверхности M однопараметрического семейства поверхностей получаются, как преобразования Лапласа двух фиксированных поверхностей M_1 и M_2, то все конгруэнции (MM_1), (MM_2) суть конгруэнции W. Результат был получен применением метода подвижного репера Картана. В реферируемом сообщении показано, как получить ту же теорему, исходя из результатов Фубини в вышеуказанной работе. В. В. Рыжков

3155. О проблеме изгибания поверхностей, когда сеть асимптотических линий одной поверхности налагается на сеть сопряженных линий другой поверхности. Винченсини (Sur le problème de le transformation par déformation, d'un réseau asymptotique en réseau conjugué. Vincensini P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 9, 928—938 (франц.)

Эта проблема была разрешена Бианки, который показал, как из всякой поверхности с постоянной полной положительной кривизной можно получить пару налагающихся поверхностей таких, что при наложении асимптотическим линиям какой-нибудь одной из этих поверхностей соответствуют сопряженные линии другой поверхности. Этому вопросу автор дает новое геометрическое истолкование с помощью понятия специальных инвариантных сетей поверхностей, связанных с конгруэнциями сфер, и обращая внимание не на пары поверхностей сами по себе, а на их линейные элементы, которые получают инвариантную характеристику. Н. В. Лактанова

3156. О линейчатых поверхностях. Баккес (Sur les surfaces réglées. Backes F.), Mathesis, 1956, **65**, № 4-5, 177—185 (франц.)

Дается конструкция всех линейчатых поверхностей, имеющих одну и ту же линию сжатия и один и тот же параметр распределения. Пусть задана произвольная кривая. В некоторой точке этой кривой проведем произвольную прямую. Эта прямая вращается с мгновенной скоростью $\frac{1}{h}\frac{ds}{dt}$ и образует наиболее общую линейчатую поверхность, для которой данная произвольная кривая является линией сжатия. Здесь s обозначает длину дуги линии сжатия, а h — параметр распределения.

Доказывается, что всякие пары соответствующих образующих линейчатых поверхностей, имеющих данную линию сжатия и данный параметр распределения, образуют постоянный угол.

Далее рассмотрен тот случай, когда линия сжатия является изогональной траекторией образующих (или геодезической) и параметр распределения постоянен. Показано, что эта линия является кривой Бертрана.

Наконец, новым методом доказаны теоремы, ранее полученные Дарбу, Демартром, Бианки. Н. В. Лактанова

3157. Об одном вопросе, относящемся к трижды ортогональным системам. Баккес (Sur une question relative aux systèmes triples orthogonaux. Backes F.), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 2, 63—65 (франц.)

С помощью теоремы Дарбу (Darboux G., Leçons sur les systémes ortogonaux, p. 382.), касающейся степени общности решения некоторой системы уравнений в частных производных первого порядка, автор пишет систему дифференциальных уравнений для триортогональной системы и определяет наиболее общее решение этой системы при заданных начальных значениях. Н. В. Лактанова

3158. Задача о траекториях для поверхностей второго порядка. Мулин И. Г. Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 9—10

Показывается, что в трехмерном евклидовом пространстве E_3 существуют векторные поля, линии тока которых, проходя через произвольную геодезическую E_3, образуют поверхность второго порядка. Такие векторные поля называются дважды геодезическими. Дается обобщение определения дважды геодезических векторных полей на n-мерное пространство R_n. Доказывается, что для произвольной поверхности второго порядка в R_n всегда существует векторное поле, линии тока которого, проходя через искомую геодезическую в R_n, образуют данную поверхность второго порядка, и что всякое векторное поле, линии тока которого образуют поверхность второго порядка, является дважды геодезическим.

Дается решение системы уравнений, определяющее все дважды геодезические векторные поля в E_n.

Н. В. Наумович

3159. О канонических прямых поверхности в проективном трехмерном пространстве. Вала (O kanonických přímkách plochy v projektivním trojrozměrném prostoru. Vala Josef), Sbor. Vysokého učení techn. Brně, 1957, № 1, 43—49 (чешск.; рез. нем.)

Исследуются некоторые свойства канонических прямых, проходящих через точку поверхности в трехмерном проективном пространстве. Геометрическим местом фокусов канонических прямых первого и второго рода служат кривые третьей степени, из которых одна лежит в канонической, а вторая в касательной плоскости к поверхности. Касательные и кривые, вдоль которых соответствующие канонические прямые первого или второго рода образуют развертывающиеся поверхности, определяют линейчатое соответствие, двойными прямыми которого являются первая и вторая канонические касательные, затем касательные, принадлежащие директрисе Вилчинского второго рода, и, наконец, еще две прямые. Геометрическим местом канонических точек является поверхность, касающаяся в соответствующей канонической точке геометрического места фокусов канонических прямых второго рода. K. Svoboda

3160. Об инвариантах проективной дифференциальной теории конгруэнций прямых Фубини. Маркус (Asupra invariantilor din teoria proiectivă diferențială a congruențelor de drepte a lui Fubini. Marcus F.), Gaz. mat. si fiz., 1955, **A7**, № 8, 409—416 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор доказывает относительно конгруэнций прямых следующие предложения. Для сопряженных конгруэнций с той же фокальной поверхностью (преобразование Лапласа) отношение их инвариантов Фубини равно абсолютному инварианту уравнения сетей.

Условие наложимости (проективной) этих двух конгруэнций можно выразить с помощью инвариантов Фубини. Наконец, доказывается, что данные Террачини условия наложимости двух конгруэнций могут быть определены с помощью уравнений, полученных в этой работе.

O. Varga

3161. Конфигурация (θ) Попова. Карапетян С. Е., Сб. науч. тр. Ереванск. гос. пед. ин-т, 1955, № 5, 169—214

Автор определяет конфигурацию (θ), ссылаясь на Попова (без указания литературного источника), следующим образом: замкнутый косой четырехугольник, зависящий от двух параметров, описывает конфигурацию (θ), если: 1) каждая сторона имеет один и только один фокус в вершине четырехугольника, 2) диагонали четырехугольника касаются поверхностей, описанных его вершинами. Конгруэнции, описанные диагоналями, называются основными конгруэнциями (θ), описанные сторонами четырехугольника — вспомогательными. Конфигурация (θ) определяется с произволом двух функций от двух аргументов. Рассмотрены фокальные свойства конфигурации (θ), показано, что для произвольной конгруэнции можно построить с произволом двух функций одного аргумента конфигурацию (θ), для которой она будет служить одной из основных конгруэнций. Исследован случай, когда все вспомогательные конгруэнции — параболические (в этом случае основные конгруэнции суть конгруэнции W) и вспомогательные параболические пары расслояются. Также доказано, что для того чтобы в конфигурации (θ) вспомогательная пара одной основной конгруэнции расслоялась, необходимо и достаточно, чтобы другая основная конгруэнция являлась конгруэнцией W. Во второй главе работы рассматриваются конфигурации (θ) с основными конгруэнциями W вообще и в частных случаях.

В. В. Рыжков

3162. Теория конгруэнций плоскостей в неевклидовых пространствах. Гейдельман Р. М., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 231—233

3163. Гиперболические семейства прямых в биаксиальной геометрии. Петканчин (Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. Петканчин Боян), Годишник Софийск. ун-т. Физ.-матем. фак., 1953—1954, кн. I, ч. I, София, 1954, 33—67 (болг.; рез. нем.)

В гиперболической биаксиальной геометрии трехмерного проективного пространства, абсолютом которой являются две действительные скрещивающиеся прямые (абсолютные прямые) или гиперболическая конгруэнция прямых (абсолютная конгруэнция) строится, основной дифференциально-геометрический аппарат для однопараметрического семейства прямых гиперболического типа.

Осью двух конечных (не пересекающих абсолютные прямые) прямых называется пересекающая их прямая абсолютной конгруэнции. Семейство G конечных прямых $g(t)$ называется гиперболическим, если для достаточно малого h пара прямых $g(t)$ и $g^*=g(t+h)$ имеет две действительные различные оси. При $h\to 0$ предельные положения осей называются узловыми прямыми семейства G, а их пересечение с прямой $g(t)$ — узловыми точками. Узловые прямые и узловые точки связаны с G инвариантно относительно преобразования координатной системы (B-инвариантность), пары определяющих $g(t)$ точек (D-инвариантность), а также параметра t (P-инвариантность). Находятся условия развертываемости G (поверхность касательных). Вводится естественный параметр и инвариантное нормирование узловых точек. В заключение выводятся аналоги формул Френе для рассматриваемого семейства G и определяется геометрический смысл входящих в них инвариантов (РЖМат, 1957, 831). Г. С. Бархин

3164. Однопараметрические семейства изотропных прямых в биаксиальной геометрии. Петканчин (Regelscharen isotroper geraden in der zweiachsigen Geometrie. Petkantschin B.), Изв. Матем. ин-т. Болгар. АН, 1956, **2**, № 1, 69—86 (нем.; рез. болг., русск.)

Аналогично предыдущим работам автора (РЖМат, 1957, 831; реф, 3163) в гиперболическом биаксиальном пространстве исследуются с дифференциально-геометрической точки зрения однопараметрические семейства $G(t)$ изотропных прямых (прямых, пересекающих одну из абсолютных прямых пространства). Прямая $g(t)$ задается двумя основными точками, инвариантно связанными с семейством. Находятся основные деривационные формулы поверхности, отвечающие специальному инвариантному нормированию основных точек и выбору инвариантного параметра.

Г. С. Бархин

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3165. Ступенчатая точка кривой в проективном гиперпространстве. Су Бу-цин, Шусюэ сюэбао, 1954, **4**, № 1, 33—79 (кит.; рез. англ.)

Каждой точке P аналитической кривой Γ проективного n-мерного пространства S_n, заданной уравнениями $x_i = x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, ставится в соответствие совокупность положительных чисел $(\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n)$ таких, что

$$\begin{vmatrix} x_1^{(\alpha_1)} & x_2^{(\alpha_1)} \ldots & x_n^{(\alpha_1)} \\ x_1^{(\alpha_1+\alpha_2)} & x_2^{(\alpha_1+\alpha_2)} \ldots & x_n^{(\alpha_1+\alpha_2)} \\ x^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} & \ldots & x_n^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в точке } P,$$

здесь $x_i^{(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)} = \dfrac{d^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}x}{dt^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}}$ $\quad (i, k, =1, 2, \ldots, n)$.

Совокупность чисел $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ называется типом точки P. Исследуется случай, когда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1, \ldots, \alpha_{s-1}=1$, $\alpha_s=2$, $\alpha_{s+1}=1, \ldots, \alpha_n = 1$.

С точкой P указанного типа, в которой определены соприкасающиеся пространства различных порядков $S_1(P)$, $S_2(P), \ldots, S_{n-1}(P)$, можно связать $(n-s+1)!$ канонических пирамид $\{P\,P_1\,P_2 \ldots P_n\}$, где точка $P_i (i=1, 2, \ldots, n-1)$ находится в соприкасающемся пространстве $S_i(P)$, причем положение точек $P_1, \ldots, P_s$ определяется однозначно, а для точек P_m $(m=s+1, \ldots, n)$ определяется $m-s+1$ возможных положений.

В работе исследуется, какой вид принимают уравнения кривой Γ в окрестности точки P при совмещении вершин репера, к которому отнесена кривая, с вершинами канонической пирамиды.

Н. Б. Шенфельд

3166. Свойства поверхностей в пространствах 4 и 5 измерений в отношении к квадрикам. Ваккаро (Proprietà delle superficie degli spazi a 4 e 5 dimensioni in relazione a quadriche. Vaccaro Giuseppe), Rend. mat. e applic., 1955, **13**, № 3-4, 249—269 (итал.)

Из общей точки O поверхности F пространства S_4 выходит, в общем случае, 5 окружностей, имеющих в точке O касание третьего порядка с F. Однако, преобразуя F при помощи подходящей коллинеации, можно добиться того, чтобы существовала окружность, касающаяся в точке O произвольной касательной к F (этот последний результат автор выражает другим, но эквивалентным образом). Из общей точки O поверхности F пространства S_5 выходит, в общем случае, 5 плоскостей, содержащих кривую, имеющую в точке O касание третьего порядка с F.

E. Čech

3167. Конгруэнции прямых пятимерного проективного пространства. Швец (Les congruences de droites dans S_5 Švec Alois), Spisy vyd. přírodověd fak. Masarykovy univ., 1957, № 2, 87—100 (франц.; рез. русск.)

Автор рассматривает конгруэнции прямых — специальный класс двупараметрических семейств, обладающих двумя семействами развертывающихся поверхностей, — в пятимерном проективном пространстве P_5.

Как известно, конгруэнции прямых касаются двух поверхностей, называемых фокальными, соприкасающееся пространство каждой из которых четырехмерное. Автор специализирует репер, присоединенный к прямой конгруэнции, помещая точки A_1 и A_2 в фокусы прямой, точки A_3 и A_4 на касательных к сопряженным линиям фокальных поверхностей (A_1) и (A_2), точки A_5 и A_6 в соприкасающиеся гиперплоскости поверхностей (A_1) и (A_2). Тогда деривационные уравнения элементов этого репера имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

причем

$$\omega_1^4 = \omega_1^5 = \omega_1^6 = \omega_2^3 = \omega_2^5 = \omega_2^6 = 0;$$

$$\omega_1^2 = \alpha_1 \omega_2^4; \quad \omega_2^1 = \alpha_2 \omega_1^3; \quad \omega_3^4 = 0; \quad \omega_3^5 = \omega_1^3; \quad \omega_3^6 = 0;$$

$$\omega_4^3 = 0; \quad \omega_4^5 = 0; \quad \omega_4^6 = \omega_2^4; \quad \omega_5^6 = \beta_2 \omega_1^3; \quad \omega_6^5 = \beta_1 \omega_2^4$$

(автор пользуется менее удачной системой обозначений).

Трехмерная плоскость $[A_1A_2A_3A_4]$, по которой пересекаются соприкасающиеся гиперплоскости фокальных поверхностей $E_5 = [A_1A_2A_3A_4A_6]$ и $E_6 = -[A_1A_2A_3A_4A_5]$, опишет двупараметрическое семейство, называемое автором дуализацией конгруэнции прямых $[A_1A_2]$. Из деривационных уравнений тангенциального репера получаем:

$$dE_5 = -\omega_5^5 E_5 - \beta_1 \omega_2^4 E_6 - \omega_1^3 E_3;$$

$$dE_6 = -\beta_2 \omega_1^3 E_5 - \omega_6^6 E_6 - \omega_2^4 E_4.$$

Чехом была введена следующая квадратичная дифференциальная форма конгруэнции:

$$\varphi = \alpha_1 \alpha_2 \omega_1^3 \omega_2^4.$$

Автор вводит двойственную дифференциальную квадратичную форму

$$\varphi^* = \beta_1 \beta_2 \omega_1^3 \omega_2^4.$$

Инвариант $J = \dfrac{\varphi}{\varphi^*} = \dfrac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2}$ является обобщением инварианта Вэльша для конгруэнций в трехмерном проективном пространстве. Рассматривается проблема разыскания конгруэнций по данным формам φ и φ^*.

Далее ставится задача проективного «двуизгибания» конгруэнции — наложимости порядка два по Картану самой конгруэнции и ее дуализации.

Пары конгруэнций прямых, допускающих такое «двуизгибание», существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Работа выполнена методом внешних форм.

Р. М. Гейдельман

3168. Кривые в n-мерном пространстве с вырожденным абсолютом. Крейцер Г. П., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, 7, 165—171

Рассматривается теория кривых в n-мерном пространстве Кели-Клейна, абсолют которого задается $(n-1)$-мерной гиперплоскостью n-мерного проективного пространства с взятой в ней $(n-2)$-мерной плоскостью, с взятой в последней $(n-3)$-мерной плоскостью и т. д., вплоть до точки, принадлежащей всем входящим в состав абсолюта плоскостям.

Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе рассматривается векторная алгебра, в частности, определяется инвариантное произведение k векторов $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Во втором — выписываются „формулы Френе" и вычислительные формулы для кривизн кривой. В третьем параграфе находятся кривые постоянных кривизн и кривые, несколько первых кривизн которых постоянны.

Н. М. Макарова

3169. Об основаниях аффинной дифференциальной геометрии. Грёуб, Неванлинна (Zur Grundlegung der affinen Differentialgeometrie. Graeub Werner, Nevanlinna Rolf. Suomalais. tiedeakat. totimituks., 1956, Ser. A-I, № 224, 23 S.) (нем.)

В работе следующим образом вводится параллельное перенесение векторов вдоль кривых на дифференцируемом многообразии M_n.

К каждому ориентированному кусочно-гладкому пути l на M_n присоединяется регулярное линейное преобразование T_l(Selbsttransformation) касательного пространства к многообразию M_n в начальной точке пути в касательное пространство к многообразию M_n в конечной точке пути, которое обладает свойствами:

A. Для произведения l_2l_1 двух путей l_1 и l_2

$$T_{l_2 l_1} = T_{l_2} T_{l_1}.$$

B. Для двух взаимно обратных путей l и l^{-1} $T_l T_{l^{-1}} = T_{l^{-1}} T_l = E$ (тождественное преобразование).

C. Если l — путь в окрестности $U \subset M_n$ и l_x — соответствующий путь в окрестности U_x параметрического пространства L_x, то существует независимое от l конечное число $\sigma > 0$ такое, что $|T_l - E| < \sigma |l|$ (здесь $|l| = |l_x|$ и норма $|T_l - E|$ преобразования $T_l - E$ определяются относительно произвольно выбранной метрики в L_x).

Пусть l есть путь на M_n с начальной точкой p_1 и конечной точкой p_2 и пусть u_1 и u_2 — контравариантные векторы соответственно в p_1 и p_2.

Если $u_2 = Tu_1$, то говорят, что вектор u_2 получен из вектора u_1 параллельным перенесением вдоль кривой l.

Рассматриваются условия, при которых параллельное перенесение вектора не зависит от пути. Через точку p_0 на M_n проводится двумерная непрерывно дифференцируемая поверхность, для которой вводится двумерное линейное параметрическое пространство L_t^2 с евклидовой метрикой. Пусть s_t — треугольник в L_t^2 с площадью Δ и наибольшей стороной ρ. Однозначное, непрерывно дифференцируемое отображение $f(s_t)$ определяет 2-симплекс s на M_n.

Рассматривается множество всех регулярных 2-симплексов, содержащих точку p_0, через T_γ обозначается оператор переноса по границе γ симплекса s и дается определение: говорят, что многообразие M_n имеет кривизну нуль в p_0, если $T_\gamma = E + \Delta(\rho)$, где (ρ) есть преобразование пространства L_x, норма которого (измеренная относительно произвольной евклидовой метрики в касательном пространстве L) стремится к нулю при стремлении к нулю ρ.

Доказывается, что для каждого замкнутого пути γ в окрестности U многообразия M_n преобразование $T_\gamma = E$ тогда и только тогда, когда кривизна многообразия M_n в каждой точке окрестности U равна нулю.

Прямым определением вводится тензор кривизны R. Пусть t_1, t_2 и t_3 — угловые точки треугольника s_t и $a = t_2 - t_1$, $b = t_3 - t_1$. Тогда $\Delta = \lambda Dab$, где Dab — произвольная альтернированная билинейная форма, тождествен-

но не равная нулю, и λ — нормирующий множитель. Пусть существует предел

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{T_\gamma - E}{\Delta} = F(p_0).$$

Оператор $R(p_0)$ определяется из условия $^1/_2\, DabF(p_0) = R(p_0)\, ab$.

Из предположения, что $R(p_0)$ не зависит от выбора отображения f, следует: $R(p_0)$ есть тензор, трижды ковариантный и один раз контравариантный.

Далее, условия A, B и C, определяющие параллельное перенесение, выражаются аналитически, определяется объект аффинной связности Γ, находятся дифференциальное уравнение параллельного перенесения и выражение тензора кривизны R через Γ, вводится ковариантное дифференцирование. Н. Б. Шенфельд

3170. О геометрии гиперповерхности пространства аффинной связности. Измайлов В. Д., Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 3—22

Подробное изложение результатов автора по определению внутренним образом оснащения гиперповерхности в пространстве аффинной связности, ранее опубликованных без доказательств (РЖМат, 1957, 4337). А. Е. Либер

3171. Дифференциальные свойства дуги порядка $n+1$ в конформном n-мерном пространстве. Лейн (Differentiability properties of arcs of order $n+1$ in conformal n-space. Lane N. D.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1957, Sec. 3, **51**, Juné, 45—53 (англ.)

Статья является продолжением исследований автора (РЖМат, 1957, 3505; 1958, 3265). Точнее, в реферируемой статье автор обобщает предложения, доказанные в первой из вышеуказанных статей, намногомерный случай ($n>2$).

Автор вводит следующие определения, которые можно высказать следующим образом, если воспользоваться обозначениями автора (см., например, РЖМат, 1958, 3265): Дуга n-мерного пространства M_n имеет конечный порядок, если она имеет конечное число общих точек с любой $n-1$-сферой, а верхняя грань этих чисел называется конформным порядком данной дуги. Дуга A называется сильно дифференцируемой в точке p дуги A, если m—сфера $S^m(P_1,\ldots,P_{m+1-r};\ t_1,\ldots,t_j;\ \tau_{r-j})$ сходится к сфере $S^m(P_1,\ldots,P_{m+1-r};\ \tau_r)$, когда точки $t_1,\ldots,\ t_j$ дуги A сходятся к P. Основные результаты статьи: 1) Пусть p есть концевая точка дуги A конечного порядка. Тогда A автоматически дифференцируема в p; 2) Если p есть концевая точка дуги A_{n+1} порядка $n+1$, то A_{n+1} автоматически сильно дифференцируема в p. Автор отмечает, что вспомогательные теоремы, доказанные в §3 статьи конформными средствами, в конформном пространстве M_n могут быть также доказаны в проективном пространстве Π_{n+1} при помощи центральной проекции, если воспользоваться перенесением Дарбу. В. И. Ведерников

3172. Конформно-евклидовы V_n в E_{n+1}. Вербицкий Л. Л., Тр. 3-го Всес. Матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 145

3173. Некомпактные симметрические пространства. Берже (Les espaces symétriques non compacts. Berger Marcel), Ann. scient. Écol e norm. supér., 1957, **64**, № 2, 85—177 (франц.)

Работа состоит из шести глав. В гл. I приведены основные определения. Под симметрическим пространством понимается однородное пространство G/H, для которого H состоит из неподвижных элементов инволютивного автоморфизма Σ. Локальное симметрическое пространство (E.L.S.) g/h определяется соответствующими алгебрами g и h; g имеет каноническое разложение $g=h+m$, где m состоит из антиинвариантных элементов инволютивного автоморфизма σ, индуцированного в g автоморфизмом Σ. Пространство G/H обладает канонической аффинной связностью, для которой тензор кручения и ковариантная производная тензора кривизны равны нулю. G/H называется неприводимым, если неприводимо присоединенное представление h в m: $(ad(h),m)$. Симметрическое пространство G/H (соответственно E.L.S. g/h) называется C-симметрическим, если существует комплексная структура векторного пространства m, инвариантная относительно линейного представления $(ad(H), m)$ (соответственно $(ad(h),m)$).

C-симметрическое пространство G/H (соответственно g/h) называется полукелеровым, если представление $(ad(H),m)$ (соответственно $(ad(h),m)$) оставляет инвариантной некоторую невырожденную эрмитову форму произвольной сигнатуры.

В гл. II и III определены все неприводимые E.L.S. В гл. IV приведены все E.L.S. с простыми вещественными фундаментальными группами, причем указано, какие из них являются неприводимыми, C-симметрическими и полукелеровыми. В гл. V рассматривается вопрос о переходе от E.L.S. к симметрическим пространствам.

Теорема. Пусть σ—инволютивный автоморфизм g, G^*—односвязная группа Ли алгебры g и Σ^*—инволютивный автоморфизм G^*, определяемый автоморфизмом σ. Пусть G—какая-либо группа алгебры g, определенная как G^*/Z_G, где Z_G—дискретная подгруппа центра Z группы G^*. Для того чтобы автоморфизм σ алгебры g определял автоморфизм Σ_G группы G, необходимо и достаточно, чтобы Σ^* оставлял Z_G инвариантной. Следующие две теоремы выясняют структуру произвольного симметрического пространства с полупростой фундаментальной группой.

Теорема 1. Пусть G/H — симметрическое пространство с полупростой G, определяемое инволютивным автоморфизмом Σ. Существует разложение $G=K\cdot N$, где K—максимальная компактная подгруппа G, а N—подмногообразие G, гомеоморфное вещественному векторному пространству, инвариантное относительно Σ: $\Sigma(K)=K$ и $\Sigma(N)=N$. Существует также подчиненное разложение $H=C\cdot E$ группы изотропии H, где C—группа изотропии симметрического пространства K/C, порожденного автоморфизмом Σ в K и E—векторное подпространство пространства N. Если через H_0 (соответственно C_0) обозначить связную компоненту нейтрального элемента H (соответственно C), то C_0 будет максимальной компактной подгруппой H. Подгруппа изотропии H всегда состоит из конечного числа связных компонент.

Теорема 2. Пусть G/H—симметрическое пространство с полупростой G и $G=K\cdot N$ и $H=C\cdot E$—разложения, указанные в теореме 1. Тогда G/H является расслоенным пространством с слоем F, гомеоморфным вещественному векторному пространству, и базой K/C. Группа K действует в пространстве слоев транзитивно.

Теорема. Пусть G/H—симметрическое пространство с полупростой G и соответствующее E.L.S. g/h является полукелеровым. Для того чтобы G/H также было полукелеровым, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее компактное симметрическое пространство K/C (введенное в теореме 1) было келеровым.

В гл. VI выясняется, что некоторые свойства симметрических пространств с полупростыми фундаментальными группами остаются справедливыми и для пространств с неполупростыми фундаментальными группами.

А. С. Феденко

3174. К теории симметрических пространств ранга 1. Розенфельд (Asupra teoriei spatiilor simetrice de rang 1. Rozenfeld B. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1958, **12**, № 1, 19—27 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1959, 1956).

3175. Образы симметрии на плоскостях комплексного, двойного и дуального переменного. Розенфельд Б. А., Белкин И. Г., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, **7**, 93—112

В статье найдены все образы симметрии — геометрические места точек, остающихся неподвижными при инволюционных преобразованиях фундаментальной группы — на плоскости комплексного переменного, на плоскости двойного переменного $z = x + ey$ ($e^2 = +1$) и на плоскости дуального переменного $z = x + \varepsilon y$ ($\varepsilon^2 = 0$). Фундаментальной группой на этих плоскостях считается группа дробно-линейных преобразований

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{и} \quad w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Для взаимной однозначности этих преобразований плоскость комплексного переменного пополняется одной бесконечно удаленной точкой, а плоскости двойного и дуального переменного — бесконечно удаленной точкой и идеальными точками, изображающими обратные элементы для делителей нуля. На этих плоскостях вводится метрический инвариант двух точек z_1 и z_2 — модуль их разности $|z_1 - z_2|$. На расширенной вышеуказанным способом плоскости комплексного переменного имеются два вида образов симметрии: пары точек (в частности, и такие пары, у которых одна из точек — бесконечно удаленная) и окружности (в частности, прямые). На расширенной вышеуказанным способом плоскости двойного переменного имеются три вида образов симметрии: пары точек (одна из которых может быть бесконечно удаленной или идеальной); окружности (в частности, прямые) и пары изотропных прямых (в частности, идеальные). На расширенной плоскости дуального переменного имеются три вида образов симметрии: пары точек, пары изотропных прямых с определенным центром инверсии и орициклы (в частности, неизотропные прямые). Кроме перечисленных действительных образов симметрии, эти плоскости обладают еще и мнимыми, а именно, плоскость комплексного переменного — мнимыми окружностями; плоскость двойного переменного — 1) парами мнимо сопряженных точек вместе с ассоциированными с ними парами точек; 2) мнимо сопряженными ассоциированными парами точек и 3) парами мнимых изотропных прямых; плоскость дуального переменного — парами мнимых точек и парами мнимых изотропных прямых с определенными центрами инверсии.

Как известно, геометрии многообразий окружностей и прямых плоскостей комплексного и двойного переменного, многообразий орициклов и неизотропных прямых плоскости дуального переменного тесно связаны с точечными геометриями трехмерных неевклидовых пространств ${}^1S_3$, ${}^2S_3$ и трехмерного псевдоевклидова пространства ${}^1R_3$, так как их фундаментальные группы изоморфны, а указанные многообразия изометричны этим пространствам. Исходя из этой связи, устанавливается соответствие рассмотренных образов симметрии на плоскостях комплексного, двойного и дуального переменного с образами симметрии трехмерных неевклидовых и псевдоевклидовых пространств. Р. М. Гейдельман

3176. Изометрические преобразования семейства гиперповерхностей. Алда В., Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 2, 195—211 (рез. франц.)

Пусть в евклидовом n-мерном пространстве дано однопараметрическое семейство S поверхностей Σ. Изучаются такие соответствия этого пространства с другим n-мерным евклидовым пространством, которые преобразуют изометрически каждую гиперповерхность Σ и которые в то же время переводят ортогональные траектории семейства S в ортогональные траектории преобразованного семейства S'. Возможны случаи:

1) S (как и S') есть семейство гиперплоскостей. Соответствие дается посредством произвольного точечного соответствия между двумя кривыми (взятыми по одной в каждом пространстве; семейства S и S' состоят из нормальных плоскостей к этим кривым) и однопараметрического семейства ортогональных преобразований (для каждой пары соответствующих гиперплоскостей определяется свое ортогональное преобразование).

2) Каждое из двух пространств есть декартово произведение пространств 2-мерного и $(n-2)$-мерного. Между $(n-2)$-мерными пространствами берется фиксированное ортогональное преобразование, а соответствие между 2-мерными пространствами есть соответствие рассматриваемого типа, зависящее от одной функции двух аргументов. Обратно, из двух таких преобразований всегда можно составить преобразование рассматриваемого типа.

3) Для $n = 3$ приходим к соответствию между двумя такими конгруэнциями, у каждой из которых развертывающиеся поверхности одного семейства суть плоскости и прямые конгруэнции на каждой такой плоскости параллельны. Соответствие есть огибающая однопараметрического семейства аффинных преобразований специального вида. В другом случае для $n = 3$ искомое соответствие есть также соответствие между двумя конгруэнциями, которые и здесь не могут быть конгруэнциями общего вида. Получено необходимое и достаточное условие того, чтобы конгруэнция нормалей поверхности допускала такое преобразование. В. Т. Базылев

3177. Об изгибаемости многообразий, погруженных в пространство Римана. Дольбо-Лемуан (Sur la déformabilité des variétés plongées dans un espace de Riemann. Dolbeault-Lemoine Simone), Ann. scient. École norm. supér., 1956, **73**, № 4, 357—438 (франц.)

Работа посвящена вопросу об изгибании подмногообразий V_{n-1} локально евклидова многообразия или риманова многообразия постоянной кривизны V_n. Изгибание понимается в локальном смысле, но даются приложения к глобальному изучению локально изгибаемых многообразий. Метрика V_{n-1} должна индуцироваться метрикой объемлющего V_n. В первой главе рассматривается случай локально евклидова V_n. Изгибания классифицируются также, как у Картана, на три типа: 1) регулярные изгибания, 2) изгибания с сохранением одного асимптотического направления, 3) изгибания с сохранением пары сопряженных направлений. В первом случае показывается локальная приводимость изгибаемого V_{n-1} ($n > 3$), во втором устанавливается, в частности, вещественность сохраняющегося асимптотического направления, и, как следствие, утверждение о том, что всякое локально изгибаемое с сохранением асимптотического направления полное многообразие V_{n-1} имеет бесконечно удаленную область. Как в случае 1), так и в случае 2) приведены возможные формы линейного элемента V_{n-1} и сформулированы условия локальной изгибаемости. Во второй главе рассматривается случай 3), т. е. изгибание с сохранением пары различных сопряженных направлений. Получены формы линейного элемента, приведены условия изгибаемости. При $n > 3$ показано существование локально изгибаемых с сохранением пары сопряженных направлений V_{n-1}, для которых эти направления образуют произвольный постоянный угол. Отдельно рассмотрены случай изотропных сопряженных направлений и случай главных направлений. В третьей главе V_n уже предполагается многообразием постоянной ненулевой кривизны. Исследуя уравнения Гаусса — Кодацци для погруженного V_{n-1}, автор приходит к выводу, что регулярное изгибание V_{n-1} невозможно при $n \geqslant 5$, изгибание типа 2) невозможно при $n > 3$, а изгибание типа 3) при $n \geqslant 5$. Специально изучается случай $n = 4$. Последняя гл. 4 посвящена приложениям к глобальной теории V_{n-1} в V_n. Приведем некоторые из полученных здесь результатов. В четырехмерной сфере любое локально изгибаемое полное V_{n-1} содержит противоположную для каждой из своих точек. В односвязном полном V_n, евклидовом ($n > 3$) или гиперболическом ($n = 4$) полное локально изгибаемое V_{n-1} имеет область в бесконечности. Дальнейшие результаты касаются приводимости V_{n-1}. В частности: в евклидовом R_n един-

ственные локальны изгибаемые и полные в метрике, индуцированной погружением V_{n-1}, суть а) приводимые многообразия, гомеоморфные $V_2 \times R_{n-2}$, б) многообразия, изгибаемые с сохранением в каждой точке асимптотического направления. В. В. Рыжков

3178. О нормальности в пространствах Минковского. Насу (On the normality in Minkowskian spaces. Nasu Yasuo), Kumamoto J. Sci., 1954, **A2**, № 1, 11—17 (англ.)

Понятие нормальности в пространствах Минковского в смысле референта (Comment. math. helv., 1950, **24**, 156 — 187) аналитически трактуется при определенных гипотезах дифференцируемости. Это было ранее дано Бартелем и автор, пользуясь методами Бартеля, пополняет его результаты, рассматривая случай, пропущенный Бартелем. Автор также кратко доказывает теорему референта. Но референту кажется, что доказательство автора проще только потому, что оно не оправдывает принципиального шага, который состоит, грубо говоря, в перестановке выпуклости и интегрируемости. H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 524.

3179. Метрические свойства различных угловых мер в пространстве Минковского и Финслера. I. Липман (Metrische Eigenschaften verschiedener Winkelmaße im Minkowski-und Finslerraum. I. Lippmann Horst), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 2, 223—230; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 223—230 (нем.)

Если в n-мерном евклидовом векторном пространстве E^n задана функция $F(x)$ (для любых $x \neq 0$) класса C^2, обладающая свойствами:

1) $F(x)>0$, для $x \neq 0$,

2) $F(kx) = |k|F(x)$ (k— вещественное число),

3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} F(x) y^i y^j = F_{ij} y^i y^j > 0$ (x, y линейно независимы),

при помощи которой определяется в E^n новое расстояние

$$xy = F(x - y),$$

то E^n называется пространством Минковского (M^n).

Если с каждой точкой p многообразия φ^n в смысле Веблена — Уайтхеда связано касательное пространство Минковского M_p^n, то φ^n называется пространством Финслера.

В работе аналитически определены следующие функции:

$$g(x,y) = \frac{1}{2} F\left(\frac{x}{F(x)} - \frac{y}{F(y)}\right), \quad \alpha(x,y) = 2\arcsin g(x,y),$$

$G(x,y) = \sin\alpha(x,y)$. Пусть $X(s)$, $Y(t)$ $(0 \leqslant s,t$; $X(0) = Y(0) = P$; $\overset{\circ}{X}(0) \neq 0$, $\overset{\circ}{Y}(0) \neq 0)$ — две непрерывно дифференцируемые кривые, исходящие из одной точки $P \in \varphi^n$. В работе доказано, что если s и t выбраны так, что $PX(s) = PY(t)$, то

$$\lim \frac{L}{\rho} = 2g(\overset{\circ}{X}(0), \overset{\circ}{Y}(0)),$$

где $L = X(s)Y(t)$. Из этого соотношения следует метрическое определение функции g, α и G. В. И. Близникас

3180. Метрические свойства различных угловых мер в пространстве Минковского и Финслера. II. Липман (Metrische Eigenschaften verschiedener Winkelmaße im Minkowski-und Finslerraum. II. Lippmann Horst), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1958, **A61**, № 2, 231—238; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 231—238 (нем.)

Часть I (см. реф. 3179.)

Угол $w(x,y)$ между двумя направлениями λx, μy ($\lambda > 0$, $\mu > 0$) пространства Минковского M^n определяется следующим образом (в смысле Финслера — Каратеодори):

$$\cos w(x,y) = (x,y) \quad 0 \leqslant w \leqslant \pi,$$

где

$$(x,y) = \frac{x^i F_i(y)}{F(x)} \quad (x,y \neq 0).$$

Пусть x, y — линейно независимые векторы пространства M^n, определяющие плоскость E, которая на индикатрисе $F(x) = 1$ этого пространства высекает поверхность, площадь которой равняется $f(x,y)$; пусть $r(x)$, $r(y)$ — радиусы-векторы индикатрисы, соответствующие направлениям x, y, а $\sin(x, y)$ — синус евклидова угла между этими направлениями. По Буземану угол между двумя линейно независимыми направлениями x, y определяется следующим образом:

$$\sin(x,y) = \sin(x,y) \frac{\pi r(x) r(y)}{f(x,y)}.$$

Определение функций $g(x,y)$, $G(x,y)$ и $\alpha(x,y)$ дано в первой части работы автора (реф. 3179).

Пусть M — множество направлений пространства M^n. В работе автор доказал, что функции $g(x,y)$, $G(x,y)$, $\alpha(x,y)$, $w(x,y)$ и $\sin(x,y)$ являются функциями расстояния множества M и что:

1) M является метрическим пространством в смысле Фреше, если в качестве функции расстояния (ф. р.) возьмем $g(x,y)$;

2) M является ограничено почти метрическим пространством в смысле Менгера, если в качестве ф. р. возьмем $\alpha(x,y)$;

3) M является почти метрическим пространством в смысле Менгера, если в качестве ф. р. взять $w(x,y)$;

4) M является пространством расстояния в смысле Менгера, если в качестве ф. р. взят $\sin(x,y)$. Так как любые два направления множества M можно соединить спрямляемой кривой, лежащей на индикатрисе, то во всех этих пространствах (1 — 4) существуют соответствующие внутренние метрики в смысле А. Д. Александрова. Библ. 16 назв. В. И. Близникас

3181. Трехмерное пространство с кубической полуметрикой. Ермаков Ю. И., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 6, 1070—1073

Пусть $F_3^{(3)}$ — трехмерное пространство Финслера, метрика которого задана с помощью кубической дифференциальной формы

$$ds^3 = a_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3)$$

с отличным от нуля дискриминантом. Пользуясь методом А. Е. Либера (Либер А. Е., Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1952, **9**, 319 — 350). Тоноока построил для $F_3^{(3)}$ линейную аффинную связность (РЖМат, 1957, 8913). Автор строит для $F_3^{(3)}$ связность, инвариантную относительно конформного преобразования метрики. Если конформное преобразование метрики в $F_3^{(3)}$ определяется соотношением

$$^*a_{\alpha\beta\gamma} = \sigma a_{\alpha\beta\gamma},$$

то коэффициенты линейной аффинной связности преобразуются следующим образом:

$$^*\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \frac{1}{3}\sigma_\nu \delta^\lambda_\mu, \qquad \sigma_\nu = \frac{\partial \nu \sigma}{\sigma}. \qquad (1$$

Если $S^\lambda_{\nu\mu}$ — тензор кручения связности, то при преобразовании (1) $S^\lambda_{\nu\mu}$ преобразуется так:

$$^*S^\lambda_{\nu\mu} = S^\lambda_{\nu\mu} + \frac{1}{3}\sigma_{[\nu}\delta^\lambda_{\mu]}. \qquad (2$$

Свертывая (2) по индексам λ, μ, умножая затем результат свертывания на δ^{ν}_{μ} и вычитая полученное из (1), имеем

$$*\Gamma^{(k)\lambda}_{\nu\mu} = \Gamma^{(k)\lambda}_{\nu\mu},$$

где

$$\Gamma^{(k)\lambda}_{\nu\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - S_{\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}, \qquad S_{\nu} = S^{\omega}_{\nu\omega}.$$

Связность $\Gamma^{(k)\lambda}_{\nu\mu}$ инварианта относительно конформного преобразования метрики. В работе найдены необходимые и достаточные признаки для того, чтобы: 1) $F_3^{(3)}$ было пространством Минковского; 2) $F_3^{(3)}$ было конформно-плоским пространством. Рассмотрены некоторые вопросы дифференциальной геометрии пространства x_3 с заданным полем симметрического ковариантного псевдотензора третьей валентности, дискриминант которого отличен от нуля (пространство $\mathfrak{F}_3^{(3)}$). В. И. Близникас

3182. Связности в финслеровых пространствах. Кретер (Zusammenhänge in Finslerschen Räumen. Kreter Reinhold), Wiss. Z. Humboldt—Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 4, 353—365 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Автор дает определение и приводит краткие выводы связностей Картана (Cartan E., Les espaces de Finsler, 1934), Бервальда (Berwald L., Math. Z. 1926, **25**, 40—73), Синга (Synge J. L., Trans. Amer. Math. Soc. 1925, **27**, 61—67), Тейлора (Taylor J.H., Trans. Amer. Math. Soc. 1925, **27**, 246—264), Бартеля (РЖМат, 1955, 3401) и Рунда (Rund H., Math. Z., 1951, **54**, 115—128) пространства Финслера. Автор устанавливает историческую и математическую связь между указанными связностями, а также показывает, что картановская связность есть самая общая связность в том смысле, что она определяет параллельное смещение векторов, зависящих от направления и от координат. Рассматриваются тензоры кривизны Картана и Рунда.

Примечание референта. В работе дан далеко не полный перечень связностей финслеровых пространств. Например, в работе не рассматривается связность Чжэнь Шэн-шэня (Chern S. S., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1943, **29**, 33—37), которая включает в себя связность Картана. В. И. Близникас

3183. Проективные группы движений. I. Вагнер (Projektive Bewegungsgruppen. I. Wagner Richard), Math. Ann., 1958, **134**, № 4, 308—335 (нем.)

В этой первой части работы рассматриваются вспомогательные средства, необходимые для определения групп движений. Направляющим элементом $s(H^0, H^1, \ldots, H^{n-1})$ проективного пространства P^n называется система подпространств $H^0 \subset H^1 \subset \ldots \subset H^{n-1}$. Рассмотрим произвольную группу G проективных преобразований пространства P^n и направляющий элемент s; преобразования из G, оставляющие инвариантной каждую компоненту элемента s, образуют нормальный делитель G_0 группы G. Направляющий элемент s называется регулярным относительно группы G, если G_0 имеет порядок 2^n и порядок каждого элемента этой группы равен 2. Поляритет D определяется с помощью симметрической билинейной формы ранга r: $g_{ij}x_iy_j = 0$. Подпространство $K = \{x, g_{ij}x_i = 0\}$ образует ядро поляритета. Подпространство $L \subset P^n$ называется D-неизотропным, если $L \cap D(L) = 0$. Пусть задана система поляритетов $B = (D_0, D_1, \ldots, D_t)$ следующим образом: D_0 в $P^n = K_0$ имеет ранг $r_0 \geqslant 1$ и ядро K_1, D_τ в K_τ имеет ранг $r_\tau \geqslant 1$ и ядро $K_{\tau+1}$, $\tau = 1, \ldots, t-1$, D_t в K_t имеет ранг $r_t \geqslant 1$ и ядро $K_{t+1} = 0$. Обозначим размерность $K_\tau = n_\tau$ и введем для каждого m, $0 \leqslant m \leqslant n$, понятие индекса отображения с помощью неравенства

$$n_{\lambda(m)} > n - m - 1 \geqslant n_{\lambda(m)+1}.$$

Положим теперь $B(M^m) = D_{\lambda(m)}(K_{\lambda(m)} \cap M^m)$ для $m \geqslant 0$, $B(0) = P^n$. Соответствие $M \to B(M)$ называется полной полярной системой или просто полярной системой. B- отражением называется инволютивное проективное преобразование, оставляющее точечно неподвижными некоторое B- неизотропное подпространство F и его образ $B(F)$. Наконец, вводятся в рассмотрение три группы, связанные с заданной полярной системой B: 1) группа Π всех проективных преобразований, перестановочных с B, 2) подгруппа $I \subset \Pi$, порожденная инволюциями, 3) подгруппа $\Sigma \subset I$ B-отражений. А. С. Феденко

3184. Проективные группы движений. II. Вагнер (Projektive Bewegungsgruppen. II. Wagner Richard), Math. Ann., 1958, **134**, № 4, 336—354 (нем.) Часть I см. реф. 3183.

Прежде всего в многообразие направляющих элементов вводится естественная топология. Пусть теперь задана произвольная группа G проективных преобразований. Направляющий элемент s называется локально свободно подвижным относительно G, если существует такая окрестность этого элемента, любой элемент которой может быть получен из s с помощью преобразований группы G. Если имеется по крайней мере один локально свободный подвижный направляющий элемент, регулярный относительно G, то G называется группой движений в P^n. Если в P^n задана полярная система B с группами $\Sigma \subset I \subset \Pi$, определенными в конце первой части работы, то любая группа G, $\Sigma \subset G \subset I$ является группой движений. Обратно, для каждой группы движений G в P^n существует вполне определенная полярная система B такая, что $\Sigma \subset G \subset I$. Отсюда, в частности, следует, что в P^n имеется лишь конечное число проективно различных типов групп движений. В заключение указывается способ построения для заданной группы движений соответствующей полярной системы. А. С. Феденко

3185. К теории специальных геометрических недифференциальных объектов с несколькими компонентами в пространстве X_m. I. Георгиу (Contribution à la théorie des objets géométriques spéciaux non différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m I. Georghiu Octavian Émil), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 8, 822—824 (франц.)

Пусть x и $\bar{x}$ — две допустимые координатные системы в X_m, x^i и $\bar{x}^i = \varphi^i(x^k)$ — координаты точки в X_m относительно x и $\bar{x}$ соответственно. Рассматриваются N- компонентные ($N = m^{s+1}$) специальные геометрические недифференциальные объекты в X_m, т. е. объекты со следующим законом преобразования компонент: компоненты объекта относительно $\bar{x}$ являются данными функциями f от компонент объекта относительно x, от x^i, $\bar{x}^i$ и от частных производных до порядка ν включительно функций φ^i. Число ν называется классом объекта. Для объектов нулевого и первого классов в статье указывается конкретный вид, который имеют функции f, определяющие закон преобразования компонент. Доказательства не приводятся. А. Е. Либер

3186. К теории специальных геометрических недифференциальных объектов с несколькими компонентами в пространстве X_m. II. Георгиу (Contributions à la théorie des objets géometriques spéciaux non différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m. II. Gheorghiu Octavian Emil), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 9, 887—889 (франц.)

Часть I см. реф. 3185. В пространстве X_m рассматриваются специальные геометрические недифференциальные объекты второго класса с $N = m^{2h+1}$ компонентами $\Omega^{k_1 \ldots k_n}_{i_1 \ldots i_{n+1}}$ ($i, k = 1, \ldots, m$). Указывается конкретный вид функций f,

определяющих закон преобразования компонент этих объектов. В связи с тремя возможными различными конструкциями функций f выделены три основных типа объектов второго класса в X_n.

Для объектов произвольного класса $\nu \geqslant 3$ указаны также конкретно формулы преобразования компонент объекта в точке M при таких преобразованиях $\bar{x}^i = \varphi^i(x^k)$ координат пространства X_m, для которых все частные производные второго, третьего, . . ., $(\nu - 1)$-го порядков от функций φ^i равны нулю в точке M.

Доказательства не приводятся. А. Е. Либер

3187. Классификация геометрических объектов. Пензов Ю. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 161—162

3188. Алгебраические вопросы оснований дифференциальной геометрии. Вагнер В. В., Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, 1955, **115**, № 10, 3—4

3189. Об одном обобщении римановой геометрии Александров А. Д., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 138

3190 К. Теория производных Ли и ее применения. Яно (The theory of Lie derivatives and its applications. Yano Kentaro. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co.; Groningen, P. Noordhoff Ltd.; New York, Interscience, Inc., 1957, 299 pp.) (англ.)

Дается систематическое изложение теории производной Ли общего геометрического объекта и базирующейся на ней теории групп движений (автоморфизмов) римановых пространств V_n, групп аффинных и проективных движений пространств аффинной связности без кручения A_n и с кручением L_n, групп конформных движений пространств V_n, движений в пространствах элементов с линейной связностью. В книге десять глав и приложение, содержание которых вкратце следующее:

Гл. I. Определяется понятие движения в римановом пространстве V_n и аффинного движения в пространствах аффинной связности A_n и L_n (отображения, сохраняющие соответственно метрику риманова пространства или связность пространства $A_n[L_n]$). Вводится производная вдоль заданного векторного поля для фундаментального тензора V_n и объекта аффинной связности $A_n[L_n]$; затем дается в X_n определение производной Ли для скалярного поля, векторного и тензорного полей.

Гл. II. Производная Ли общих геометрических объектов. Обычное определение геометрического объекта (законом преобразования его координат) заданного класса. Вводится производная Ли для общего геометрического объекта. В неголономной системе отнесения приводятся примеры производной Ли от некоторых геометрических объектов и излагаются свойства производных Ли линейного геометрического объекта вдоль векторов, определяющих r-параметрическую группу преобразований.

Гл. III. Группы преобразований, оставляющие инвариантным геометрический объект, проективные движения аффинно-связных пространств A_n и конформные движения в V_n. На этих примерах иллюстрируется понятие группы инвариантности данного объекта.

Исследования линейных дифференциальных геометрических объектов; разбирается задача построения линейного геометрического объекта наперед заданной группой инвариантности. Глава заканчивается выяснением интегрируемости системы уравнений, в которой производные Ли искомого линейного геометрического объекта по векторам бесконечно малых преобразований заданной r-параметрической группы преобразований являются заданными линейными однородными объектами, составляющими полную систему.

Гл. IV Группы движений в V_n. Свойства полей векторов, которые определяют бесконечно малые движения и трансляции; выводятся условия, которым удовлетворяют бесконечно малые преобразования заданной группы G_r для того, чтобы она являлась группой движений некоторого V_n. Излагаются результаты Ванга и результаты референта о несуществовании римановых пространств V_n, допускающих полные группы движений G_r порядка r, где $n(n-1)/2 + 1 < r < n(n+1)/2$. В последних параграфах определяются пространства $V_n(ds^2 > 0)$, допускающие группы движений порядка $n(n-1)/2 + 1$ (Успехи матем. наук, 1953, 8, 182—183).

Гл. V. Группы аффинных движений. Рассматриваются свойства векторов, которые определяют бесконечно малые аффинные движения в A_n; группы аффинных движений в L_n с абсолютным параллелизмом. Изучаются L_n, допускающие просто транзитивную группу движений. Затем выводятся известные результаты о максимальном порядке групп аффинных движений в пространствах L_n и A_n нулевой кривизны, о пространствах A_n, которые допускают группу аффинных движений, оставляющую инвариантным симметрический или кососимметрические тензоры второго порядка. Далее рассматриваются аффинные связности группового пространства, совместность системы уравнений, определяющей коэффициенты объекта аффинной связности, допускающей заданную группу преобразований. В последних параграфах изучаются группы аффинных движений G_r пространства A_n при условии $r > n^2 - n + 5$.

Гл. VI. Группы проективных движений. Формулируются следствия из выведенных ранее свойств линейного дифференциального геометрического объекта; исследуются условия интегрируемости системы уравнений, определяющей векторы бесконечно малых проективных коллинеаций, и доказываются результаты референта: максимальный порядок групп проективных движений пространств A_n ненулевой проективной кривизны равняется точно $n^2 - 2n + 5$; о пространствах аффинной связности, допускающих группу аффинных движений G_r порядка $r > n^2 - n + 1$; максимальный порядок групп аффинных движений неэквиаффинных пространств A_n равен точно $n^2 - n + 1$, не существует A_n, допускающих полные транзитивные группы аффинных движений порядка r, где $n^2 - n + 1 < r < n^2$, и т. д. выводится тензорная характеристика пространств L_n, допускающих n^2-параметрическую группу аффинных движений.

Гл. VII. Группы конформных движений. Излагаются свойства векторов, определяющих бесконечно малое конформное или гомотетическое движение.

Далее, отыскиваются условия существования подгруппы гомотетических движений, содержащейся в группе конформных движений или в группе аффинных движений пространства V_n. Наконец, рассматривается задача определения V_n, допускающего заданную группу G_r в качестве группы конформных или гомотетических движений.

Гл. VIII. Группы движений в обобщенных пространствах. Определяется понятие производной Ли в многообразии линейных элементов (вдоль векторного поля $V^\sigma(x)$, продолженного на линейные элементы). Дается обобщение движений на пространства Финслера; исследуются пространства Финслера, допускающие вполне интегрируемые уравнения Киллинга. Затем эти построения обобщаются на случай общих аффинно-связных и проективно-связных пространств K-протяжений.

Гл. IX. Производная Ли в компактном ориентируемом римановом пространстве. Эта и следующая главы в основном относятся к дифференциальной геометрии многообразий в целом; вводится производная Ли для гармонического вектора и тензора, изучаются движения и аффинные движения в компактных ориентируемых V_n.

Гл. X. Производная Ли в почти комплексном пространстве. Дается определение почти комплексных (почти эрмитовых, почти келеровых), псевдокомплексных (псевдоэрмитовых, псевдокелеровых), комплексных (эрмитовых, келеровых) пространств. Подробно определяются псевдоаналитические векторы и векторы Киллинга в псевдокелеровых пространствах. Излагается содержание ряда статей

автора и Бохнера, посвященных приложениям производной Ли в псевдокелеровых пространствах постоянной голоморфической кривизны (РЖМат, 1955, 1463).

Приложение. Приводятся в конспективной форме формулировки теорем (без доказательства), полученных математиками за последнее время по движениям и конформным движениям в пространствах V_n аффинным и проективным движениям в пространствах аффинной связности. В последних двух параграфах дается обзор находящихся в печати результатов, полученных главным образом японскими математиками, по группам движений в финслеровых пространствах, в пространствах линейных элементов с линейной связностью и в квазикомплексных метрических пространствах.

Книга написана ясным и доходчивым языком, стиль изложения живой, строгий и лаконичный. Автор, излагая сначала известный материал, постепенно вводит читателя в круг вопросов современных исследований по теории движений. Содержится много фактов, нередко сообщаемых автором для полноты обзора без доказательств. Последние работы советских математиков не вошли в обзор приложения. В конце книги приводится авторский и предметный указатели. Библ. 297 назв. по основному тексту (I—X глав) и 71 назв. по приложению. И. П. Егоров

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3191. Теория поля, основанная на общем метрическом пространстве линейных элементов. Хорват, Моор (A általános metrikus vonalelemtérre alapozott térelmélet. Horváth János, Moór Arthur), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1956, **6**, № 1, 53—72 (венг.)

В теории поля Йокава (H. Yukawa) основным элементом пространства является пара точек. Авторы доказывают, что пространство с таким образующим элементом отображается на многообразие линейных элементов. Такое многообразие делается затем дифференциально геометрическим пространством. Структура этого пространства устанавливается введением метрического фундаментального тензора и инвариантного дифференциала. Из фундаментального тензора выводится производящая функция, которая в свою очередь определяет финслерово пространство. Если же вывести принадлежащий этой производящей функции метрический фундаментальный тензор финслерова пространства, то он не совпадает с ранее заданным фундаментальным тензором. Поэтому пространство имеет другую структуру, отличную от структуры финслерова пространства в картановой теории.

Авторы доказывают, что в таком пространстве автопараллельные линии не совпадают с экстремалями. Затем рассматривается теория кручения и кривизны. Ради физических приложений в особенности изучаются те пространства, в которых существует абсолютный параллелизм линейных элементов. Наконец, в этих специальных пространствах обычными методами теории поля, с помощью вариационного принципа выводятся уравнения теории поля.

O. Varga

3192. Геометрическая интерпретация уравнений, определяющих аффинную связность в функции от фундаментального тензора в единой теории поля. Море-Тизон (Une interprétation géométrique des équations qui déterminent la connexion affine en fonction du tenseur fondamental en theorre unitaire du champ. Maurer-Tison Françoise), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 12, 995—998 (франц.)

Рассматривается дифференцируемое класса C^2, кусочно класса C^4 многообразие V_4, снабженное тензорным полем $g_{\alpha\beta}$ класса C^1, кусочно C^3 и аффинной связностью $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ класса C^0, кусочно C^2. Ассоциированная связность определяется как $\overline{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Дается геометрическая интерпретация уравнений поля $\partial_\rho g_{\alpha\beta} + L^{\alpha}_{\sigma\rho} g^{\sigma\beta} + L^{\beta}_{\rho\sigma} g^{\alpha\sigma} = 0$ (которые в частном случае симметрического тензора $g_{\alpha\beta}$ просто выражают равенство нулю абсолютного дифференциала метрического тензора). В общем случае указанные уравнения эквивалентны следующему условию: при переносе произвольного ковариантного вектора v_ρ вдоль любого пути C по отношению к связности $\overline{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, контравариантный вектор, ему соответствующий в изоморфизме $v \to u$, $u^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta$ переносится вдоль этого пути по отношению к $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Как следствие получается антиизоморфизм между действием группы голономии ψ_x связности L на контравариантные векторы и действием группы голономии $\overline{\psi}_x$ связности $\overline{L}$ на ковариантные векторы.

В. В. Рыжков

3193. К теориям поля, инвариантным по отношению к группе конформных преобразований. Омнес (Sur les théories des champs invariantes par rapport au groupe conforme. Omnès Roland), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 17, 1382—1384 (франц.)

Рассматривается группа G конформных преобразований 4-мерного пространства. Эта группа является, по-видимому, наиболее общей группой, по отношению к которой инвариантны уравнения Максвелла. Она содержит в качестве подгруппы группу L всех (однородных и неоднородных) преобразований Лоренца, и кроме L, еще пяти параметрическое семейство преобразований:

$$\chi'_\mu = K\chi_\mu \quad \text{(подобие)},$$
$$\chi'_\mu = (a_\mu + \chi_\mu)(1 + 2ax + a^2x^2)^{-1} \qquad (1)$$

(a_μ — данный 4-вектор; преобразования последнего типа автор называет преобразованиями ускорения (accélération)). Группа G порождается своей подгруппой L и преобразованиями (1). Оказывается, что группа G изоморфна ортогональной группе $\widetilde{O}_6$, оставляющей инвариантной квадратичную форму с двумя минусами и четырьмя плюсами. Группа G имеет восьмимерное представление (спинорное). В связи с этим возникает заманчивая идея использовать ее в теории элементарных частиц (РЖФиз 1958, 19671). Однако на этом пути стоят трудности, связанные с тем, что построенный на основе этой группы оператор изотопического спина не коммутирует с оператором импульса, что противоречит экспериментальным данным. На это обстоятельство обращал внимание еще Иннграм (см. цитированный реферат).

Автор отмечает, что группа G имеет единственное восьмимерное представление, то самое, которое изучали Инграм и Гюрсей (РЖФиз, 1958, 19671). Таким образом, по его мнению, теория поля инвариантная по отношению к группе G, не имеет никакого отношения к реальным физическим полям. Ф. А. Березин

3194. О прерывностях вторых производных гравитационных потенциалов. Бель (Sur les discontinuités des dérivées secondes des potentiels de gravitation. Bel Louis), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 26, 2482—2485 (франц.)

Если пространство-время V_4 определено метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$, где $g_{\alpha\beta}$ — класса C^2 и класса C^4 на куске (Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitationst de l'électromagnétisme, Masson, Paris, 1955), то характеристическое многообразие V_3^C уравнений Эйнштейна определяется элементарным конусом $ds^2 = 0$. Прерывность функции на некоторой гиперповерхности Σ с уравнением $f = 0$ обозначается символом $[\,]$. Тогда (Darmois G.,

Les équations de la gravitation einsteinienne. Mém. Soc. Math. Phys., 1927).

$[\partial_\rho g_{\mu\nu}] = l_{\mu\nu} y_\rho y_\sigma$, где $y_\sigma = \partial_\sigma f$, $y^\rho = G^{\sigma\rho} y_\sigma$, а $l_{\mu\nu}$ — параметры прерывности, зависящие от условий совместности уравнений поля $S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$. В области, где $T_{\alpha\beta}$ непрерывен, $[R_{\alpha\beta}] = 0$ и $(l_{\alpha\beta} - l/2\, G_{\alpha\beta}) y^\beta = 0$. Показывается, что в ортрепере $l_{\alpha\beta} = S(V_\alpha V_\beta - W_\alpha W_\beta)$, где $S = l_n$, а $\mathbf{V}$ и W — векторы, ортогональные между собой и y. Этот результат согласуется с результатом Пирани, исследовавшим прерывность тензора кривизны (РЖФиз, 1959, 2502).

В приложении к теории Жордана — Тири получается соотношение $l_{ij} = \frac{h}{2} y_{ij}$ и некоторые следствия из него.

А. З. Петров

3195. Решения электромагнитных уравнений в нестатическом сферически-симметрическом пространстве-времени. Такэно (On solutions of electromagnetic equation in non-static spherically symmetric space-times. Takeno Hyôitirô), Tensor, 1954, **4**, № 1, 9—15 (англ.)

Рассматривается вопрос об отыскании решений обобщенных уравнений Максвелла в общей теории относительности:

$\nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0$, $\nabla_j F^{ij} = J^i$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$ где F_{ij} — кососимметрический тензор электромагнитного поля, J^i — вектор тока, в том частном случае, когда $J^i \equiv 0$, а метрика пространства, в специальной системе координат, допускает приведение к виду $ds^2 = -A(r, t)\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + C(r, t)\, dt^2$, т. е. пространство нестатическое и сферически-симметрическое. При обозначениях $E_r = \frac{1}{\sqrt{AC}} F_{14}$, $E_\theta = \frac{1}{r\sqrt{C}} F_{24}$, $E_\varphi = \frac{1}{r\sqrt{C}\sin\theta} F_{34}$, $H_r = \frac{F_{23}}{r^2 \sin\theta}$, $H_\theta = \frac{F_{31}}{r\sqrt{A}\sin\theta}$, $H_\varphi = \frac{F_{12}}{i\sqrt{A}}$ автор показывает наличие следующих решений:

1) поперечно-электрические волны (*TE*)

$$E_r = 0,\ E_\theta = -\frac{1}{l(l+1) r\sqrt{C}\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial t}(ru),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{l(l+1) r\sqrt{C}} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial t}(ru),\ H_r = \frac{u}{r},\ H_\theta = \frac{1}{l(l+1) r\sqrt{A}} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}(ru),$$

$$H_\varphi = \frac{1}{l(l+1) r\sqrt{A}\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}(ru),$$

где $u = rH_r$ удовлетворяет уравнениям:

$$\left[u = R(r, t)\,\theta(\theta)\,\Phi(\varphi),\right.$$

$$\frac{1}{r\sqrt{AC}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\frac{C}{A}} \frac{\partial}{\partial r}(rR)\right) - \frac{1}{\sqrt{AC}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\frac{A}{C}} \frac{\partial}{\partial t} R\right) - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} R = 0;\right.$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\theta}{d\theta}\right) + \left\{l(l+1) - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right\}\theta = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + h^2\Phi = 0,$$

n, l — положительные константы, $|n| < l$;

2) поперечно-магнитные волны (TM)

$$E_r = \frac{v}{r},\ E_\theta = \frac{1}{l(l+1) r\sqrt{A}} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial t}(rv),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{l(l+1) r\sqrt{A}\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}(rv),\ H_r = 0,\ H_\theta = \frac{1}{l(l+1) r\sqrt{C}\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial t}(rv),$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{l(l+1) r\sqrt{C}} \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial t}(rv),\ v = rE_r;$$

3) поперечно-электромагнитные волны (TEM)

$$E_r = 0,\ E_\theta = \frac{g_1 f_2}{r\sin\theta},\ E_\varphi = \frac{f_1 f_2}{r\sin\theta},\ H_r = 0,\ H_\theta = \frac{-f_1 g_2}{r\sin\theta},$$

$$H_\varphi = \frac{g_1 g_2}{r\sin\theta},$$

где f_1 и g_1 — некоторые гармонические функции от $M \equiv \int \frac{d\theta}{\sin\theta}$ и φ, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial\mu} f_1 - \frac{\partial}{\partial\varphi} g_1 = 0,\ \frac{\partial}{\partial\varphi} f_1 + \frac{\partial}{\partial\mu} g_1 = 0;$$

f_2 и q_2 — некоторые функции от r, t при условии $f_r = \frac{M_\varphi + N_\psi}{4\sqrt{AC}}$, $g_r = \frac{M_\varphi - N_\psi}{4\sqrt{AC}}$,

$$M = \exp\int\left\{-\frac{a}{4b}\frac{\partial}{\partial\xi}\log\left(\frac{C}{A}\right)\right\}d\eta,$$

$$N = \exp\int\left\{-\frac{b}{4a}\frac{\partial}{\partial\eta}\log\left(\frac{C}{A}\right)\right\}d\xi,$$

$$\xi = p(r, t),\ \eta = q(r, t),\ \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, t)} = 2ab\sqrt{AC} \neq 0;$$

при этом векторные поля **E** и **H** будут ортогональны друг к другу. Автор утверждает, что методом, аналогичным тому, который применен в работе Уэно (РЖФиз, 1955, 4074; 1956, 9516), можно доказать теорему: Любое решение рассматриваемой задачи может быть получено как линейная комбинация с постоянными коэффициентами решений TE, TM и TEM, если U имеет указанную выше структуру. В специальных случаях пространства Минковского и статического пространства автор получает соответственно сферические волны и результат, полученный в указанной выше работе.

А. З. Петров

3196. Электромагнитные индукции анизотропной релятивистской среды. Фам Мау Куан (Inductions électromagnétiques dans un milieu anisotrope relativiste. Pham Mau Quan), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 21, 1782—1785. (франц.)

В пространстве-времени V_4 с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\rho} dx^\alpha dx$ задается область D, отнесенная к локальным координатам x_α с единичным вектором скорости u^α точки среды, заключенной в D. Электромагнитное поле представлено двумя кососимметрическими тензорами второй валентности $H_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$. Тогда векторы индукции (электрической — D, ε и магнитной **B**, **H**) определяются в виде: $D_\alpha = G_{\rho\alpha} u^\rho$, $E_\alpha = H_{\rho\alpha} u^\rho$, $B_\alpha = \overset{*}{H}_{\rho\alpha} u^\rho$, $H_\alpha = \overset{*}{G}_{\rho\alpha} u^\rho$, где $\overset{*}{H}$ связано с H и $\overset{*}{G}$ с G при помощи дискриминантного тензора V_4: $\overset{*}{H}_{\alpha\beta} = {}^1/_2 \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} H^{\gamma\delta}$, $\overset{*}{G}_{\alpha\beta} = {}^1/_2 \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta}$. Выяс-

няется, что векторы индукции должны удовлетворять условиям: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Кроме того, вектор тока $\Gamma_\beta = \sigma^\alpha_\beta H_{\rho\alpha} u^\rho$, т. е. $\Gamma = \sigma\mathbf{E}$. Таким образом, электромагнитная индукция в анизотропной среде характеризуется тремя матрицами $\varepsilon = (\varepsilon^{\alpha\beta})$, $\mu = (\mu^{\alpha\beta})$, $\sigma = (\sigma^{\alpha\beta})$.

Исследуя задачу Коши для уравнений Максвелла в этом случае, автор показывает, что характеристическое многообразие этих уравнений имеет вид $\det(A^i_j) = 0$, где

$$A^i_j = \frac{1}{\mu}\left[(g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^0 u^0)\,\delta^i_j - \mu(e^i_j u^0 - e^0_j u^j)\, u^0 + \right.$$
$$\left. + {}^1/_\varepsilon\,(g^{0\alpha}\, e^0_\alpha u^j - g^{j\alpha}\, e^0_\alpha u^0)\, u_i + \frac{1}{2}\mu g^{0\lambda}\varepsilon_{\lambda\iota\gamma\delta} u^\iota\, t^\delta_\mu \varepsilon^{\mu\nu 0 j} u_\nu\right],$$

где e^i_j и t^i_j выражаются через тензоры поля и ε, μ, σ.

Не приводя доказательства, автор утверждает, что существуют три характеристических многообразия касательных к конусам второго порядка. А. З. Петров

3197. Годограф движения материальной точки в релятивистской механике. Зэгэнеску (Der Hodograf der Bewegung eines materiellen Punktes in der relativistischen Mechanik. Zăgănescu M.), Ann. Physik, 1958, **1**, № 6-8, 424—428 (нем.)

Рассмотрим в пространстве Минковского мировую линию материальной точки, движущейся в физическом пространстве. С каждой точкой этой линии можно связать четырехкомпонентный вектор скорости

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$d\tau = \sqrt{dx_4^2 - dx_3^2 - dx_2^2 - dx_1^2}.$$

Предполагается, что скорость света $c = 1$. В пространстве скоростей, которое определяется как пространство переменных

$$v_\alpha \equiv \frac{dx_\alpha}{dx_4} = \frac{u_\alpha}{u_4} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

можно определить метрику следующим образом:

$$d\sigma^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 - du_4^2.$$

В работе автор ограничивается двумерным пространством скоростей (полагает, что $u_3 = 0$) и метрику записывает в римановой форме

$$d\sigma^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{\left(1 - \frac{p^2 + q^2}{4}\right)^2},$$

где $v_1 = \frac{4p}{4 + p^2 + q^2}$, $v_2 = \frac{4q}{4 + p^2 + q^2}$. В этом случае уравнения движения можно записать в виде

$$m_0 \frac{du_1}{d\tau} = F_1 u_4, \quad m_0 \frac{du_2}{d\tau} = F_2 u_4, \quad m_0 \frac{du_4}{d\tau} = F_1 u_1 + F_2 u_2,$$

где F_1, F_2 — компоненты ньютоновской силы, m_0 — масса инерции материальной точки. Из этих уравнений автор получает уравнение годографа:

$$\frac{dv_2}{dv_1} = \frac{F_2 v_2^2 + F_1 v_1 v_2 - F_2}{F_1 v_1^2 + F_2 v_1 v_2 - F_1}.$$

Автор показал, что систему уравнений движения материальной точки можно привести к одному дифференциальному уравнению типа Рикатти:

$$m_0 \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\overline{\lambda}}{4}\eta^2 + \lambda,$$

где $\eta = p + iq$, $\lambda = F_1 + iF_2$, $\overline{\lambda} = F_1 - iF_2$, и если F_1, F_2 — постоянные, то решением уравнения годографа является кривая второго порядка (действительный эллипс, гипербола или пара действительных параллельных прямых). В. И. Близникас

3198. Относительная ковариантность как основа квантовой механики. Коста-де-Борегар (Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique. Costa de Beauregard O.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 72—75 (франц.)

См. РЖАстр, 1958, № 1, 534

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3199. О некоторых проблемах теории геометрических порядков. Хаупт (Sur quelques problèmes de la théorie des ordres géométriques. Haupt Otto), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955. Liège—Paris, 1956, 59—76 (франц.)

Обзорный доклад, прочитанный автором на конференции в Льеже в 1953 г. Геометрический порядок в топологическом пространстве R определяется в общем виде как однозначное отображение f системы d подпространств пространства R, включающей его базу u, в некоторое вполне упорядоченное множество, причем если $T' \subset T''(T', T'' \in d)$, то $f(T') \leqslant f(T'')$. Порядок $f(p)$ точки p пространства это — наименьший из порядков окрестностей этой точки, входящих в базу пространства. Множество точек $M \subset R$ однородно относительно порядка (f-однородно), если порядки всех точек M имеют одно и то же значение. Точки пространства называются регулярными, если принадлежат некоторой его f-однородной открытой части; в противном случае точки особые. Имеет место общая теорема о структуре: пространство R можно представить как замыкание суммы его открытых f-однородных попарно отделенных частей. Отсюда следует, что особые точки множества составляют подмножество, нигде не плотное в R. Нижняя грань порядков особых точек определяется порядками открытых f-подмножеств.

В так называемых проблемах Юэля, играющих важную роль в теории порядков, рассматривается подмножество R топологического пространства R'; в R' задана система c подмножеств C, называемых характеристиками порядка. В системе d подмножеств T пространства R порядок $f(T)$ определяется как верхняя грань числа пересечений T с характеристиками C. Наиболее частый случай, когда R' — евклидово n-мерное пространство E_n, а R — топологический образ k-мерного интервала ($1 \leqslant k \leqslant n+1$); характеристиками порядка служат линейные подпространства измерения $k' = n - k$ или более общо — система k'-мерных многообразий, каждое из которых определяется надлежащим образом выбранными $k'+1$ точками. При $k = 1$ $k' = n - 1$; в этом случае R — дуга; характеристиками C служат гиперплоскости в E_n (вместо гиперплоскостей можно взять, например, $(n-1)$-мерные сферы). Пересечения с R устанавливают на $Rk'+1$-соответствие: в комплексе точек пересечения точки $p_1, \cdots, p_{k'+1}$ линейно независимы, а остальные $p_{k'+2}, \cdots$ являются их непрерывными функциями. С помощью проектирования рассмотрение дуги в E_n можно свести к случаю дуги в E_2, где характеристиками порядка являются простые дуги, в частности прямые. В этом случае $k'+1$-соответствие обладает свойством монотонности, позволяющим доказать ряд теорем, в частности теорему о четырех вершинах и следующее ее обобщение: если дуга имеет циклический порядок (т. е. характеристиками служат окружности) не менее $(k'+1)t+1$, то число вершин дуги, т. е. точек циклический порядок которых не меньше четырех, не менее t. На дуге не существует регулярных точек порядка выше $k+1$.

При $k > 1$ ($2 \leqslant k \leqslant n-1$) рассматриваемое топологическое пространство R есть k-мерная поверхность в E_n; характеристиками порядка служат линейные подпространства $n-k$ измерений. В этом случае каждое замкнутое и компактное множество M-конечного порядка есть замыкание суммы счетного множества k-мерных поверхностей Липшица; поверхностью Липшица L_k в E_n называется множество точек $p=(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ таких, что $x_r = f_r(x_1, \ldots, x_k)$ $(i = k+1, \ldots, n)$ являются однозначными функциями, удовлетворяющими в k-мерном интервале условию Липшица. Так как функция, удовлетворяющая условию Липшица, дифференцируема, то M почти в каждой точке имеет касательное линейное пространство k-измерений. Порядок регулярных точек на поверхности L_k (если они не принадлежат к типу линейчатых) не более $k(n-k)+1$.

В заключение рассматриваются вопросы, связанные с понятием фигуры пространства по отношению к порядку; два пространства R' и R'' имеют одинаковую фигуру по отношению к порядку, если существует топологическое отображение R' на R'', при котором порядки соответствующих подпространств равны. Рассматриваются вопросы классификации точек дуги и обобщенное понятие индикатрисы Дюпена. Библ. 24 назв. А. Г. Школьник

3200. О локально евклидовых пространствах аффинной связности. Врэнчану (Sur les espaces à connexion affine localement euclidiens. Vrănceanu G.), Publs math., 1956, **4**, № 3—4, 359—361 (франц.)

В заметке приведено упрощенное доказательство известной теоремы Э. Картана о том, что локально евклидово односвязное нормальное риманово пространство глобально эквивалентно евклидову пространству. (Нормальным называется такое пространство, в котором всякое бесконечное ограниченное множество имеет предельную точку). В ходе доказательства получены следующие результаты: всякое локально плоское и односвязное пространство аффинной связности может быть однозначно (но, вообще говоря, не взаимно однозначно) отображено на аффинное пространство; всякое локально евклидово односвязное риманово пространство с положительно определенной метрикой может быть взаимно однозначно отображено на некоторое подмногообразие евклидова пространства.

Ю. И. Левин

3201. Инвариантные векторы и тензоры на однородном пространстве. Кути (Vecteurs et tenseurs invariants sur un espace homogène. Couty Raymond), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 18, 2569—2571 (франц.)

Работа содержит исследование свойств векторных и тензорных полей на однородных римановых пространствах G/H. Получены следующие результаты:

1) На однородном римановом пространстве G/H G-инвариантное гармоническое (соответственно киллингово) векторное поле, удовлетворяющее условию $R_{ij}\xi^i\xi^j \geqslant 0$ (соответственно $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$), обязательно параллельно. Если кривизна Риччи положительно (соответственно отрицательно) определена, то не существует ненулевых гармонических (соответственно киллинговых) векторных полей.

2) Каждое компактное (соответственно однородное) эрмитово пространство, тензор кручения которого ковариантно постоянен в римановой связности, является келеровым пространством.

Обозначим через $H(n)$ однородное пространство, у которого алгебра когомологий G-инвариантных форм порядка n имеет размерность 1.

3) На пространстве $H(n)$ G-инвариантная форма порядка 1 определяет изометрию в том и только в том случае, когда она удовлетворяет уравнению

$$(\Delta\xi)_i = 2R_{ip}\xi^p.$$

Дальнейшие результаты относятся к конформно-киллинговым тензорам (в терминологии автора, конформным формам) (РЖМат, 1957, 8927).

4) На компактном ориентируемом римановом пространстве (соответственно на $H(n)$) p-форма (соответственно G-инвариантная p-форма) конформна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$p\Delta\xi + (1-\frac{2}{n})d\delta\xi = (p+1)S\xi.$$

5) На компактном ориентируемом римановом пространстве (соответственно на $H(n)$) постоянной кривизны получена оценка собственных значений оператора Δ на замкнутых или козамкнутых p-формах (соответственно на G-инвариантных замкнутых или козамкнутых p-формах).

6) В предположениях 5) доказано, что пространство конформных форм есть прямая сумма пространства форм Киллинга и пространства „чистых конформных форм", т. е. таких, что

$$\Delta\omega = k_2\omega,$$

где k_2 — определенная постоянная. Д. В. Беклемишев

3202. Геометрические структуры. I. Лесьёр (Treillis géométriques. I. Lesieur L.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 1, 1—10 (франц.)

Первая часть доклада, сделанного на алгебраическом семинаре и излагающего круг вопросов, составляющих содержание третьей части книги (РЖМат, 1956, 6472 К), одним из авторов которой является Лесьёр. Рассматриваются конечно- и бесконечномерные геометрические структуры и определяемые ими геометрии.

В. В. Рыжков

3203. Геометрические структуры. II. Лесьёр (Treillis géométriques. II. Lesieur L.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 2, 1—8 (франц.)

Вторая часть доклада (реф. 3202). Рассматриваются проективные и аффинные геометрические структуры. В частности, уделено внимание определению параллельных подпространств в аффинной геометрии. В. В. Рыжков

3204. О существовании связности с нулевой кривизной. Милнор (On the existence of a connection with curvature zero. Milnor John), Comment. math. helv., 1958, **32**, № 3, 215—223 (англ.)

Доказывается ряд теорем о существовании связности с нулевой кривизной в расслоенном пространстве с базой—замкнутой ориентируемой двумерной поверхностью и структурной группой $GL^+(2)$, т. е. группой действительных матриц 2×2 с положительным определителем, в зависимости от топологической структуры поверхности и расслоенного пространства. В частности, установлено, что поверхность рода $\geqslant 2$ не допускает никакой аффинной связности с нулевой кривизной. Ю. И. Левин

3205. Евклидовы связности, канонически ассоциированные некоторым структурам — почти произведениям. Араньоль (Connexions euclidiennes canoniquement associées à certaines structures presque-produit. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 3, 339—341 (франц.)

Рассматривается m-мерное дифференцируемое многообразие V, на котором определены регулярные поля C и C' взаимно дополнительных m- и $(n-m)$-направлений. Через C_M и C'_M обозначаются соответствующие подпространства касательного векторного пространства T_M в точке $M \in V$. Вводятся главные расслоенные пространства: R—линейных реперов $T_M R_a$ —адаптированных реперов T_M, т. е. таких реперов, базисные векторы которых принадлежат C_M и C'_M и R_C —реперов C_M.

T_C^p, T_C^q — расслоенные пространства с базой V, имеющие

слоем p-ю и q-ю внешние степени C_M и C'_M. Фундаментальная векторная форма, компоненты которой для $(e_i)\in R$ образуют корепер, индуцирует при переходе к адаптированным реперам векторную форму ω на R_C. Линейная связность на R_C называется C-связностью, внешний дифференциал относительно нее обозначается D; $D\omega$—кручение связности. Пусть еще существует аффинный симметрический тензор g_{rs} относительно структуры R_C, определяющий в каждом C_M структуру векторного собственно евклидова пространства. Тогда определяется расслоенное пространство ортонормальных реперов R^0_C; C-связность называется евклидовой, если она индуцирует связность на R^0_C. Доказывается теорема: Существует единственная евклидова C-связность такая, что: 1) $D\omega$ исчезает на T^2_C, 2) $\Sigma_r D\omega^r \wedge \omega_r$ исчезает на $T^2_C \wedge \wedge T^1_{C'}$. Даются приложения к случаю C и C', ортогональных по отношению к римановой метрике V, к случаю финслеровых многообразий. В. В. Рыжков

3206. Дифференциальные многообразия. Папи (Variétés différentielles (point de vue contingent). Papy Georges), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 1, 1—14 (франц.)

Автор определяет некоторые фундаментальные дифференциальные понятия, исходя из понятия многообразия. Пусть V — топологическое действительное многообразие размерности n и p — точка в V. Пусть F — алгебра ростков (des germes) в p функций (алгебра функций в точке p) с действительным значением, определенных в окрестности p; B — алгебра ростков в p функций, ограниченных в окрестности p; A^0 — алгебра ростков в p функций, непрерывных в p (но не обязательно в окрестности p). Пусть F_0 — идеал в F, составленный из ростков функций, принимающих в p нулевое значение; $B_0 = F_0 \cap B$, $A^0_0 = F_0 \cap A^0$. Отождествляя ростки функций, постоянных в окрестности p, со значениями, которые они принимают, можно записать F, B, и A^0 как прямые суммы

$$F = R \otimes F_0, \quad B = R \otimes B_0, \quad A^0 = R \otimes A^0_0.$$

Разность Δ в p определяется как преобразование

$$F \to F_0 : f \in F \to \Delta f = f - f(p).$$

Пусть $\mathfrak{A} = \{x\}$ — атлас многообразия V. Координаты x^l карты x и функция f порождают векторы из A^0, которые обозначаются V^x, также вводятся

$$\Delta V^x = V^x_0 = V^x \cap F_0; \quad N^x_0 = V^x_0 \cdot A^0_0$$

(совокупность конечных сумм $\sum_i v_i a_i$, где $v_i \in V^x_0$, $a_i \in A^0_0$);

$$N^x = R \otimes N^x_0; \qquad N^{r,x}_0 = (N^x_0)^r, \; r = 1,2,\ldots;$$

$$N^{r,x} = R \otimes N^{r,x}_0; \quad N^{\infty,x}_0 = \cap_i N^{i,x}_0,$$

$$N^{\infty,x} = R + N^{\infty,x}_0;$$

$$A^{r,x} = R + A^{r,x}_0 = R + V^x_0 + \cdots + (V^x_0)^r + (V^x_0)^r A^0_0;$$

$$A^{\infty,x}_0 = \cap_r A^{r,x}_0.$$

Атлас называется дифференциальным или δ-дифференцируемым в p, если $N^x_0 = N^y_0$ для каждой пары карт x, y из $\mathfrak{A}$ в p. Тогда $N^{r,x}_0 = N^{r,y}_0$ для всех $r = 1, 2, \ldots$ Можно положить $N^r_0 = N^{r,x}_0$, $N^r = N^{r,x} = R \otimes N^r_0$ и определить предел порядка r ($\lim r$) как следующий гомоморфизм:

$$\lim r : F \to F/N^r_0 : f \to \lim_r f = f + N^r_0.$$

Дифференциалом порядка r в p называется предел порядка r разности в p:

$$d_r = \lim_r \circ \Delta : F \to F_0/N^r_0 = d_r F.$$

Атлас называется r-дифференцируемым в точке p, если $A^{r,x}_0 = A^{r,y}_0$ для всех карт x, y из $\mathfrak{A}$ в p. Тогда полагают $A^r_0 = A^{r,x}_0$, $A^r = R + A^r_0$. Атлас называется дифференцируемым в точке, если он 1-дифференцируемый в этой точке. Очевидно, атлас, дифференцируемый в точке, является дифференциальным в этой точке, обратно он может не быть. Если атлас r-дифференцируемый в p, то элементы из A^s для всех $s \leqslant r$ есть начала функций, s-дифференцируемых в p. Допускают, что каждый атлас является o-дифференцируемым в каждой точке многообразия. Атлас $\mathfrak{A}$ называется линейным или λ-дифференцируемым в точке, если для каждой пары карт x, y из $\mathfrak{A}$ имеют в этой точке $V^x_0 = V^y_0$. Таким же путем можно определить аналитический или ω-дифференцируемый атлас. Свойство h-дифференцируемости атласа в точке оказывается определенным для каждого элемента h совокупности

$$0 < \delta < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots < \infty < \omega < \lambda. \quad (1)$$

Очевидно, если атлас h-дифференцируемый в точке, он также h'-дифференцируемый в этой точке для всех $h' \leqslant h$. Наибольшее из значений k, для которых атлас $\mathfrak{A}$ является k-дифференцируемым в p, называется порядком дифференцируемости атласа в p. Пусть C—атлас всех карт многообразия V и r принадлежит совокупности (1). Карта $x \in C$ называется r-совместимой (compatible) с атласом $\mathfrak{A}$, если для каждой точки $p \in V$

$$\sup \{r, \text{ порядок } \mathfrak{A} \text{ в } p\} = \sup \{r, \text{ порядок } (\mathfrak{A} \cup x) \text{ в } p\}.$$

Пара $V, \mathfrak{A}^r$, где $\mathfrak{A}^r$ — атлас всех карт из C, r– совместимых с $\mathfrak{A}$ называется r-дифференциальным многообразием (порожденным атласом $\mathfrak{A}$). На основе этих понятий вводятся другие дифференциальные понятия, в частности алгебра $d_t A^t = A^t_0 / N^t_0$, пространство $(d_t, A^t)^*$, дуальное к пространству $d_t A^t$. Н. Б. Шенфельд

3207. Об универсальных тензорных формах на главном расслоенном пространстве. Тасиро (On universal tensorial forms on a principal fibre bundle. Tashiro Yoshihiro), J. Math. Soc. Japan, 1956, 8, № 3, 247—255 (англ.)

Рассматривается дифференцируемое главное расслоенное пространство $B = \{B, X, G, G\}$, где B — расслоенное пространство, X — базисное пространство, а слой и структурная группа совпадают с одной и той же группой Ли G. Отображение проекции p, равно как и остальные рассматриваемые отображения и пространства, считаются дифференцируемыми, достаточно высокого класса.

Пусть E — N-мерное векторное пространство, L_N — полная линейная группа в нем, M — представление $G \to L_N$. Обычным образом определяется тензорная r-форма типа M на базисном пространстве X (M — тензорная r-форма).

Такой форме u сопоставляется однозначно определенная (индуцированная определяемым проекцией p соответствием p^* дуальных касательных пространств $T(X)$ и $T(B)$) тензорная r-форма на пространстве произведения B. Она обозначается через $\tilde{u}$ и называется универсальной r-тензорной формой для формы u. Для универ-

сальной тензорной формы дается явное выражение ковариантного дифференциала $D\widetilde{u}$, показывается, что $D\widetilde{u} = D\widetilde{u}$. Дается следующий признак того, что данная форма является универсальной: Если структурная группа G-связная, то необходимым и достаточным условием того, чтобы E-значная форма $\widetilde{u}$ на B была универсальной тензорной формой, служит условие, чтобы $\widetilde{u}$ и $D\widetilde{u} + \overline{M}(\pi) \wedge \widetilde{u}$ обращались в нуль на любой системе векторов, из которых хотя бы один вертикален. Здесь π — форма связности, а $\overline{M}$ — представление алгебры Ли $L(G)$ в $L(L_N)$, индуцированное с помощью M. В. В. Рыжков

3208. Аффинные преобразования и голономия. Лихнерович (Transformations affines et holonomie. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 14, 1868—1870 (франц.)

Пусть V_m — дифференцируемое многообразие, снабженное линейной связностью ω. Ассоциированная связность обозначается через $\overline{\omega}$. Инфинитезимальное преобразование называется аффинным для ω, если оно оставляет связность ω инвариантной. Всякому аффинному инфинитезимальному преобразованию X отвечает поле смешанного тензора $(A_X)^i_j = -\overline{\nabla}_j X^i (\overline{\nabla}_j$ — ковариантное дифференцирование относительно $\overline{\omega})$. A_X определяет эндоморфизм $A_X(x)$ касательного векторного пространства T_X в каждой точке $x \in V_m$. При задании на V_m алгебры Ли L аффинных инфинитезимальных преобразований эндоморфизмы $A_X(x)$ порождают алгебру Ли, являющуюся алгеброй Ли связной группы $K_x(L)$ автоморфизмов T_x. Имеет место теорема: Группа $K_x(L)$ является подгруппой связного нормализатора $N_0(\sigma'_x)$ инфинитезимальной группы голономии σ'_x в группе автоморфизмов T_x. Если L транзитивна на V_m, $\sigma'_x = \sigma_x$, то сокращенная однородная группа голономии многообразия V_m и группа $K_x(L)$ удовлетворяют условиям $\sigma_x \subset K_x(L) \subset N_0(\sigma_x)$.

Далее рассматриваются однородные пространства $V_m = G/H$ (G — эффективная группа) с инвариантной линейной связностью ω и приводится ряд теорем, касающихся групп голономии и группы $K_x(L)$, обозначаемой $K_x(G,\omega)$, если L — алгебра, определенная на V_m группой G. Например, в указанных условиях справедливо утверждение: Если для тензора или поля векторных подпространств t выполнены два из следующих трех условий: A. t инвариантно по отношению к G, B. t инвариантно по отношению к переносу относительно связности ω, C. $t(x)$ инвариантно по отношению к $K_x(G,\omega)$ в любой точке $x \in V_m$, то выполнено и третье из этих условий.

В. В. Рыжков

3209. Поле голономии и подалгебра голономии. Араньоль (Champ d'holonomie et sous-algèbre d'holonomie. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 9, 1117—1120 (франц.)

Рассматривается главное расслоенное пространство $E(E, B, G, p)$ с базой B и структурной группой G. Связность определена заданием формы ω со значениями в алгебре Ли $A(G)$ группы G. Пусть C — поле вертикальных (т. е. касательных к слою) p-элементов, таких, что если x' получается из x правым сдвигом с помощью $s \in G$, то $C_{x'} = ad(s^{-1}) C_x$, и таких, что C_x отождествляется с некоторой подалгеброй $A(G)$. Пусть L — алгебра тензорных дифференциальных форм типа $ad(s)$, $L_0(C)$ — подалгебра L, образованная тензорами $l \in L_0$ такими, что $l_x \in C_x$ и $L(C)$ — подалгебра, порожденная с помощью $L_0(C)$ умножением на базисные дифференциальные формы. Ставится задача, охарактеризовать поля C такие, чтобы соответствующие подалгебры $l(C)$ были стационарны относительно ковариантного дифференцирования; для этого необходимо и достаточно, чтобы, в понятных обозначениях, $DL_0(C) \subset L_1(C)$. Обозначим форму кривизны связности через Ω. Тогда показывается теорема: Для того чтобы поле C, определяющее подалгебру $L(C)$, стационарную относительно D, было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\Omega \in L_2(C)$. Показано построение полей $C(\theta)$, отправляясь от q-формы $\theta \in L_q$. Если $\theta = \Omega$, то соответствующее поле называется полем голономии, а подалгебра — подалгеброй голономии. В. В. Рыжков

3210. Об одной теореме Матсушима. Яно (Sur un théorème de M. Matsushima. Yano Kentaro), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 147—150 (франц.)

В статье даны два различных доказательства теоремы, доказанной Мацусима (РЖМат, 1958, 4209). Теорема состоит в следующем: Рассматривается компактное пространство Келера-Эйнштейна. Это пространство характеризуется тем, что его тензор Риччи имеет вид $R_j{}^i = k\delta_j{}^i$, где k — постоянная, в теореме предполагаемая положительной. Утверждается, что в таком пространстве контравариантное аналитическое векторное поле может быть одним и только одним способом представлено в виде $u = v + Fw$, где v и w — киллинговы векторные поля, а F — тензор, определяющий комплексную структуру пространства. Д. В. Беклемишев

3211. О многообразиях с комплексной структурой. Мартинелли (Sulle varietà a struttura complessa. Martinelli Enzo), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 313—324 (итал.)

Статья содержит изложение известных свойств пространств с комплексной структурой с использованием терминологии, отличной от общепринятой.

Д. В. Беклемишев

3212. Расслоенные пространства в теории алгебраических чисел. Ямадзаки (On fibre spaces in the algebraic number theory. Yamazaki Keijiro), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 2, 182—201 (англ.)

Более подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1958, 2696). И. Р. Шафаревич

3213. Об одном обобщении понятия многообразия. Сатакэ (On a generalization of the notion of manifold. Satake I.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 6, 359—363 (англ.)

В работе дается понятие V-многообразия, обобщающее обычное понятие многообразия. Роль локальной карты (локальной системы координат) выполняет локальная униформизирующая система (л. у. с.). Именно, пусть $\mathfrak{B}$ — хаусдорфово пространство, U — открытое множество в нем. Л. у. с. $\{\widetilde{U}, G, \varphi\}$ для U называется совокупность $\widetilde{U}$, G, φ, где $\widetilde{U}$ — связное открытое множество в R^n; G — конечная группа линейных преобразований $\widetilde{U}$ на себя, причем предполагается, что размерность множества точек, неподвижных относительно G, не превосходит $n-2$; φ — непрерывное отображение $\widetilde{U}$ на U: $\widetilde{U} \to U$ такое, что $\varphi\circ\sigma = \varphi$ для всех $\sigma \in G$. φ индуцирует отображение $\widetilde{U}/G$ на U, предполагаемое гомеоморфизмом. Второе понятие, необходимое для определения V-многообразия, устанавливает некоторое отношение между двумя л. у. с. $\{\widetilde{U}, G, \varphi\}$ и $\{\widetilde{U}', G', \varphi'\}$ такими, что $U \subset U'$. Именно, под вложением (injection) понимается изоморфизм $\lambda: \{\widetilde{U}, G, \varphi\} \to \{\widetilde{U}' G', \varphi'\}$ области $\widetilde{U}$ на подобласть $\widetilde{U}'$ такой, что для любого $\sigma \in G$ существует $\sigma' \in G'$, для которого $\lambda\circ\sigma = \sigma'\circ\lambda$ и такой что $\varphi = \varphi'\circ\lambda$. При этом $\sigma \to \sigma'$ — изоморфизм $G \to G'$. Если $U = U'$, то λ^{-1} также будет вложением и две л. у. с. $\{\widetilde{U}', G', \varphi'\}$ и $\{\widetilde{U}, G, \varphi\}$ называются эквивалентными. Определение: C^∞ V-многообразием называется составной образ, состоящий из связного хаусдорфова прост-

ранства $\mathfrak{B}$ и семейства л. у. с. F для открытых множеств в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющего следующим условиям: 1) Если $\{\widetilde{U}, G, \varphi\}$, $\{\widetilde{U}', G', \varphi'\}$ суть л. у. с. для U и U' соответственно и $U \subset U'$, то существует вложение λ: $\{\widetilde{U}, G, \varphi\} \to \{\widetilde{U}', G', \varphi'\}$, 2) области U л. у. с. семейства F образуют базисную систему открытых множеств $\mathfrak{B}$. Отправляясь от этих определений, автор распространяет на V-многообразия такие результаты, как теорему де Рама и теорему двойственности Пуанкаре. В. В. Рыжков

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3214. Задача об областях. Траструм (A problem on domains. Trustrum G. B.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 177—181 (англ.)

Пусть D — сумма конечного числа кругов на плоскости, радиусы которых $\geqslant 1$. Доказывается, что при заданной площади множества D длина его границы принимает наибольшее значение в том случае, когда все круги имеют радиус 1 и самое большее два из них пересекаются. А. Л. Онищик

3215. О группах коллинеаций плоскостей Хьюза. Цаппа (Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes. Zappa Guido), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 507—516 (итал.; рез. англ.)

Изучаются коллинеации недезарговых плоскостей, рассматривавшихся Хьюзом (РЖМат, 1958, 5563). Пусть R — веблен-веддербарново тело с ассоциативным умножением, служащее для построения плоскости π, F — центр тела R, π_0 — плоскость над F (мы считаем, что π_0 лежит в π). Оказывается, что каждая коллинеация плоскости π_0 может быть продолжена до коллинеации плоскости π. Если порядок R равен 9, то обозначим через G группу коллинеаций плоскости π, полученных таким способом, а через Γ — группу коллинеаций плоскости π, индуцированных автоморфизмами тела R. Устанавливается, что группа всех коллинеаций плоскости π изоморфна $G \times \Gamma$ и имеет порядок 33696. Л. А. Скорняков

3216. О q-дугах в двумерном линейном пространстве над конечным полем характеристики 2. Таллини (Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $p=2$. Tallini Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. enatur., 1957 (1958), **23**, № 5, 242—245 (итал.)

Доказывается, что ни к какой q-дуге (РЖМат, 1958, 1513) пространства, указанного в заглавии, нельзя присоединить двух точек таким образом, чтобы получилась $(q+2)$-дуга. Л. А. Скорняков

3217. Об отношении конгруэнтности в конечных геометриях. Кустаанхеймо (On the relation of congruence in finite geometries. Kustaanheimo Paul), Math. scand., 1957, **5**, № 2, 197—201 (англ.)

Пусть Π — аффинная плоскость над $GF(p^h)$, $p \neq 2$. Для пар точек рассматривается транзитивное отношение $AB = CD$. При этом требуется: 1) Если $AB=CD$, то $BA=CD$ и $CD=AB$; 2) Если $AB \parallel CD$, то $AB=CD$ имеет место тогда и только тогда, когда $AC \parallel BD$ или $AD \parallel BC$; 3) Если A, B, C, D и A', B', C', D' — две четверки коллинеарных точек, $AB=A'B'$ и $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, то $CD=C'D'$; 4) Если A, B, C и A', B', C' — две тройки коллинеарных точек, A, B, C все различны, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$ $AD=A'D'$ и $BD=B'D'$, то $CD=C'D'$; 5) Существует четверка точек A, B, C, D такая, что для любых двух точек E и F существует такая точка G, что E, F, G коллинеарны и имеют место $AB=EG$ или $CD=EG$. Доказывается, что существует не более одного отношения „=“, подчиненного перечисленным аксиомам. В ходе доказательства используются результаты Сегре (РЖМат, 1956, 9093, 9094; 1957, 8231) и Квиста (Qvist B., Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math.-Phys., 1952, **134**, 52). Л. А. Скорняков

3218. Евклидова псевдоплоскость метрической плоскости. Лингенберг (Euklidische Pseudoebene über einer metrischen Ebene. Lingenberg Rolf), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 1-2, 114—130 (нем.)

Метрической плоскостью называется множество точек и прямых $\{a, b, \ldots\}$, связанных соотношениями инцидентности и перпендикулярности ($\perp$), подчиненными следующим аксиомам: I, а. Существует хотя бы одна прямая и одна точка вне ее; с каждой прямой инцидентно не менее трех точек; I, б. Через две различные точки проходит в точности одна прямая; II, а Если $a \perp b$, то $b \perp a$; II, б. Если $a \perp b$, то эти прямые имеют общую точку; II, в. Через каждую точку к любой прямой можно провести перпендикуляр, если точка и прямая инцидентны, то только один; III, а. С каждой прямой a связано хотя бы одно отображение σ_a плоскости на себя, сохраняющее инцидентность и перпендикулярность и оставляющее на месте все точки прямой a; III, б. Если a, b, c проходят через одну точку P или перпендикулярны прямой g, то существует прямая d, которая соответственно проходит через P или перпендикулярна g и удовлетворяет равенству $\sigma_d = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$. Доказывается, что всякую метрическую плоскость можно расширить до метрической плоскости, обладающей такими свойствами: IV, а. Существуют четыре прямые a, b, c, d такие, что $a \neq b$, $c \neq d$, $a, b \perp c, d$; IV, б. Две прямые имеют общую точку или общий перпендикуляр. Эта последняя и называется евклидовой псевдоплоскостью. Л. А. Скорняков

3219. Проектирование геометрии с гомоморфизмом. Клингенберг (Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Klingenberg Wilhelm), Math. Ann., 1956, **132**, № 3, 180—200 (нем.)

В работе вводится проективное пространство с гомоморфизмом P_3 как множество точек, в котором выделены два вида подмножеств, прямые и плоскости, задано сохраняющее инцидентность отображение, называемое гомоморфизмом, точек, прямых и плоскостей P_3 на точки, прямые и плоскости обычного проективного пространства $\overline{P}_3$ и выполняются аксиомы: R1. Две точки (три точки) в P_3 принадлежат одной и только одной прямой, если образы этих точек в $\overline{P}_3$ различны (не принадлежат одной прямой). R2. Две плоскости (три плоскости) в P_3 имеют одну и только одну общую прямую (точку), если образы этих плоскостей в $\overline{P}_3$ различны (не имеют общей прямой). R3. Всякая прямая, соединяющая две точки плоскости в P_3, целиком принадлежит плоскости, если образы этих точек в $\overline{P}_3$ различны. R4. Всякая общая точка двух плоскостей в P_3, образы которых в $\overline{P}_3$ различны, принадлежит линии пересечения этих плоскостей. Дается алгебраическая характеристика пространства P_3 при помощи координатного кольца A: P_3 можно представить как проективное пространство $P_3(A)$ над кольцом A с единицей и наибольшим идеалом I ($P_3(A)$ определяется совершенно аналогично тому случаю, что A — тело). Кольцо A, называемое координатным кольцом, определяется до изоморфизма. Моделью пространства $\overline{P}_3$ является пространство $\overline{P}_3(\overline{A})$ над телом $\overline{A}$, изоморфное A/I, так что гомоморфизм $P_3 \to \overline{P}_3$ записывается через естественный гомоморфизм $P_3(A) \to \overline{P}_3(\overline{A})$. Обратно, если A — кольцо с единицей и наибольшим идеалом I и $\overline{A}$ — тело, изоморфное A/I, то $P_3(A)$ — проективное пространство с индуцированным через $A \to \overline{A}$ гомоморфизмом на обычное проективное пространство $\overline{P}_3(\overline{A})$. Эти результаты могут быть распространены на случай более чем 3 измерений, а для случая двух измерений они имеют место тогда и только тогда, когда проективная плоскость с гомоморфизмом P_2 является дезарговой. При этом проективная плоскость с гомоморфизмом P_2 определяется как множество точек, в котором выделены подмножества, назы-

ваемые прямыми, кроме того, задано сохраняющее инцидентность отображение, гомоморфизм, точек и прямых P_2 на точки и прямые обычной проективной плоскости $\overline{P}_2$ и удовлетворяются аксиомы: E1. Две точки в P_2 принадлежат одной и только одной прямой, если образы этих точек в $\overline{P}_2$ различны. E2. Две прямые в P_2 имеют одну и только одну общую точку, если образы этих прямых в $\overline{P}_2$ различны. Дезаргову проективную плоскость с гомоморфизмом можно определить как проективную плоскость с гомоморфизмом, которая может быть вложена в проективное пространство с гомоморфизмом. P_3 тогда и только тогда является обычным проективным пространством, когда координатное кольцо A пространства P_3 не имеет делителей нуля и каждые два элемента из A сравнимы справа и слева (два элемента a, b кольца A называются сравнимыми справа, если имеется элемент $b' \in A$ такой, что $a=bb'$, или элемент $a' \in A$ такой, что $b=aa'$ В работе алгебраически характеризуются некоторые частные виды проективного пространства с гомоморфизмом через свойства координатного кольца A. Н. Б. Шенфельд

3220. О введении координат в проективной плоскости с помощью эндоморфизмов транзитивных групп сдвигов. Линденберг (Zur Einführung von Koordinaten in einer projektiven Ebene mit Hilfe von Endomorphismen transitiver Translationsgruppen. Lingenberg Rolf), Math. Z., 1957, **67**, № 4, 332—360 (нем.)

Пусть A, B, E, O и l_∞ имеют тот же смысл, что и в обзоре референта (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 6, 112—154). Обозначим через f совокупность тернаров определенных точками A, B, O при различном выборе точки E, через $\mathfrak{P}(P, a)$ — группу коллинеаций с центром P и осью a, равенством $\mathfrak{P}(P, a) = V$ будем заменять слова: «плоскость P—a транзитивна». Исследуется связь между следующими свойствами множества f: T1. Все тернары из f являются веблен-веддербарновыми телами; T2. Все тернары из f являются почти телами; T3. Все тернары из f являются полями с ниже перечисленными свойствами плоскости: I. $\mathfrak{P}(A, l_\infty) = V$ и $\mathfrak{P}(B, l_\infty) = V$; II. $\mathfrak{P}(O, l_\infty) = V$, а $\mathfrak{P}(B, l_\infty)$ состоит не из одного тождественного преобразования; III. Существует хотя бы одна O—l_∞-корреляция; IV. Существует такая корреляция δ, что для некоторой прямой g, удовлетворяющей условию $g\delta \notin g$, найдется такая α-коллинеация α, что $P_\alpha = P\delta' \cap g$ для всех точек $P \in g$. Устанавливается, что I эквивалентно T1, II—T2, а T3—как II & III, так и II & IV.

Л. А. Скорняков

3221. Об асимптотически сопряженных точках. Насу (On asymptotic conjugate points. Nasu Yasuo), Tohoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 157—165 (англ.)

Метрическое пространство определяется как точечное множество $\mathfrak{E}$, удовлетворяющее аксиомам: 1) для любой пары точек $x, y \subset \mathfrak{E}$ определено неотрицательное расстояние xy; 2) $xy = 0$ тогда и только тогда, если $x = y$; 3) $xy + yz \geqslant xz$ для любых трех точек x, y, z; 4) для любой последовательности точек $\{x_\nu\}$ и точки x тогда и только тогда $xx_\nu \to 0$, если $x_\nu x \to 0$.

$\mathfrak{E}$ будет E-пространством (Busemann, Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 56, 200—274), если выполняются аксиомы:

A. Для $x, y \in \mathfrak{E}$ не обязательно $xy = yx$.

B. Любое связное $X \subset \mathfrak{E}$ содержит последовательность точек $x_\nu \to x$, где $x \in \mathfrak{E}$.

C. $\mathfrak{E}$ метрически выпуклое, т. е. для любой пары различных точек x, y существует точка z такая, что $xz + zy = xy$.

D. Любая точка x имеет сферическую окрестность $S(x, \alpha_x) = \{y | yx < \alpha_x, xy < \alpha_x\}$ ($\alpha_x > 0$) такую, что для любых $\varepsilon > 0$ и $a, b \in S(x, \alpha_x)$ найдутся числа $\delta_k(a, b) < \varepsilon$ ($k = 1, 2$), для которых существует единственная пара точек a_1, b_1, так что $a_1 a + ab = a_1 b$, $a_1 a = \delta_1$, $ab + bb_1 = ab_1$, $bb_1 = \delta_2$.

Для любых $x, y \in E$-пространства аксиомы A, B, C обеспечивают существование отрезка $T(xy)$ длины xy.

В силу аксиомы D продолжение любого отрезка локально возможно и однозначно. Продолженный отрезок называется экстремалью. Экстремаль называется прямой линией, если ее параметрическое представление $x(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, удовлетворяет $x(\tau_1)\, x(\tau_2) = \tau_2 - \tau_1$ ($\tau_2 \geqslant \tau_1$). Положительный луч (или просто луч) есть положительная половина экстремали $x(\tau)$, $0 \leqslant \tau < +\infty$, для которой $x(\tau_1)\, x(\tau_2) = \tau_2 - \tau_1$ ($\tau_2 \geqslant \tau_1$).

Пусть l — луч с параметрическим представлением $x(\tau)$; $\{p_\nu\}$ — последовательность точек, сходящаяся к точке p; $\{\tau_\nu\}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\tau_\nu \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$. Последовательность отрезков $\{T_\nu\}$ ($T_\nu = T(p_\nu, x(\tau_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$) содержит подпоследовательность, сходящуюся к лучу r с начальной точкой p. Говорят, что r есть колуч из точки p к лучу l.

Асимптота к лучу определяется как объединение всех колучей, содержащих в себе колуч как подлуч. Асимптота имеет начальную точку, если она не прямая линия. Начальная точка асимптоты A к лучу l называется асимптотически сопряженной точкой к лучу l. Множество асимптотически сопряженных точек к лучу обозначается $K(l)$.

Если A — асимптота к лучу l и a — ее начальная точка, то колуч к l из любой точки $A - a$ есть подлуч A.

Если в E-пространстве $\mathfrak{E}$ множество $K(l)$ содержит изолированную точку, то $K(l)$ состоит из единственной точки p и все асимптоты с начальной точкой p покрывают все пространство $\mathfrak{E}$.

Множество $K(l)$ не обязательно замкнуто. $K(l)$ будет замкнуто, если произвольная точка $p \notin K(l)$ имеет окрестность, покрытую системой асимптот с начальной точкой, не принадлежащей этой окрестности.

Пусть в E-пространстве $\mathfrak{E}$ дан луч l и r есть колуч из точки p к l. Если $K(l)$ замкнуто, то для $\rho > 0$ каждая точка q ($\neq p$) на r имеет окрестность, покрытую системой асимптот, содержащих точку в $S(p, \rho)$. Если в несвязном двумерном финслерове многообразии класса G^r ($r \geqslant 4$) существует единственный колуч к лучу l, то $K(l)$ — пустое множество. В. Т. Базылев

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

3222. Интегрирование по выпуклому многограннику и некоторые вопросы теории линейных неравенств. Решетняк Ю. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 164—165

3223. Однозначная определенность выпуклых многогранников. Сенькин Е. П., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 211—213

3224. Соединение точек отрезками, имеющими наименьшую сумму длин. Прокофьев В. М., Тр. Моск. нефт. ин-та, 1957, вып. 20, 336—353

Автор называет минимальной сетью систему отрезков удовлетворяющих следующим условиям: 1) ее отрезками или некоторыми из них можно соединить между собой любую пару данных точек и 2) общая длина всех отрезков не должна превосходить длины любой другой связной системы, соединяющей данные точки.

Для нахождения минимальной сети используется теорема о точке Торричелли. Доказывается, что в случае, когда число данных точек больше трех, задача о минимальной сети существенно отличается от известной геометрической задачи о точке, сумма расстояний которых от данных точек плоскости является наименьшей. Выводятся необходимые условия существования минимальной сети и соотношения между числом данных точек, тупиков, колен и узлов минимальной сети. Приводится построение

минимальной сети для n данных точек. Показывается, как получить минимальную сеть опытным путем.

Н. В. Наумович

3225. О коллинеарностях двумерных выпуклых тел. Кейне (On collinearities of twodimensional convex bodies. Kijne D.), Nieuw arch. wiskunde, 1957, 5, № 2, 81—83 (англ.)

Выпуклые двумерные тела евклидова E_N называются коллинеарными, если они имеют общую секущую прямую. Конечное множество выпуклых тел обладает свойством B_s, если любые s из этих тел коллинеарны. Известен вопрос: выяснить, может ли выполнение свойства B_s влечь за собой выполнение свойства B_t при $s < t$, ответ на который без выполнения добавочных условий, отрицателен (см. также РЖМат, 1955, 6096). В реферируемой работе автор показывает, как можно построить в плоскости семейство из n выпуклых тел произвольной формы (например, кругов), обладающие свойством B_{n-1}, но не B_n.

В. В. Рыжков

3226. Классификация поверхностей, основанная на внутренней геометрии. Гергей (Clasificarea suprafetelor bazată pe geometria intrinseca. Gergely Eugen), Comun. Acad. RPR, 1955, 5, № 1, 27—30 (рум.; рез. русск., франц.)

Поверхностью трехмерного евклидова пространства называется множество точек, обладающих следующими двумя свойствами: 1) каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной кругу; 2) любые две точки можно соединить кривой конечной длины.

Точками с выпуклой окрестностью называются точки, обладающие выпуклой окрестностью, по терминологии А. Д. Александрова, и в которых существует выпуклая метрика. Границы выпуклых областей, которые представляют собой непрерывные кривые и изолированные точки, названы разделяющими кривыми и разделяющими изолированными точками.

Автор проводит классификацию поверхностей общего типа в трехмерном евклидовом пространстве. В основу классификации положены разделяющие кривые. Основной результат сформулирован в теореме: Системе разделяющих кривых и изолированных точек, обладающей определенными свойствами, всегда принадлежит поверхность, системой разделяющих кривых и изолированных точек которой является именно заданная система.

Н. М. Остиану

3227. Выпуклые множества в проективном пространстве. Грот, Врис (Convex sets in projective space. Groot J. de, Vries H. de), Compositio math., 1957, 18, № 2, 113—118 (англ.)

В данной работе выпуклость открытого или замкнутого множества n-мерного проективного пространства P_n характеризована следующим свойством: множество является выпуклым тогда и только тогда, когда оно полувыпукло и не содержит никакой (проективной) прямой (Для открытых множеств см. РЖМат, 1956, 6131). Помимо прочего, авторы доказывают, что в том случае, когда V представляет собой открытое или замкнутое выпуклое множество в P_n ($n>1$) и когда пересечение V с подпространством P_{n-k} ($k > 1$) пусто, существует гиперплоскость P_{n-1}, содержащая P_{n-k}, пересечение которой с V также пусто. С подобной точки зрения изучаются и произвольные полувыпуклые множества, не содержащие прямой. Z. Nadeník

3228. О мере линейных пространств, пересекающих выпуклое тело, и связанных вопросах. Сантало (Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent. Santaló L. A.), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955. Liège — Paris, 1956, 177—190 (франц.)

Пусть K^n — выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве E_n; O — фиксированная точка в E_n, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — взаимно ортогональные единичные векторы с началом в O; K^{n-q} — ортогональная проекция K^n на $(n-q)$-мерное линейное многообразие L^n_{n-q}, проходящее через O и ортогональное векторам $e_1, e_2, \ldots, e_q$; H^{n-q}_{r-q} — мера пересечения L^n_{n-q} с K^{n-q}, H^n_r — мера пересечения L^n_r с K^n, σ_{n-q} — $(n-q)$-мерный объем K^{n-q}; $O_i = 2\pi^{(i+1)/2}/\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)$ — площадь i-мерной единичной сферы, содержащей $e_1, \ldots, e_{i+1}$.

Доказывается, что

$$0 < q \leqslant r-1$$

$$H^n_r = (O_{r-1} \ldots O_{r-q})^{-1} \int H^{n-q}_{r-q} dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-q},$$

$$1 < r \leqslant n-1$$

$$H^n_r = (2O_{r-1} \ldots O_1)^{-1} \int \sigma_{n-r} dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-r}, \qquad q = r$$

$\wedge$ — символ внешнего умножения;

$$H^n_1 = \frac{1}{2} \int \sigma_{n-1}\, dO_{n-1};$$

$$H^n_r = \frac{nO_{n-2} \ldots O_{n-r-1}}{2(n-r)\, O_{r-1} \ldots O_1}\, W^n_r,$$

где W^n_r — интеграл по сечениям (Quermassintegrale), рассматриваемый как инвариант K^n в известной монографии Боннезена и Фенхеля;

$$H^n_r = \frac{O^2_{n-r} \ldots O_{n-r-1}}{2(n-r)\, O_{r-1} \ldots O_1}\, M^n_{r-1},$$

$$M^n_r = \left(C^r_{n-1}\right)^{-1} \int S_r\, d\sigma,$$

где S_r — r-я элементарная симметрическая функция $(n-1)$ главных кривизн, $d\sigma$ — элемент площади гиперповерхности K^n.

Во второй части работы приводятся известные формулы для кинематической плотности и некоторые (полученные автором в работе 1944 г.) их применения.

Г. И. Дринфельд

3229. Решение уравнения изгибания для некоторых классов поверхностей. Дорфман А. Г., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 2, 127—150

Рассматривается вопрос о возможности непрерывных (достаточно регулярных) изгибаний аналитической поверхности

$$z = f^{(n)}(x, y) + f^{(n+1)}(x, y) + \ldots \qquad (1)$$

($f^{(k)}(x, y)$ — однородная форма степени k). Речь идет об изгибаниях „в малом" (имеется в виду какой-нибудь кусок поверхности, содержащий точку $x = 0$, $y = 0$); предполагается, что при изгибании поверхность остается аналитической. Доказывается, что при любом $n \geqslant 2$ существует бесконечное множество изгибаемых поверхностей вида (1), например, изгибаемы поверхности $z = y\varphi(x) + \psi(x)$. Ранее было установлено (Ефимов Н. В., Тр. Матем. ин-та им. Стеклова 1949, 30, 5—128; РЖМат, 1953, 428), что при $n \geqslant 5$ почти все поверхности вида (1) неизгибаемы, причем ввиду отсутствия надлежащих примеров, оставалось неясным, возможна ли, вообще, достаточно регулярная изгибаемость при больших значениях n (не считая тривиального случая развертывающихся поверхностей). Реферируемой статьей этот пробел восполнен. Кроме того, в статье указаны поверхности вида (1), допускающие изгибания, при которых соприкасающийся параболоид $z = f^{(n)}(x, y) + \ldots + f^{(n+m)}(x, y)$, заранее данного порядка $n + m$, не испытывает деформации.

Н. В. Ефимов

См. также: 2168, 2182, 2196, 2332, 2418

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

3230. Применение методов решения граничных задач к численному решению задач с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Фокс, Митчелл (Boundary-value techniques for the numerical solution of initial-value problems in ordinary differential equations. Fox L., Mitchell A. R.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 2, 232—243 (англ.)

Рассматриваются два метода численного решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка с начальным условием. Конечноразностная схема, содержащая разности второго порядка, составляется для уравнений второго порядка, полученной в одном случае непосредственным дифференцированием уравнения первого порядка и исключением первой производной, в другом случае введением вспомогательной функции, зависящей линейно от решения и его первой производной.

В качестве дополнительного условия может быть взято или еще одно начальное условие, или условие в некоторой другой точке. В последнем случае, рассматривается краевая задача для уравнения второго порядка. Авторы сравнивают оба метода и указывают случаи, при которых выгодно применять метод с краевыми условиями.

Приводятся примеры неустойчивости конечноразностной схемы как в первом, так и во втором случае.

А. И. Кошелев

3231. О численном решении системы дифференциальных уравнений с некоторыми условиями. I. Адати (On the numerical solution of the simultaneous differential equations under some conditions. I. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1954, **A1**, № 4, 28—30 (англ.)

Обобщение результата из предыдущей работы автора РЖМат, 1958, 6192) на случай трех совместных уравнений типа $du_i/dx = F_i(x, u_1, u_2, u_3)$; при этом условия („пересечения" применяются к каждой плоской кривой $u = u_i(x)$. Решение также получается методом последовательных приближений.

W. E. Milne

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 631

3232. О продольных колебаниях нити с переменной массой на конце. Ющенко А. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 460—462

Численно решается для различных значений параметров на МЭСМ (малой электронно-счетной машине) система двух дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами, описывающая колебания упругой и упруго-вязкой нити постоянной длины с переменной, изменяющейся по линейному закону, массой на конце, полученная ранее автором (РЖМат, 1958, 9890).

Г. Н. Савин

3233. Практическое решение задачи о собственных значениях типа Хартри-Фока. Деттмар, Шлютер (Praktische Lösung von Eigenwertaufgaben des Hartree—Fockschen Typs. Dettmar H.-K., Schlüter A.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 5-6, 220—236 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Подробное математическое исследование решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2P_i(r)}{dr^2} - (T_i(r) + \varepsilon_i)P_i(r) = F_i(r)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

(функции T_i и F_i сложно зависят от искомых функций P_i) методом итераций.

В. К. Саульев

3234. Решение первой краевой задачи с криволинейной границей для уравнения $\Delta u(x,y,z)=r(x,y,z,u)$ методом конечных разностей. Ульман (Differenzenverfahren für die 1. Randwertaufgabe mit krummflächigen Rändern bei $\Delta u(x, y, z) = r(x, y, z, u)$. Uhlmann W.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 3-4, 130—139 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Выводятся разностные уравнения для узлов, лежащих вблизи криволинейной границы, являющиеся обобщениями соответствующих разностных уравнений для кубической сетки.

В. К. Саульев

3235. Расчет пологих оболочек методом конечных разностей. Красюков (Розрахунок пологих оболонок методом скінченних різниць. Красюков В. П.), Наук зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 247—258 (укр.; рез. русск.)

Излагается конечноразностный метод расчета пологих оболочек, перекрывающих прямоугольный план.

Путем замены производных их выражениями в центральных разностях для уравнений равновесия пологой оболочки составляются для произвольного узла сетки уравнения в конечных разностях. При этом, если значения искомых функций на контуре не известны, то уравнения в конечных разностях составляются также и для контурных точек. Значения во внеконтурных точках исключаются при помощи граничных условий, записанных предварительно в конечных разностях.

На расчете пологой оболочки, перекрывающей квадратный план, проводится сравнение результатов, полученнных методом конечных разностей и методом двойных тригонометрических рядов. Результаты сравнения приведены в таблице. Изучается также влияние шага сетки на точность расчета пологой оболочки методом конечных разностей.

Д. Ф. Давиденко

3236. Приближенный метод решения задач теплопроводности. Вейник А. И., Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 2, 3—12

Рассматривается приближенный метод решения задач теплопроводности, основанный на предварительном анализе физической обстановки процесса и исключении из соответствующих дифференциальных уравнений теплового баланса одной или нескольких независимых переменных, чаще всего пространственных координат. С этой целью заранее задаются кривой распределения температуры в сечении тела, имеющей вид параболы n-го порядка.

Из резюме автора.

3237. Решение параболических уравнений произвольного порядка методом сеток. Саульев В. К., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 4, 655—658

Методом сеток решается уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^{2m} U}{\partial x^{2m}} = 0, \qquad m = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

на которое обобщаются некоторые факты, известные для случая $m = 1$. Ищется функция $U(x, t)$, удовлетворяющая в области $D\ (0 < x < 1;\ 0 < t \leqslant T)$ уравнению (1) и граничным условиям:

$$U(x, 0) = f(x) \qquad (0 < x < 1);$$

$$\frac{\partial^{2p} U(0, t)}{\partial x^{2p}} = \frac{\partial^{2p} U(1, t)}{\partial x^{2p}} = 0 \quad (p = 0, 1, \ldots, m-1;$$

$$0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2}$$

Сеточное уравнение

$$\frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,k}}{l} + a(-1)^m \frac{\Delta^{2m} u_{i-m,\,k+1}}{h^{2m}} +$$

$$+ (1-a)(-1)^m \frac{\Delta^{2m} u_{i-m,\,k}}{h^{2m}} = 0$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{l}\right] - 1\right), \qquad (3)$$

где $u_{i,k} = u(ih, kl)$, $h = \frac{1}{n}$ (h и l — шаги соответственно по осям x и t),

$$\Delta^{2m} u_{i-m,k} = \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j C_{2m}^j u_{i+m-j,k},$$

$$C_{2m}^j = \frac{(2m)!}{j!\,(2m-j)!}, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1,$$

аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(l + h^2)$ в случае $a \neq \frac{1}{2}$ и $O(h^2 + l^2)$ в случае $a = \frac{1}{2}$. Вместо левого и правого граничных условий (2) берется соответственно

$$u_{-q,k} = -u_{q,k},$$

и

$$u_{n+1,k} = -u_{n-q,k} \qquad (4)$$

$$(q = 0, 1, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{l}\right].$$

Систему уравнений (3) — (4) можно записать в матричном виде:

$$Au^{(k+1)} = Bu^{(k)}\left(k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{T}{l} - 1\right]\right), \qquad (5)$$

где

$$u^{(k)} = \{u_{1,k}, u_{2,k}, \ldots, u_{n-1,k}\}';$$

$$A = E + a\frac{l(-1)^m}{h^{2m}} C^m;\ B = E + (1-a)\frac{l(-1)^m}{h^{2m}} C^m,$$

E — единичная матрица;

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $\lambda_l(A)$ и $\lambda_l(B)$ матриц A и B имеют при этом вид $\lambda_l(A) = 1 + a\frac{l}{h^{2m}} 2^{2m} \sin^{2m}\frac{l\pi}{2n}$; $\lambda_l(B) = 1 - (1-a)\frac{l}{h^{2m}} 2^{2m} \sin^{2m}\frac{l\pi}{2n}$. Относительно системы линейных алгебраических уравнений (5) формулируется теорема, устанавливающая условия ее разрешимости, устойчивости и сходимости к решению задачи (1), (2) при $l \to 0$, $h \to 0$. Для уравнения (1) можно, увязывая в одном сеточном уравнении то же число узлов, что и в (3), при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ написать более точные сеточные аппроксимации.

Ю. Ф. Харкеевич

3238. Оценки погрешностей для приближенных решений параболических дифференциальных уравнений. Коллац (Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen Parabolischer Differentialgleichungen. Collatz L.), Anais Acad. brasil. ciênc., 1956, 28, № 1, 1—9 (нем.)

Пусть B — область n-мерного пространства E_n, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью. Внутри цилиндра $B_t = B \times [0 \leqslant t \leqslant t_a]$, где t_a — конечное число, рассматривается оператор

$$Tu = u_t - f(x_j;\ t,\ u,\ u_j,\ u_{jj}), \qquad (1)$$

определенный на дважды непрерывно дифференцируемых функциях $u(x, t)$. Здесь $u_j = \partial u/\partial x_j$ и $u_{jj} = \partial^2 u/\partial x_j^2$ ($j = 1, \ldots, n$). Предполагается, что функция f монотонна по переменным u_{jj}, т. е. если $u_{11} \geqslant v_{11}, \ldots, u_{nn} \geqslant v_{nn}$, то имеет место неравенство

$$f(x_j,\ t,\ u,\ u_{11}, \ldots, u_{nn}) \geqslant f(x_j,\ t,\ u,\ v_{11}, \ldots, v_{nn}).$$

Пусть Γ_t — боковая поверхность B_t. При $t = 0$ и на Γ_t рассматривается оператор

$$Ru = u - k(x_j,\ t,\ u,\ u_\nu),$$

причем $k = 0$ при $t = 0$ (ν — внутренняя нормаль к Γ_t). Оператор Ru монотонен по u_ν при фиксированных x_j, t и u. Рассматривается также частный случай оператора (1)

$$Ru = u - A(x_j)\,u_\nu, \qquad (2)$$

заданного на Γ_t. В этом случае на B задается тождественный оператор и $A = 0$ на Γ.

Доказывается, что если для двух функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ справедливы неравенства $Tv < Tu$ в B_t и $Rv < Ru$ на $B + \Gamma$ и Γ_t, то $v < u$ во всем цилиндре $\overline{B}_t$ ($\overline{B}_t$ — цилиндр B_t вместе с основанием и Γ_t).

С помощью этого утверждения устанавливается ряд аналогичных результатов. Приведем один из них:

Пусть для двух функций u и v справедливы соотношения

$$|Tu| \leqslant \varepsilon_1, |Tv| \leqslant \varepsilon_2 \text{ на } B_t \text{ и } |Ru - Rv| \leqslant \delta \text{ на } \overline{B} + \Gamma_t,$$

где R определяется по формуле (2). Пусть также для любых $(x, t) \in \overline{B}_t$ и u_1, u_2, лежащих в некоторой ограниченной области, выполняется неравенство

$$|f(x_j;\ t,\ u_1,\ z_j,\ z_{jj}) - f(x_j,\ t,\ u_2,\ z_j,\ z_{jj})| \leqslant \tau,$$

где z — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда справедливо в B_t неравенство

$$|u - v| \leqslant \delta + (\tau + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,t.$$

Изучается также оператор вида $Tu = u_t - g(u) - h(x_j,\ t,\ u_j,\ u_{jj})$. При некоторых условиях показывается, что решения соответствующего уравнения удовлетворяют принципу максимума. Приводятся примеры использования полученных результатов в конкретных задачах.

А. И. Кошелев

3239. Замечание о неявном методе чередующихся направлений для численного решения задачи теплопроводности. Дуглас (A note on the alternating direction implicit method for the numerical solution of heat flow problems. Douglas Jim, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 403—412 (англ.)

Уравнение $\Delta u = \partial u/\partial t$ заменяется следующей устойчивой конечноразностной схемой:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x^2 w_{i,j,2n+1} + \Delta_y^2 w_{i,j,2n} &= \frac{w_{i,j,2n+1} - w_{i,j,2n}}{\Delta t} \\ \Delta_x^2 w_{i,j,2n+1} + \Delta_y^2 w_{i,j,2n+2} &= \frac{w_{i,j,2n+2} - w_{i,j,2n+1}}{\Delta t} \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Указывается, что если решение поставленной задачи существует и имеет ограниченные производные u_{xxxx}, u_{yyyy}, u_{xxt}, u_{yyt} и u_{tt}, то справедлив следующий результат: Теорема 1. Функция $w(x, y, t)$, построенная с помощью линейной интерполяции по значениям $w_{i,j,m}$, найденным из системы (1), сходится в среднем к решению задачи. Кроме того, норма разности $u(x, y, t) - w(x, y, t)$ имеет порядок $O[(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2]$. Теорема справедлива и в том случае, когда временной шаг удовлетворяет соотношению

$$\Delta t_n/(\Delta x)^2 = a + bt_n,$$

где $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ и $t_0 = 0$.

Далее рассматривается уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Конечноразностную систему уравнений для этой задачи

$$\Delta_x^2 w_{i,j} + \Delta_y^2 w_{i,j} = 0,$$

автор предлагает решать с помощью следующей схемы последовательных приближений:

$$\Delta_x^2 w_{i,j}^{(2n+1)} + \Delta_y^2 w_{i,j}^{(2n)} = \frac{w_{i,j}^{(2n+1)} - w_{i,j}^{(2n)}}{a_n},$$

$$\Delta_x^2 w_{i,j}^{(2n+1)} + \Delta_y^2 w_{i,j}^{(2n+2)} = \frac{w_{i,j}^{(2n+2)} - w_{i,j}^{(2n+1)}}{a_n},$$

где $a_n > 0$ — некоторые численные параметры. При этом $w_{i,j}^{(0)}$ — любая функция, определенная на точках решетки, удовлетворяющая граничному условию. Рассматриваются различные способы подбора a_n и дается оценка для объема вычислений. А. И. Кошелев

3240. О численных решениях некоторых интегро-дифференциальных уравнений при некоторых условиях. Адати (On the numerical solutions of some integro-differential equations under some conditions. Adachi Ryuzo), Kumamoto J. Sci., 1956, **A2**, № 4, 322—335 (англ.)

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x)) + \int_a^b \varphi(x, \xi, y(\xi), y'(\xi), y''(\xi))\,d\xi = 0, \quad (1)$$

где f и φ — заданные функции, a и b — фиксированные конечные числа.

Ищется численное решение этого уравнения при условии, что значения y и y' в некоторых точках x удовлетворяют заданным соотношениям.

Уравнение (1) заменяется следующей системой:

$$f(x_s, y_s, y_s', y_s'') + \sum_{l=0}^{m} R_l \varphi(x_s, \xi_l, y_l, y_e', y_l'') = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, m),$$

где R_l — коэффициенты формулы механических квадратур. После замены y_s', y_e', y_s'', y_l'' по формулам типа

$$y_s' = \sum_{i=0}^{p} B_{ij}\, y_{i+s-j},$$

получается алгебраическая система уравнений относительно y_i. В случае, когда функция f содержит вторую производную, к полученной системе добавляются два условия типа

$$g_1(y_0, \ldots, y_m, y'_0, \ldots, y'_m) = 0,$$
$$g_2(y_0, \ldots, y_m, y'_0, \ldots, y'_m) = 0.$$

Если f не содержит второй производной, то достаточно добавить одно условие типа

$$g(y_0, \ldots, y_m) = 0.$$

Если f не содержит производных, то условия не добавляются. Отдельно разбирается случай, когда функции f, φ и дополнительные условия зависят от y, y', y'' линейно. Приводится без доказательства оценка погрешности для решения и его производных. А. И. Кошелев

3241. Приближенное решение совместных уравнений при помощи преобразования переменных. Применения к авиационным задачам. Лангефош (Approximate solution of simultaneous equations by means of transformation of variables. Applications to aeronautical problems. Langefors B. Svenska Aeroplan A. B. Techn. Note, 1953, № 7, 26 pp.) (англ.)

3242. Практическое решение линейных систем методом матриц релаксации. Франкс (Résolution pratique des systèmes linéaires par la méthode des matrices de relaxation. Franckx Ed.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, **26**, № 7-12, 390—395 (франц.)

Квадратная матрица R порядка k называется матрицей релаксации, если матрица $AR = \| \beta_j^i \|_1^k$ удовлетворяет критерию релаксации $\max_i \frac{\sum_{j \neq i} |\beta_j^i|}{|\beta_j^i|} = \theta < 1$ (A — регулярная квадратная матрица порядка k). Доказывается теорема о сходимости метода с использованием матрицы релаксации при решении системы k линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{y}$ и ошибке метода. Показано, что ошибка на n-м шаге ограничена величиной $|\bar{y}|\,[1-(1-\theta)/k]^n$. Доказана также общая теорема, устанавливающая сходимость при некоторых условиях методов полной, верхней и нижней релаксации.

Отмечается, что теоремы остаются справедливыми, даже если на каждом этапе приближения менять матрицу релаксации, при условии, что каждая из матриц принадлежит множеству матриц с индексом релаксации, не большим θ. Д. Ф. Давиденко

3243. Решение линейных задач на электронных машинах. Пельтье (Mécanisation des problèmes linéaires sur machines électroniques. Peltier Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 8, 1003—1005 (франц.)

Изложен известный способ решения системы линейных алгебраических уравнений — способ исключения неизвестных. Отмечено, что точность способа зависит от порядка исключения, и указан оптимальный порядок. При машинном решении порядок исключения определен заранее. Автор приводит способ ввода данных в машину (с помощью перфокарт), при котором машинный порядок исключения оказывается оптимальным. Р. Д. Бачелис

3244. Влияние начальных погрешностей на обращение матрицы Гильберта. Атта (Effect of propagated erroron inverse of Hilbert matrix. Atta Susie A.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 1, 36—40 (англ.)

Влияние начальных погрешностей на обращение матрицы исследовалось экспериментальным путем. Обращалась плохо обусловленная матрица $H_6 = \| (i+j-1)^{-1} \|_{ij=1}^{6}$ (РЖМат, 1957, 5970, 6004) на цифровой машине „Оракле" методом Гивенса (РЖМат, 1956, 8347).

Этот метод обращения матриц и решения линейных систем основан на обращении данной матрицы в треугольную путем последовательных умножений на матрицы L_{ij} ($i > j$) такие, что если $A = L_{ij} A'$ (A' — предшествующая матрица), то $a_{ij} = 0$. Геометрический смысл умножения на L_{ij} — вращение вокруг O двумерного многообразия $x_i x_j$ и, возможно, равное растяжение по осям x_i и x_j.

При обращении H_6, округленной до 2^{-40} (предельная точность на „Оракле"), все элементы с точностью до пяти знаков совпали с элементами точной матрицы H_6^{-1} (РЖМат, 1957, 5970), при округлении H_6 до 10^{-9} результат хуже, а при округлении до 10^{-6} обращенная матрица не имеет ничего общего с H_6^{-1}. Однако оценка погрешности самого процесса обращения была хуже для матриц, более близких к H_6. Введение растяжений при вращениях (см. выше) не привело к существенному уменьшению погрешностей. М. Л. Бродский

3245. Замечание о расчете звездных колебаний. Уитни, Леду (Note sur le calcul numérique des pulsations stellaires. Whitney Ch., Ledoux P.), Bull. cl.

sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 9, 622—627 (франц.; рез. англ.)

При изучении радиальных колебаний звезды масса звезды предполагается разделенной на n дискретных слоев (сферических поверхностей), подчиненных соответствующим взаимодействиям. При таком рассмотрении уравнение колебаний звезды заменяется однородной системой n линейных алгебраических уравнений. Условие совместности последних дает n первых собственных значений ω_k, по которым определяются затем собственные решения ξ_k, представляющие собой относительные перемещения k-го слоя.

Этот метод применялся к трем моделям для случая $n = 25$. Проведено сравнение результатов вычислений для каждой модели с точным решением (однородная модель) или с решением, полученным численным интегрированием дифференциального уравнения (две другие модели).

Г. И. Бирюк

3246. Автоматическое вычисление детерминантов. Гуарне (Calcul automatique des déterminants. Gouarné René), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 8, 824—826 (франц.)

Приведено известное определение детерминанта как алгебраической суммы соответствующих произведений элементов и дана программа для вычисления детерминанта непосредственно по этому определению. Р. Д. Бачелис

3247. Замечания об автоматическом вычислении определителей и характеристических полиномов методом циклов. Гуарне (Remarques sur le calcul automatique des déterminants et polynomes caractéristiques par la méthode des cycles. Gouarné René), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 23, 1998—2000 (франц.)

Приведены блок-схемы программ и описания вычисления определителя квадратной матрицы A порядка n и характеристического полинома $|A - \lambda I|$. При вычислении определителя $|A|$ каждый его член получается в естественной форме $\pm a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$, т. е. сомножители располагаются в порядке возрастания индекса, означающего номер строки. Характеристический полином вычисляется, как и в другой работе автора (реф. 3246), но с применением рассматриваемой здесь схемы вычисления определителей.

В заключение проводится сравнение естественного метода и метода циклов (РЖМат, 1955, 4233), в котором выражение каждого члена определителя получается в виде произведения циклических членов. Отмечается, в частности, что естественный метод требует меньшей памяти машины, чем метод циклов. Г. И. Бирюк

3248. Автоматическое вычисление характеристических полиномов. Гуарне (Calcul automatique des polynomes caractéristiques. Gouarné René), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 14, 1114—1117 (франц.)

Приводится блок-схема программы и описание вычисления характеристического полинома квадратной матрицы A порядка n, записанного в виде

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^n + \sum_{s=1}^{n} (-\lambda)^{n-s} \sum' |a(s)|,$$

где вторая сумма содержит для каждого s C_n^s слагаемых, представляющих собой те из всевозможных миноров $|a(s)|$ порядка s, которые содержат на главной диагонали диагональные элементы матрицы A. Определители матриц $a(s)$ вычисляются по схеме, несколько отличающейся от схемы, предложенной автором ранее (реф. 3246). Г. И. Бирюк

3249. Вычисление центрально-симметричных пространственных рам с применением гиперматриц. Береш (Centrálszimmetriával bíró térbeli keretek számítása hipermatrixok alkalmazásával. Béres Elek), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), **1**, № 4, 577—592 (венг.; рез. русск., нем.)

Математическое исследование технических проблем теории упругости, вообще говоря, приводит к линейной системе уравнений. Матрица коэффициентов пространственных решетчатых конструкций, обладающих циклической симметрией, является циклически-симметричной. В настоящей работе исследуются центрально-симметричные рамы, горизонтальные балки которых во всех отношениях равны и образуют правильный m-угольник, вертикальные колонны также во всех отношениях равны, в вершинах многоугольника жестко присоединяются к балкам и на другом конце также жестко закреплены.

Автор показывает, что математическое исследование таких рам значительно упрощается, если использовать несколько свойств гиперматриц, состоящих из циклических блоков. Полученные результаты пригодны и для машинного вычисления. Из резюме автора

3250. Определение стержневых сил пространственных решетчатых опор с циклической симметрией с помощью гиперматриц. Береш, Ловаш-Надь, Сабо (Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderöinek meghatározása hipermatrixok alkalmazásával. Béres Elek, Lovass-Nagy Viktor, Szabó János), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956 (1957), **1**, № 4, 559—576 (венг.; рез. русск., нем.)

См. реф. 3249

3251. Замечание к работе Нечепуренко М. Н. «К вопросу сходимости приближенных методов». Халитова Н. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 79—82

Пусть имеется итеративный процесс вида

$$x_{n+1} = x_n - \Delta(x_n) \qquad (1)$$

для решения уравнения

$$\varphi(x) = 0. \qquad (2)$$

М. Н. Нечепуренко предложил исследовать сходимость процесса (1) переходом к другому уравнению $\psi(x) = 0$, для которого (1) является процессом Ньютона. В реферируемой заметке приводится пример, показывающий, что процесс Ньютона для $\psi(x) = 0$ может сходиться и в том случае, когда (2) не имеет решения. А. Н. Балуев

3252. Практические методы приближенной факторизации полиномов. Маркович (Les méthodes pratiques de factorisation approximative des polynomes. Markovitch Drag), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, кн. 7, 5—16 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Рассматривается практическое применение метода приближенной факторизации полиномов, изложенного в работах автора (Bull. Soc. math. phys. R. P. de Serbie, 1954, **6**, № 1-2; 1956, **8**, № 12). В частности, указанный метод применяется для нахождения вещественных и комплексных корней алгебраического уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu = 0. \qquad (1)$$

Для нахождения вещественного корня уравнение (1) разрешается относительно x в виде

$$x = \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \; a_{1\nu} \Big/ \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \; a_{0\nu}$$

и затем, в соответствии с этим представлением, составляется начальная матрица $A = \| a_{ij} \|$ и последовательность ее степеней $\{A^{2^n}\} = \{ \| a_{ij}(n) \| \}$. Тогда $\lim_{n\to 0} \frac{a_{ij}(n)}{a_{i-1,j}(n)} = \lambda \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$; $j = 0, 1, \ldots, m-1$) является вещественным корнем уравнения (1).

Для применимости метода в случае комплексных корней данное уравнение с вещественными коэффициентами предварительно преобразуется таким образом, чтобы коэффициенты стали комплексными. Это осуществляется при

помощи некоторого линейного преобразования переменной x, содержащего мнимую единицу.

Метод иллюстрируется конкретными примерами.

Г. И. Бирюк

3253. Аппроксимация квадратного корня. Акселрод (Square root approximation. Axelrod Leslie R.), Instrum. and Automat., 1958, **31**, № 6, 1042 (англ.)

Предлагаются следующие формулы:

$\sqrt{A^2+B^2} \approx A + 0{,}5\,B^2/A$, если $B^2/A^2 \geqslant 0{,}5$, $\sqrt{A^2+B^2} \approx 1{,}1\,A + 0{,}3\,B^2/A$, если $B^2/A^2 \leqslant 0{,}5$. В. К. Саульев

3254. Формулы численного дифференцирования. Спицбарт, Мейкон (Numerical differentiation formulas. Spitzbart A., Macon N.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 721—723 (англ.)

С помощью элементарных преобразований авторы получают еще одну формулу для производной k-го порядка:

$$h^k y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} A^k_{mi}\, y_i + O(h^{n+1}).$$

Здесь положено $x = x_0 + mh$, $y_i = y(x_0 + ih)$,

$$A^k_{mi} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{i+j}\, \frac{1}{j!} \binom{j}{i} \sum_{r=k}^{j} p_k(r)\, S^r_j\, m^{r-k},$$

S^r_j — числа Стирлинга первого рода, $p_k(r) = \sum_{j=1}^{k} S^j_k r^j$

(РЖМат, 1958, 744). Указывается на связь коэффициентов A^k_{mi} с матрицей Вандермонда. Я. И. Алихашкин

3255. Квадратурные формулы для кораблестроительных расчетов. Карпов А. Б., Тр. Горьковск. политехн. ин-та, 1958, **14**, № 1, 23—33

Предлагаются три квадратурные формулы, учитывающие специфические особенности судостроительных кривых (плавность, наличие не более одного максимума и не более двух точек перегиба, равенство нулю концевых ординат и др.) и предназначающиеся специально для кораблестроительных расчетов. В. К. Саульев

3256. Новые приспособления для синтеза и анализа Фурье, а также для выполнения родственных задач на разложение в ряды. Меддьеши (Új készülék Fourier-szintézis és analízis, valamint hasonló sorfejtési feladatok elvégzésére. Medgyessy Pál), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, **2**, 179—185 (венг.; рез. русск., франц.)

3257. К вопросу о конформном преобразовании одного эллипсоида на другой эллипсоид. Пик (Zur Frage der konformen Transformation von einem Ellipsoid auf ein anderes Ellipsoid. Pick Miloš), Studia geophys. et geod., 1958, **2**, № 2, 174—177 (нем.; рез. русск.)

Приводятся довольно громоздкие приближенные выражения коэффициентов формулы для вычисления величины искажения длины при конформном отображении одного эллипсоида на другой (РЖМат, 1958, 6230).

В. К. Саульев

3258. Испытание надежности выравненных функций. Херфурт (Zuverlässigkeitsprüfung ausgleichender Funktionen. Herfurth G.), Technik, 1957, **12**, № 10, 690—692 (нем.)

Для проверки гипотезы о прямолинейности функциональной зависимости между двумя величинами, получаемой в результате применения метода наименьших квадратов к случайным результатам наблюдений, предлагается использовать F-распределение (см. напр. РЖМат, 1958, 5054 К). Кроме того, предлагается сильно упрощенный критерий, состоящий в проверке того, что если y_{ik} — измерения величины y при $x = x_i$; $\bar{y}_i$ — среднее из y_{ik}, Y_i — ордината выравненной функции $Y = ax + b$, соответствующая $x = x_i$, то для всех i должно выполняться неравенство $|\bar{y}_i - Y_i| \leqslant \max_k |\bar{y}_i - y_{ik}|$. М. Л. Бродский

3259. Исчисление конечных разностей. Применение в автоматических вычислениях для составления таблиц. Бедон (Le calcul par différences. Son application au calcul automatique pour l'établissement de barèmes. Bédon R.), Rev. métrol. prat. et légale, 1956, **13**, № 11, 580—602 (франц.)

Дано известное определение конечной разности n-го порядка. Приведены таблицы для записи конечных разностей и способ составления таблицы по известным для одного значения аргумента конечным разностям всех порядков. Рассказано об использовании машин для этой цели. Установлена аналогия с треугольником Паскаля. Приведены два примера использования конечных разностей. Особо выделено применение конечных разностей для вычисления объемов тел. Известная формула Симпсона (для приближенного интегрирования) дается автором под названием „формулы трех уровней" и преобразуется к виду в конечных разностях. Приведены числовые примеры. Указана возможность замены трансцендентной функции на алгебраическую. Приведено большое количество таблиц. Р. Д. Бачелис

3260. Анализ и предсказание морских приливов. Кульми (Analyse et prédiction des marées. Coulmy Geneviève), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 13, 1960—1962 (франц.)

Рассматривается два метода определения высоты h_t морского прилива, которая в момент t, для данного места, выражается формулой

$$h_t = A + \sum A_i \cos(q_i t - \alpha_i).$$

Один метод состоит в разбиении интервала наблюдений на отдельные подынтервалы, число которых равно числу неизвестных величин, и составлении на этой основе системы линейных уравнений. Решение такой системы дает искомые величины с хорошей теоретической точностью.

Второй метод менее громоздок и состоит в выделении одной за другой различных волн, составляющих морской прилив, с их амплитудами A_i и фазами α_i, и исключении всех других волн. Это исключение осуществляется линейными комбинациями ординат. При этом коэффициент амплитуды исключаемой волны выбирается по возможности минимальным, а для сохраняемой волны — максимальным. Выбранные на этом принципе комбинации, приведенные в статье, доставляют, по утверждению автора, достаточную точность искомых значений амплитуды и фазы для каждой волны. Г. И. Бирюк

3261. Улучшение сходимости некоторого класса непрерывных дробей. Рутисхаузер (Beschleunigung der Konvergenz einer gewissen Klasse von Ketten-brüchen. Rutishauser Heinz), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 5-6, 187—190 (нем.)

Показано, как можно преобразовать при помощи повторного применения формул Бауэра и Мюра некоторый класс плохо сходящихся непрерывных дробей, чтобы они сходились асимптотически, как геометрический ряд со знаменателем 0, 17157... Резюме автора

3262. Об одном графическом способе интегрирования и дифференцирования. Комладзе Г. М., Тбилисис сахелмцифо педагогиури институтис шромеби, Тр. Тбилисск. гос. пед. ин-та, 1957, **11**, 615—638 (груз.; рез. русск.)

Обобщается известный графический способ интегрирования Франка (Матем. сб., 1933, **40**, № 2), который в общем рассмотрении оказывается частным случаем, соответствующим квадратурной формуле трапеции. Способ легко переносится на случай графического дифференцирования, графического вычисления интеграла Стилтьеса, графического интегрирования произведений двух функций, вычисления двойного интеграла. Основываясь на предлагаемом способе, автор дает метод графического решения диффе-

ренциальных уравнений, который также является обобщением известного графического способа Франка решения дифференциальных уравнений.

Работа хорошо иллюстрируется примерами.

М. А. Алексидзе

3263. Применение графического интегрирования к изучению воздушных резервуаров насосных станций. Эсканд (Intégration graphique appliquée à l'étude des réservoirs d'air des stations de pompage. Escande Léopold), C. r., Acad. sci., 1958, **246**, № 14, 2079—2082 (франц.)

Графически интегрируются два обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка, описывающих соответственно фазу сжатия и расширения воздушной массы в резервуаре воздухопровода насоса. Интегральные кривые строятся по радиусу кривизны в предположении их постоянства на малых участках кривой. В качестве вспомогательной кривой используется гипербола, параметры которой определяются структурой дифференциального уравнения.

Ю. Ф. Харкеевич

3264. Графическое решение линейного уравнения теплопроводности с радиацией. Нагаи (Graphical solution of linear heat flow with radiation. Nagai Mashige), J. Phys. Soc. Japan, 1956, **11**, № 3, 329—330 (англ.)

Приведено графическое изображение семейства кривых (соответствующих различным условиям), представляющих собой решение одномерного стационарного уравнения распределения температуры стержня.

В. К. Саульев

3265. Быстрое решение квадратного уравнения. Уилер (Solving quadratics quickly. Wheeler R. F.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 336, 98—101 (англ.)

Построена бездетерминантным методом элементарная номограмма из выравненных точек для квадратного уравнения.

П. В. Николаев

3266. Стереоскопическая номография и пространственная анаморфоза с наперед заданной шкалой. Вильнер И. А., Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 2, 121—133 (рез. франц.)

Предлагается для пространственной номограммы (из выравненных точек) уравнения, уже представленного в детерминантной форме, построение плоских стереоскопических изображений; отсчет по этим изображениям рекомендуется проводить через светофильтры с помощью шарнирной линейки. Приводятся примеры расчета таких стереоскопических номограмм для уравнения типа Коши, Кларка с четырьмя переменными. Затронутый автором вопрос о пространственной анаморфозе с наперед заданной шкалой в статье не разработан.

П. В. Николаев

3267. Примеры номографического представления симметрической функциональной связи посредством номограмм. Пал, Тот (Példák szimmetrikus függvénykapcsolatoknak pontmezös nomogrammokkal való ábrázolására. Pál Sándor, Tóth Károly), Magyar tud. akad. alkalm. mat. int. közl., 1953, **2**, 367—381 (венг.; рез. русск., нем.)

Симметрические уравнения в переменных z_1 и z_2

$$\begin{vmatrix} f(z_1, z_0) & g(z_1, z_0) & h(z_1, z_0) \\ f(z_2, z_0) & g(z_2, z_0) & h(z_2, z_0) \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

или

$$f(z_1, z_0)\, f(z_2, z_0)\, F_{340} + (f(z_1, z_0) + f(z_2, z_0))\, G_{340} + H_{340} = 0, \qquad (2)$$

где

$$\begin{aligned} F_{340} &= \varphi_0^{(1)} f_{34} + \psi_0^{(1)} g_{34} + \chi_0^{(1)} h_{34}, \\ G_{340} &= \varphi_0^{(2)} f_{34} + \psi_0^{(2)} g_{34} + \chi_0^{(2)} h_{34}, \\ H_{340} &= \varphi_0^{(3)} f_{34} + \psi_0^{(3)} g_{34} + \chi_0^{(3)} h_{34}, \end{aligned} \qquad (3)$$

можно представить при помощи номограммы с бинарным полем.

В случае, если детерминант уравнения (2) равен нулю, например, если функции $\chi_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ тождественно исчезают, то можно написать уравнения (1) или (2) в виде

$$\begin{vmatrix} f^*(z_1, z_0) & g^*(z_1, z_0) & h^*(z_1, z_0) \\ f^*(z_2, z_0) & g^*(z_2, z_0) & h^*(z_2, z_0) \\ F_{34}^* & G_{34}^* & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

В этом случае следует также рассматривать такие непроективные преобразования для выбора подходящей формы номограммы, которые соответствуют преобразованию детерминанта Соро (4), т. е. детерминанта

$$\begin{vmatrix} f^*(z_1, z_0) + p_0 h^*(z_1, z_0) & g^*(z_1, z_0) + p_0 h^*(z_1, z_0) h^*(z_1, z_0) \\ f^*(z_2, z_0) + p_0 h^*(z_2, z_0) & g^*(z_2, z_0) + q_0 h^*(z_2, z_0) h^*(z_2, z_0) \\ F_{34}^* & G_{34}^* \qquad 0 \end{vmatrix} = 0,$$

образованного посредством произвольных функций p_0 и q_0.

В случае (4) бинарное поле (z_3, z_4) вообще вырождается так, что применяют бинарную шкалу (z_3, z_4). Но если функция (4) не зависит от переменной z_4, то представление становится проще, так как можно обойтись без бинарных скал.

Эти замечания могут быть с выгодой использованы в двух встречающихся на практике случаях.

A. Békéssy

ТАБЛИЦЫ

3268. Таблицы значений 16 интегралов алгебраическо-гиперболического типа. Лин Чжи-бин (Tables of values of 16 integrals of algebraic-hyperbolic type. Ling Chih-Bing), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 59, 160—166 (англ.)

Приводятся таблицы значений интегралов

$$I(k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty \frac{x^k F(x)\, dx}{\operatorname{sh} 2x \pm 2x}$$

для функций $F(x)$ следующего вида: 1, e^{-2x}, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x - \operatorname{sh} x$, $\operatorname{cth} x - \operatorname{ch} x$. Области изменения параметра k для всех функций различные. Все таблицы даны с шестью десятичными знаками. Дается краткое указание о способе вычисления каждого из упомянутых выше интегралов. Контроль осуществляется с помощью формул рекуррентного типа.

Л. А. Сорокина

3269. Таблица коэффициентов для определения длины окружностей овалов. Когаку кэнкю, Civil Engng Mag., 1958, **7**, № 5, 202 (японск.)

3270 К. Указатель математических таблиц из всех областей науки. Шютте (Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen aus allen Gebieten der Naturwissenschaften. Schütte Karl. München, R. Oldenbourg, 1955, 143 S., 14.50 DM) (нем.)

Книга в некотором отношении представляет карманный вариант указателя Флейшера, Миллера и Розенхеда (Fletcher A., Miller J. C. P., Rosenhead L., An. index et mathematical tables, New York, McGraw-Hill, 1946). После вводной главы о численных методах и вычислительных машинах следуют главы о математических таблицах: логарифмы; логарифмы тригонометрических функций; тригонометрические функции; простые функции, произведенные из элементарных функций; теория чисел; элементарные трансцендентные функции; эллиптические функции и интегралы, специальные функции и функции Бесселя; вероятностные функции и другие высшие трансцендентные функции. Затем следуют главы о таблицах, встречающихся в физике, химии, технике, геодезии и геофизике, астрономии и астрофизике, метеорологии и навигации. В заключительной главе перечисляются различные собрания таблиц, формул и обратные таблицы. Имеются указатели авторов, институтов и сокращений. Приводятся место и даже публикации таблиц, а также число десятичных знаков. Интервалы табулирования и способы интерполяции не указываются. J. Todd

Сокращенный перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 414.

3271 К. Таблица гиперболических синусов и косинусов (Table of hyperbolic sines and cosines, *X*-2 to *X*-10. (Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., № 45). Washington, U. S. Govt Printing Office, 1955, v. 81 pp., 55 c.) (англ.)

Девятизначные таблицы $\sinh x$ и $\cosh x$ для $x = 2{,}0\,(0{,}001)\,10{,}0$. Fox L.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 541.

3272 К. Пятизначные логарифмические и другие математические таблицы. Изд. 2-е. Мюллер (Päť miestne logaritmické a iné matematické tabulky. 2. vyd. Müller Fritz. Bratislava, SVTL, 1957, 208 s., 18 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. Slov. knihy, 1957, 8, № 8, 247 (словацк.)

3273 К. Таблицы логарифмов. Васкес-Кейпо (Tablas de logaritmos. 36. a ed. Vazquez Queipo Vicente. Madrid. Hernando, s. a., 326 p., il., 55.00 ptas), Bibliogr. hisp. 1957, **16**, № 11, 255 (исп.)

См. также: 2533, 2538К, 2776, 2786, 2787, 2898

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

3274. Применение цифровых вычислительных машин в исследовании функциональных отношений. Бокс, Каути (Application of digital computers in the exploration of functional relationships. Box G. E. P., Coutie G. A.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 1, 100—107, Discuss., 108—111 (англ.)

Работа посвящена исследованию характеристик функций $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, для которых задание аргументов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и получение значений η производятся экспериментально, путем измерений.

Описывается процедура экспериментального нахождения максимума (или минимума) η, в предположении единственного максимума (минимума), состоящая в следующем. Некоторая точка $(\xi_{01}, \ldots, \xi_{0k})$ берется за исходную, а затем производится обмер функции в окрестности этой точки. Из полученных результатов измерений методом наименьших квадратов находятся коэффициенты разложения η в ряд Тейлора в окрестности точки $(\xi_{01}, \ldots, \xi_{0k})$. В зависимости от числа удерживаемых членов разложения рассматривается процедура либо первого порядка, либо второго порядка. В процедуре первого порядка вычисляется направление нормали к линии уровня, соответствующей $f(\xi_{01}, \ldots, \xi_{0k})$. Некоторая точка на нормали вновь берется за исходную, и процедура повторяется. Вблизи точки максимума (минимума) или в случае резкой зависимости от аргументов рекомендуется процедура второго порядка. В этом случае определяются проекции нормали к линии уровня на такие координатные направления, в которых квадратичная форма разложения η в ряд Тейлора с членами второго порядка имеет канонический вид. Переход к этим координатам симметризует ход линий уровня и позволяет повысить точность вычислений. В случае большого k для определения проекций нормали рекомендуется применение быстродействующих вычислительных машин.

Описывается также процедура определения неизвестных параметров в дифференциальном уравнении, которому подчиняется η. Если

$$\frac{d\eta}{dt} = \varphi(t, \theta_1, \ldots, \theta_p),$$

где $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — неизвестные параметры, то, произведя ряд замеров $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in} (\eta_{il} = \eta_i(t_i))$, можно найти $\theta_1, \ldots, \theta_p$, исходя из требования минимизации функции

$$S(\theta_1, \ldots, \theta_p) = \sum_{i=1}^{n} [\eta_{il} - f(t_i, \theta_1, \ldots, \theta_p)]^2,$$

где $f(t_i, \theta_1, \ldots, \theta_p)$ — значение решения дифференциального уравнения. Функция $S(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ минимизируется по описанной процедуре, причем уравнение интегрируется методом Рунге—Кутта на быстродействующей вычислительной машине. Метод легко распространяется на системы дифференциальных уравнений. Специально рассматривается вопрос оценки точности получаемых результатов. Производится числовой пример нахождения параметров в системе трех дифференциальных уравнений, описывающих поведение трехкомпонентной химической реакции. А. П. Ершов

3275. Применение метода наименьших квадратов в проектировании электрических систем. Арон (The use of least squares in system design. Aaron M. Robert), IRE Trans. Circuit Theory, 1956, **3**, № 4, 224—231 (англ.)

Обсуждается процесс проектирования электрических систем. Автор разделяет этот процесс на три этапа, на каждом из которых имеется, по выражению автора, обратная связь от проектируемой системы к проектировщику, получающаяся при исследовании ошибки — разницы в поведении идеальной и реальной системы. Этими этапами являются: 1) построение математической модели, 2) физическая реализация системы и 3) регулировка системы (alignment). Работа проектировщика на каждом этапе по существу сводится к минимизации получающейся ошибки.

Приводится краткий обзор математических методов минимизации: метод наискорейшего спуска и собственно метод наименьших квадратов. Высказываются некоторые практические соображения по применению этих методов при регулировке реальных систем. А. П. Ершов

3276. Улучшенный метод быстрого умножения для последовательных цифровых вычислительных машин. Шимшони (An improved technique for fast multiplication on serial digital computers. Shimshoni M.), Electron. Engng, 1958, **30**, № 366, 504—505 (англ.)

В последовательных машинах можно сократить время умножения, если заранее известно, что множитель имеет

m значащих разрядов, а множимое — r значащих разрядов, причем $m < n$ и $r < n$, где n — максимальное количество разрядов числа. При умножении множитель сдвигается таким образом, что он занимает m младших разрядов, а множимое занимает r старших разрядов, затем выполняется умножение. Приводится формула, позволяющая определить положение запятой произведения. Этот метод умножения был применен при вычислении коэффициентов кристаллической решетки на машине „Сантес Зебра", что дало экономию во времени приблизительно 50%.

Описанный метод дает ускорение только в машинах, оперирующих с числами с фиксированной запятой.

А. Н. Чуйкин

3277. Два приема программирования для двухадресных вычислительных машин. Липтон (Two programming techniques for one-plus-one address computers. Lipton S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 3, 274—278 (англ.)

Рассматриваемые два приема программирования, разработанные для вычислительной машины «Эллиот-401», особенно удобны для машин с двухадресной системой команд, в которых один из адресов используется для задания следующей выполняемой команды.

Первый прием состоит в использовании специальной программы, осуществляющей печать проверяемых программ в определенном логическом порядке, для обнаружения ошибок логического характера, допущенных при составлении программы. В дальнейшем буквами I и D обозначаются адреса команды, задающие адрес следующей команды и адрес аргумента операции соответственно. В командах передачи управления D задает адрес следующей команды при выполнении логического условия. Буквой A обозначается адрес самой команды.

Общий алгоритм работы программы печати следующий. Начиная с некоторой заданной начальной команды проверяемой программы, команды печатаются в порядке, определяемом адресом печатаемой команды. При возвращении к уже отпечатанной команде, предполагая цикл, производится печать команд, определяемых адресом D последней команды передачи управления. В заключение печатается содержание всех ячеек памяти, оставшихся непросмотренными. Логические ошибки обнаруживаются при рассмотрении результатов печати. Более детализированный алгоритм работы гораздо сложнее и позволяет получить удобное для анализа расположение печатаемых команд, даже в случае больших и сложных программ. Это достигается за счет введения вместе с программой таблицы контрольных справок открытого и закрытого типов, к которым обращаются при определенных обстоятельствах.

В отличие от программы, описанной Гиллом (Gill S., Proc. Roy. Sos. A., 1951, **538**, 206), в рассматриваемой программе печать каждой команды производится только один раз и, следовательно, имеется возможность печати команд и проверки в редко используемых ветвях, что долго может не иметь места при печати команд в порядке их действительного выполнения. Более детальному описанию работы программы печати посвящена приблизительно одна страница. Кратко описываются основные стадии анализа напечатанного материала. Отмечается, что основным фактором, определяющим удобное для анализа расположение напечатанных последовательностей команд, является выбор начальной команды, для облегчения которого предлагается использовать предварительный анализ блок-схемы программы, а также возможность предварительных прогонов программы с ограничением печати, Составленная для машины «Эллиот-401» программа печати занимает 320 ячеек и максимум 256 ячеек для рабочих ячеек, хранения таблиц контрольных справок, начальных адресов подпрограмм и т. д.

Второй, весьма кратко описываемый прием заключается в использовании разрядов операционной группы и адреса команды возврата при обращении к специальной программе операций с плавающей запятой для задания двух аргументов операции с плавающей запятой, или адреса аргумента и адреса помещения результата, или адреса помещения содержимого аккумулятора и замены его на содержимое по второму адресу. Выбор характера использования и задание вида операции производится заданием соответствующего входа в специальную общую программу стандартных операций с плавающей запятой. Как полагает автор, это представляет эффективный компромисс между чисто интерпретативным заданием такого рода операций, ведущим к слишком большому снижению скорости, и прямым программированием, дающим более быстродействующие программы, но связанным с большими затратами труда.

В. И. Смирнов

3278. Команда подсчета циклов для трехадресной электронной цифровой вычислительной машины. Лунелли (Un comando di computo di cicli per una calcolatrice elettronica aritmetica a tre indirizzi. Lunelli Lorenzo), Ricerca scient., 1957, **27**, № 11, 3381—3394 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Описывается дополнительная команда для электронной цифровой вычислительной машины CRC 102A, установленной в вычислительном центре Миланского политехнического института. Модификация адресов выполняется в этой машине с помощью нормальных команд сложения и вычитания. Для облегчения модификации адресов предлагается использовать следующую команду: а) вычесть единицу из разрядов числа, находящегося в ячейке первого адреса, которым соответствуют единицы в числе, находящемся в ячейке второго адреса, и поместить результат снова в ячейку первого адреса; при вычитании число считается целым и положительным; б) если в результате вычитания, выполненного согласно а), содержимое всех выбранных разрядов отлично от нуля, следующая команда выбирается по третьему адресу; если содержимое хотя бы одного разряда равно нулю, выполняется следующая по очереди команда. Описывается дополнительное оборудование, необходимое для выполнения этой команды, и рассматриваются примеры использования этого оборудования для счета циклов и для модификации адресов. В приложении излагается ряд общих соображений о структуре и использовании трехадресной команды для модификации адресов. Библ. 14 назв.

А. В. Шилейко

3279. Вычислительная машина УНИВАК АФ/КРК с магнитным запоминающим устройством (UNIVAC AF/CRC magnetic computer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 250—252 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 3) (англ.)

Сообщается о демонстрации фирмой «Ремингтон Рэнд» цифровой вычислительной машины УНИВАК АФ/КРК (UNIVAK AF/CRC), созданной для ВВС США. Эта вычислительная машина занимает площадь 25 $м^2$. Вычислительный блок смонтирован в шкафе размером 1,8×1,95×0,45 $м$. На отдельной стойке помещается пульт управления, входные и выходные блоки. В машине применяются два запоминающих устройства: одно на магнитных сердечниках и второе на магнитном барабане 125×75 $мм$, вращающемся со скоростью 16 500 об/мин.

В машинных элементах используются импульсные усилители типа «Ферректор» (Ferractor). Два усилителя «Ферректор», каждый из которых заменяет лампу, помещаются в одну капсулу диаметром 15 $мм$ и толщиной 6 $мм$. Четыре таких капсули монтируются на тонкой изоляционной пластинке размером в почтовую открытку совместно с сопутствующими деталями. Эти пластинки соединяются с разъемами. Таких пластинок в машине около 60.

Магнитное запоминающее устройство было специально сконструировано для этой машины. Барабан покрыт никель-кобальтовым сплавом. Зазор между покрытием и головкой равен 25 *мк*. Барабан помещен в герметизированный кожух, заполненный гелием, который дает меньшее сопротивление трения и лучше отводит тепло. Детали машины охлаждаются принудительным прогоном воздуха. Арифметический блок работает с частотой 660 *кгц*. Сложение двух 10-значных чисел идет за 90 мсек. или свыше 11000 сложений в 1 сек., умножение —от 0,3 до 1,7 мсек. или до 3000 в 1 сек. В. Д. Князев

3280. Вторая модель УНИВАК-ЛАРК (The second Univac-Larc), Computers and Automat., 1957, **6**, № 9, 24 (англ.)

Сообщается, что судостроительным управлением военно-морского флота США заказан второй экземпляр сверхбыстродействующей цифровой вычислительной машины УНИВАК-ЛАРК. Машину предполагается разместить в Лаборатории прикладной математики военно-морского флота (Вашингтон).

Основное назначение машины —расчет ядерных реакторов (в первую очередь судовых), а также решение ряда задач в области гидродинамики, распространения радио- и ультразвуковых волн, расчета корпуса скоростных судов и подводных лодок. Специально для этой модели машины корпорация «Дженерал Динамикс» разработала быстродействующее фотовыводное устройство «Характрон» (скорость вывода порядка 15 000 знаков в 1 сек.).

Приводятся основные технические характеристики и краткое описание конструкции УНИВАК-ЛАРК (РЖМат, 1958, 7243). Стоимость машины составит около 3,5 млн. долл; она должна была быть изготовлена к концу 1958 г. А. А. Крупский

3281. Цифровая вычислительная машина УНИВАК-Сайнтифик (США). (U. S. A. Univac scientific digital computer), Interavia Air Letter, 1958, № 3979, 5 (англ.)

В вычислительном центре Паоло Альто (Калифорния) отделения управляемых снарядов фирмы «Локхид» (Lockheed Missile Systems division) установлена новая вычислительная машина УНИВАК-Сайнтифик 1103А, которую осенью 1958 г. путем добавления 10 устройств с магнитной лентой предполагали превратить в модель 1105, первую машину этого типа, используемую в частной фирме.

3282. Какие задачи решаются. Электронные вычислительные машины в Италии. Мондини (Quali problemi risolvono. Le calcolatrici elettroniche in Italia. Mondini Alberto), Civiltà macchine, 1958, **6**, № 1, 14—17, 91 (итал.; рез. англ.)

Приводятся данные ряда электронных вычислительных машин, работающих в Италии. Машина ФИНАК (FINAC) фирмы «Ферранти» (Англия) установлена в Национальном институте прикладных вычислений в Риме. Машина оперирует с числами в двоичной системе счисления и выполняет операцию умножения за 2,16 мсек. Длина слова в машине соответствует 12 десятичным разрядам. Основное запоминающее устройство машины на электронно-лучевых трубках имеет емкость 16 400 двоичных разрядов. Вспомогательное запоминающее устройство на магнитном барабане с никелевым покрытием имеет емкость 655 360 двоичных разрядов. Передача группы в 64 числа из запоминающего устройства на магнитном барабане занимает 40,32 мсек. Ввод информации в машину совершается со скоростью 1000 двоичных разрядов в 1 сек., а вывод информации — со скоростью 150 знаков в 1 сек. Машина содержит 4000 электронных ламп, 2500 конденсаторов и 15 000 сопротивлений. Было решено около 100 систем линейных алгебраических уравнений от 5-го до 60-го порядка, а также решались задачи на вычисление определенных интегралов, интегрирование систем дифференциальных уравнений и табулирование большого количества разнообразных функций. В Миланском политехническом институте установлена машина КРК 102А совместно с запоминающим устройством на магнитной ленте CRC 126 фирмы «Компютер Рисерч» (Computer Research Corp.) (США). Машина оперирует числами с плавающей запятой. Имеется специальная диодная схема для перевода чисел из двоичной системы в десятичную и из десятичной в двоичную. Емкость магнитной ленты, содержащейся в одной кассете запоминающего устройства КРК-126, составляет 120 000 чисел (см. также РЖМат, 1958, 6256, 10358). Машина используется для решения математических и логических задач. Отмечаются также машина ИБМ-650, используемая фирмой «Dalmine» в Милане, цифровая машина для решения дифференциальных уравнений БЕНДИКС Д-12 (США), установленная в техническом факультете университета в Болонье, и моделирующее устройство ФИЛБРИК в Турине.

А. В. Шилейко

3283. Вычислительная машина ФИНАК (FINAC Instituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 256 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 3) (англ.)

Вычислительная машина ФИНАК (МАРК I Манчестерского университета) в течение 1956 г. работала с коэффициентом полезного действия, равным 89%. На машине установлено быстродействующее печатающее устройство, дающее 150 строк в 1 мин. В. Д. Князев

3284. Вычислительная машина 402F фирмы «Эллиот». (Elliott Brothers Limited, London — Elliott 402F digital computer), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 255—256 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 3) (англ.)

Сообщается, что фирма «Эллиот» выпустила вычислительную машину 402 F (модернизированная модель 402), позволяющую вести вычисления с плавающей и с фиксированной запятой. Для запоминания порядка числа отводится 7 двоичных разрядов, для мантиссы числа — 25 двоичных разрядов. Операции с плавающей запятой проводятся с округлением. Время сложения чисел как в системе с плавающей запятой, так и с фиксированной запятой одинаково и равно 204 мксек, умножение и деление производятся за 3,3 мсек.

Емкость запоминающего устройства с магнитным барабаном доведена до 3988 кодов. Емкость быстродействующего запоминающего устройства на линиях задержки равна 16 кодам. Входные и выходные устройства используют перфоленту и перфокарты. В. Д. Князев

3285. Вычислительная машина «Пегас» фирмы «Ферранти». (Pegasus Ferranti Ltd, England), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 256 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 3) (англ.)

Сообщается о начале регулярной работы вычислительной машины «Пегас» (Pegasus) в Лондонском вычислительном центре (London Computer Center). При испытании машина показала коэффициент полезного действия, равный 90%. Библиотека подпрограмм содержит 20 единиц и вводится со специального устройства, причем при помощи специальных команд подпрограммы ставятся на свои места в общей программе. В. Д. Князев

3286. Вычислительная машина «Пегас» фирмы «Ферранти». (Pegas', Ferranti Ltd), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 14—15 (Digital Computer Newsletter, 1955, **7**, № 2) (англ.)

Приводятся подробные технические данные вычислительной машины «Пегас» (РЖМат, 1956, 1713, 2528, 4133).

В. Д. Князев

3287. Вычислительные машины Национального бюро стандартов. (National Bureau of Standards), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, **2**, № 2, 4—7 (Digital computer newsletter, 1954, **7**, № 2) (англ.)

Сообщается о перемещении вычислительной машины СЕАК в другое здание. В связи с перемещением в машине были сделаны некоторые изменения. Был установ-

лен новый счетчик регенерации для электростатического запоминающего устройства.

Узлы электростатического запоминающего устройства были размещены так, чтобы выводы отклоняющих систем были бы возможно короче. Логические шасси по всей машине были размещены таким образом, чтобы максимально сократить сигнальные выводы. Устройства для приготовления входных данных вынесены из машинного зала.

Запас стандартных программ вычислительной машины СЕАК пополнился программами умножения матриц до 250-го порядка (не обязательно симметричных), обращения матриц до 100-го порядка, решения системы линейных уравнений до 750-го порядка, нахождения характеристических корней и векторов для симметричных матриц до 30-го порядка, а также программами для ортонормализации, вычисления трансцендентных функций высшего порядка и т. д.

Под руководством Холта (A. W. Holt) был разработан диодный усилитель, основанный на использовании переходного процесса в полупроводниковых диодах. Такие усилители могут быть использованы для построения триггерных схем, сдвигающих регистров, линий задержки и т. д. Чтобы диод работал как усилитель, к нему должно быть подведено питание переменного тока с частотой 30 *мгц*. Скорость передачи информации в таких усилителях может быть соизмерима с питающей частотой.

При Национальном бюро стандартов сконструирована большая универсальная вычислительная система для проведения вычислений, требующих непрерывной приемки больших объемов внешней информации. Система разработана Лейнером (A. L. Leiner), Нотцем (W. A. Notz), Смитом (J. L. Smith) и Вейнбергером (A. Weinberger). В системе используются те же элементы, что и в вычислительной машине СЕАК. Скорость работы в 10 — 15 раз выше, чем у машины СЕАК, за счет использования быстродействующего запоминающего устройства со временем выборки от 3 до 12 мксек. Это запоминающее устройство может быть постоянно соединено почти со всеми другими блоками системы: группой быстродействующих входных и выходных устройств и внешних запоминающих устройств, различных арифметических устройств и входных и выходных устройств специального назначения, а также с блоком управления. Связь между блоками ведется множеством независимых магистралей и данные передаются из внешних блоков к запоминающему устройству и обратно без накладок. Хотя система была приспособлена для целей военно-воздушных сил США, но она может быть использована и по другому назначению, например, используя небольшой арифметический узел и развитую систему входных и выходных устройств, можно производить крупные бухгалтерские расчеты и т. д.

В. Д. Князев

3288. Вычислительная машина СЕАК Национального бюро стандартов (SEAC, National Bureau of Standards), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 249 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 3) (англ.)

В мае 1956 г. исполнилось 6 лет работы вычислительной машины СЕАК. Вычислительная машина работала за этот период по 168 час. в неделю. Полезное время составило 86%, при использовании рабочего времени машины на 77%; 25 час. в неделю отводилось на профилактический уход. В течение 6 лет было решено свыше 300 задач длительностью от нескольких минут до нескольких сот часов. За это время была переконструирована система управления входными и выходными устройствами, чтобы иметь возможность добавить букво-числовое печатающее устройство, быстродействующий ленточный перфоратор, быстродействующее устройство считывания информации с перфоленты и блок многоканальной магнитной ленты. Было установлено новое фотоэлектрическое устройство чтения информации с перфокарт.

В. Д. Князев

3289. Фирма «ИБМ» (International Business Machines Corporation), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 3, 248—249 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 3) (англ.)

Сообщается, что к 1 июля 1956 г. фирма «ИБМ» выпустила 17 вычислительных машин типа 704 и 16 — типа 705. Эти модели выпускаются взамен машины 701 и 702. Было выпущено более 300 машин типа 650 с сопутствующим оборудованием. Каждые 2 дня выпускается 3 таких машины.

Объявляется о создании устройства 774, позволяющего связывать блоки магнитных лент с печатающим устройством или с перфоратором для перенесения данных с магнитных лент на перфокарты или печатания их на лист.

В. Д. Князев

3290. Электронная вычислительная машина ИБМ-650. Мальдаг (L'ordinateur électronique IBM, type 650. Maldague R.), Bull. Soc. belge photogramm., 1957, № 50, 25—29 (франц.)

Приводится описание электронной цифровой машины ИБМ-650 (РЖМат, 1954, 4618).

А. В. Шилейко

3291. Машина ИБМ-704 в Массачусетском технологическом институте. Бейер, Шайндлинг (The IBM 704 computer at M. I. T. Beyer Jean-David, Shinedling Sidney), Tech. Engng News, 1958, **39**, № 8, 26—28, 31—34, 37 (англ.)

3292. Цифровые машины для решения дифференциальных уравнений. Савастано (Gli analizzatori differenziali numerici. Savastano Giorgio), Elettrotecnica, 1958, **45**, № 4, 202—212 (итал.)

Подробно описывается принцип действия цифровых машин для решения дифференциальных уравнений и проводится сравнение их с механическими дифференциальными анализаторами. Рассматриваются методы использования цифровых интеграторов для выполнения операций умножения на постоянную, перемножения двух переменных, а также суммирования переменных и ограничения. Приводятся некоторые данные цифровых машин для решения дифференциальных уравнений D-12 фирмы «Бендикс» (США) и Литтон-20 фирмы „Литтон" (США), сведенные в таблицу:

	БЕНДИКС D-12	Литтон-20
1. Число интеграторов	60	20
2. Нормальная скорость работы	100 итераций в 1 сек.	60 итераций в 1 сек.
3. Скорость работы при использовании не более 30 интеграторов	200 итераций в 1 сек.	—
4. Наименьшая ошибка	0,001%	0,004%
5. Система счисления для ввода и вывода данных	Десятичная	Двоичная
6. Ввод данных	Ручной и перфолента	Ручной и перфолента
7. Вывод данных	Печатное устройство и построитель кривых	Осциллограф и построитель кривых
8. Потребляемая мощность	6 *ква*	320 *вт*

Из числа элементов цифровых дифференциальных анализаторов рассматриваются схема триггера и логические схемы на диодах. В приложении привсдятся схемы набора для трех различных задач. Библ. 28 назв.

А. В. Шилейко

3293. Выставка вычислительных машин на чикагском съезде Американского общества гражданских инженеров. Фенвес (Computers shown at ASCE Chicago

convention. Fenves Steven J.), Civil Engng, 1958, 28, № 5, 39—41 (англ.)

Приводятся краткие сведения о четырех цифровых вычислительных машинах, представленных на выставке в Чикаго в 1958 г.

ИБМ-650. Машина, оперирующая с 10-разрядными десятичными числами и позволяющая выполнять над ними около 90 операций. Запоминающее устройство на магнитном барабане имеет емкость 2000 чисел. Время выборки одного числа 2000 мксек. Во входных и выходных устройствах используются перфокарты. Скорость ввода данных 200 карт в 1 мин., скорость вывода данных 150 карт в 1 мин. Машина размещена в 3 шкафах, которые занимают площадь в 3 $м^2$, мощность, потребляемая машиной, составляет 18 *квт*.

LGP-30. Малогабаритная машина, производящая вычисления с 30-разрядными двоичными числами. Список операций машины содержит 16 команд. Емкость запоминающего устройства на магнитном барабане 4096 чисел. Время выборки одного числа 7500 мксек. Для ввода и вывода данных применена электрическая пишущая машинка. Скорость ввода данных 10 знаков в 1 сек. Машина потребляет 1,5 *квт* мощности.

БЕНДИКС G15D. Универсальная машина, выполняющая операции с 28-разрядными двоичными числами, имеется возможность производить вычисления с удвоенным количеством разрядов. Возможное число операций в машине 84.

Емкость запоминающего устройства — 2160 чисел. Время выборки одного числа 14 500 мксек. Ввод данных в машину осуществляется либо с помощью электрической пишущей машинки, либо с помощью фотоэлектрического устройства, считывающего данные с перфоленты со скоростью 300 знаков в 1 сек. Скорость вывода данных 17 знаков в 1 сек. Потребляемая машиной мощность составляет 3,8 *квт*.

«Берроуз Е-101». Машина, спроектированная для инженерных задач, которые слишком сложны для решения на настольных вычислительных машинах, а решение которых на больших машинах неэкономично. Машина производит вычисления с 12-разрядными десятичными числами. Запоминающее устройство на магнитном барабане имеет емкость 220 чисел. Время выборки одного числа 8500 мксек. Мощность, потребляемая машиной, 3 *квт*.

А. Н. Чуйкин

3294. Оборудование вычислительного центра в Гренобле увеличилось на одну машину ГАММА (Le centre de calcul électronique de Grenoble s'enrichit d'une «Machine Gamma», Algérie industr. et commerc., 1958, 5, № 48, 15, 27 (франц.)

Сообщается об установке в вычислительном центре в Гренобле электронной цифровой вычислительной машины ГАММА-3, изготовленной фирмой „Буль" (Франция). Машина будет использоваться в университете для решения различных задач, которые ставит промышленность. ГАММА-3 содержит 700 ламп и может выполнять 1000 сложений или 100 умножений в 1 сек. Ее запоминающее устройство имеет емкость 8000 12-разрядных десятичных чисел. Оперативная память машины выполнена на магнитострикционных линиях с длительностью задержки в 0,17 мсек. Всего имеется 64 линии, разделенные на блоки по 8. Отмечается, что развитие вычислительных машин способствует установлению сотрудничества научных работников и инженеров и помогает формировать научно-технические кадры, в которых Франция сильно нуждается. Приводится краткий исторический обзор развития по производству вычислительных машин «Буль». В 1931 г. фирма имела 35 служащих и капитал в 4 млн. франков, в 1948 г. капитал увеличился с 240 млн. до 1 млрд. франков, а число служащих стало равным 1300. В 1957 г. капитал составлял 2 млрд. 325 млн. франков, а число служащих — 5500. Первую электронную машину-сортировку фирма выпустила в 1951 г. В настоящее время заводы фирмы имеют производственную площадь в 56000 $м^2$ против 900 $м^2$ в 1931 г.

А. В. Шилейко

3295. Качественное изучение различных триггеров на полупроводниковых триодах. Субье-Ками (Étude qualitative des différents types de bascules à transistors rencontrés dans les techniques binaires. Soubiès-Camy Henri), Automatisme, 1957, 2, № 12, 447—454 (франц.)

Подробно описываются схемы триггера, одновибратора, мультивибратора, триггера Шмитта, формирователя синусоидальных напряжений в прямоугольные и триггера с двумя входными вентилями на полупроводниковых триодах.

А. В. Шилейко

3296. Ферромагнитные матрицы для памяти и запоминающие устройства (Ferro-magnetic memory planes and stores), Process Control and Automat., 1958, 5, № 7, 278—279 (англ.)

Английская фирма «Плесси» (Plessy Co. Ltd) сообщает о выпускаемых ею ферритовых тороидах с прямоугольной петлей гистерезиса, используемых в запоминающих устройствах математических машин. Описывается принцип действия и преимущества памяти на ферритах. Кратко описывается процесс производства ферритов и сообщается о выпуске фирмой ферритов двух типов: «Ferramic S4», дающем большие сигналы и малый уровень помех, и «Ferramic S5», имеющем малую коэрцитивную силу.

А. Н. Чуйкин

3297. Система, запоминающая много миллионов цифр (Multi-milion bit storage unit), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 3, 260—261 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 3) (англ.)

Сообщается, что фирма «Интернейшнл Телеметр» (International Telemeter Corp.) объявила о подписании контракта с ВВС США на разработку устройства большой емкости с фотографическим запоминанием информации — «фотоскоп» (fotoscope). Информация записывается фотографическим способом на покрытых эмульсией дисках в виде микроскопических черных и белых квадратиков на концентрических окружностях.

Для чтения информации соответствующая дорожка проходит под световым лучом и с фотоэлемента, находящегося под диском, выходят сигналы, получающиеся в виде импульсов при смене черных и белых квадратиков. Таких квадратиков на площади 6,25 $см^2$ можно расположить до 6 млн. Считывающее устройство состоит из электронно-лучевой трубки, линзы, проектирующей световое пятно на дорожку, и фотоумножителя за диском. Отклонение светового пятна на трубке отклоняет луч в радиальном направлении так, что при этом может быть засвечена любая из 600 дорожек. Диск, который будет использован, способен вместить 30 млн. двоичных цифр, что эквивалентно 5 млн. букв или объему нескольких книг. Скорость вращения диска будет равна 1200 об/мин. и информация будет прочитываться со скоростью 1 млн. цифр в 1 сек. Время выборки любого кода может быть произведено за 1 оборот или за 50 мсек. Это устройство предназначается для перевода с русского языка на английский.

В. Д. Князев

3298. Спасистор — новый вид полупроводникового усилителя. Макдоналд (The spacistor — a new kind of semiconductor amplifier. Macdonald Neil D.), Computers and Automat., 1957, 6, № 8, 6—9 (англ.)

Описывается принцип действия и даются некоторые характеристики (сравнительно с электронными лампами и кристаллическими триодами) нового полупроводникового усилительного элемента — спасистора. Принцип работы полупроводникового тетрода-спасистора — создание широкой зоны объемного заряда между областями *n* коллектора и *p* базы и управление этим зарядом — позволяет

произвести весьма близкую аналогию с работой вакуумной лампы. На рисунке (*а* и *б*) представлены конструкция и схема включения спасистора. Электроны, впрыскиваемые инжектором *I*, создают объемный заряд в области *sc*. Входной сигнал подается, в конечном счете, между инжектором и модулятором. Поскольку напряжения источников B_1, B_2 и B_3 соотносятся между собой, как $U_1 < U_2 < U_3$, потребление тока по входу практически отсутствует (входное сопротивление может достигать сотен мегом). Модулятор *M* имеет двоякую функцию: 1) варьируя интенсивность впрыскивания электронов в область объемного заряда, изменяет количество дырок, переходящих из области *p* в область *n*, т. е. ток в нагрузке

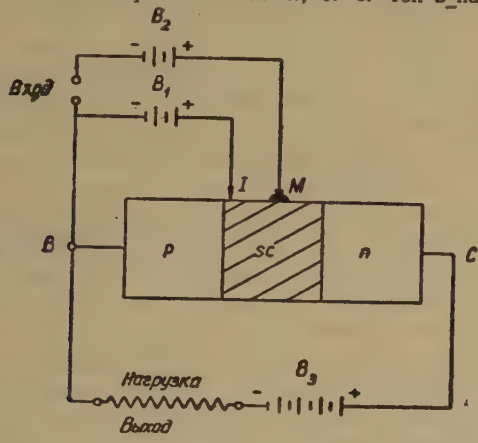


Рис. *а*

2) стабилизирует опорное напряжение инжектора *I*, делая его практически независимым от разности потенциалов коллектор (*C*) — база (*B*). В настоящее время спасисторы дают усиление по току (статический режим) до 3000. Возможное усиление по мощности настолько велико, что

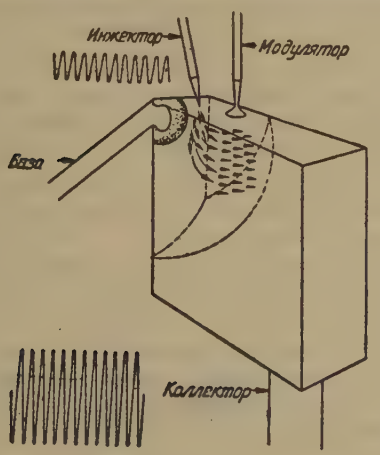


Рис. *б*

имеет больший смысл говорить об усилении по напряжению (достигающем 3000). До настоящего времени эксперименты со спасисторами велись на частоте, не превышающей 800 *кгц*. На этой частоте было получено усиление 70 *дб*. Однако частотные свойства спасистора настолько высоки (в частности, выходная емкость за счет широкой зоны объемного заряда может быть снижена до 1 *пф* и менее, т. е. даже ниже, чем у высокочастотных вакуумных пентодов), что имеются все основания поднять частоту до 1000—10 000 *мгц*. Внутреннее сопротивление R_i спасистора пока еще значительно выше, чем у электронных ламп, однако конструкторы рассчитывают в будущем получить тот же порядок R_i, что и у обычных пентодов. Указывается еще одно преимущество спасистора перед обычными кристаллическими триодами: возможность использования менее дефицитных материалов (вместо германия, индия и т. д.). С другой стороны, в спасисторе могут быть применены более термостойкие материалы. Уже в настоящее время рабочая температура спасисторов может достигать 500°С. Ниже приведена сравнительная таблица свойств электронных ламп, полупроводниковых триодов и спасисторов (см. таблицу).

	Электронная лампа	Полупроводниковый триод	Спасистор
Предельная частота	Высшая (1000 *мгц*)	Средняя (250 *мгц*)	Высшая (10000 *мгц*)
Возможность использования термостойких материалов	Возможно	Невозможно	Возможно
Теоретический срок службы	Ограниченный	Неограниченный	Неограниченный
Необходимость вакуумной оболочки	Необходима	Нет	Нет
Габариты и вес	Значительные	Малые	Малые
Необходимость в „стратегических" материалах	Необходимы	Нет	Нет
Сложность конструирования многокаскадных схем	Несложное	Сложное	Несложное
Входное и выходное сопротивления	Высокие	Низкие	Очень высокие

[Raytheon Manufacturing Co., США]. А. Крупский

3299. Сравнение параметров электронных фотоумножителей. Тремко (Comparison of multiplier phototube parameters. Tremko Jozef), Бюл. астрон. ин-тов Чехословакии, 1958, **9**, № 2, 77—79 (англ.; рез. русск.)

Приводятся результаты сравнений параметров 17 образцов электронных фотоумножителей типа FEU-17. Предметом измерений являлась относительная интегральная чувствительность, темновой ток и шум. Разности между замеренными значениями в некоторых случаях достигают стократной величины. Влияние охлаждения на понижение темнового тока и продолжительность времени стабилизации исследовались лишь на одном образце. При понижении температуры с 5° до —78° наступило шестидесятикратное понижение темнового тока. Измерения относительной чувствительности, темнового тока и шума производились при анодном напряжении 880 *в* и температуре 10°. Перед измерениями каждый умножитель подвергался напряжению и находился в темноте в течение 60 мин., пока не переходил в состояние стабилизации.

Резюме автора

3300. Опыт использования проверки на критичность и программы автоматического контроля на машине ЭДСАК. Уилкс, Фистер, Бартон (Experience with marginal checking and automatic routining of the EDSAC. Wilkes M. V., Phister M., Jr, Barton S. A.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 239—245. Discuss., 245—246 (англ.)

Приводится описание нескольких устройств, предназначенных для проверки критичности работы отдельных узлов машины ЭДСАК. Предполагалось, что введение та-

кой проверки позволит: во-первых, предотвратить сбои машины, вызванные нарушением режима работы схемы из-за старения ламп и других элементов; во-вторых, избежать случайных ошибок, возникающих иногда при неблагоприятном сочетании импульсов за счет того, что какой-нибудь элемент работает «на краю» области рабочего режима. Однако проверка на критичность не дает возможности обнаружить случайные ошибки, обусловленные плохими контактами или какими-либо механическими неисправностями.

Первый вид проверки на критичность в машине ЭДСАК заключался в уменьшении амплитуды импульсов в нескольких каналах с помощью простых делителей напряжения на сопротивлениях, которые подключались только на время проверки; работа машины контролировалась в это время специальной программой. Всего было введено 45 таких делителей (аттеньюаторов): 15 — в памяти и связанных с нею устройствах, 11 — в арифметическом блоке и 19 — в цепях управления. Исходя из учета величины возможного старения элементов за время между проверками и целесообразности замены элемента, изменившего свои параметры, было выбрано 10% изменения амплитуды. Предполагалось, что при этом случайные ошибки станут повторяющимися. Учитывалось, что уменьшение амплитуды приводит к некоторому сокращению ширины импульса; места включения аттеньюаторов выбирались так, чтобы избежать прохождения импульса через 2 аттеньюатора. Проверка сразу же обнаружила, что многие машинные элементы вообще не имеют допустимого диапазона изменения параметров, т. е. их режим критичен. Такие элементы были переделаны или усовершенствованы и только после этого стала возможна работа всех 45 аттеньюаторов одновременно.

За два месяца до введения контроля с помощью аттеньюаторов было в среднем за месяц 25 остановок машины. Устранение неполадок требовало: в 9 случаях регулировки усилителей; в 6 — замены ламп, сопротивлений или конденсаторов; в остальных — различных регулировок, главным образом, механического оборудования. Предполагалось, что неисправности первых двух типов (15) могут быть предотвращены введением проверки с помощью аттеньюаторов. Оказалось, однако, что только в 3 случаях замена или регулировка могут быть сделаны на основании такой проверки. Это объясняется тем, что старение деталей гораздо чаще вызывает изменение сопротивлений, приводящее к увеличению амплитуды импульсов и их расширению. Такого рода неисправности могут быть обнаружены с помощью проверки критичности настройки усилителей. Проверка критичности усилителя состоит в изменении в обе стороны напряжения смещения на сетке первого каскада. Таким образом в машине проверяется около 80 усилителей. Включение проверки усилителей на критичность осуществляется с помощью 3 позиционных переключателей, смонтированных на главной панели пульта управления. Величина смещения подбиралась и равна $\mp 1{,}5$ *в*. Проверка критичности настройки усилителей оказалась очень эффективной и с момента ее введения (январь 1953 г.) не было ни одной остановки, вызванной неисправностями, требующими перерегулировки усилителей.

Проверка критичности быстродействующей памяти (на ртутных трубках) сводилась к контролю критичности усилителей. Смещение на эти усилители изменялось с частотой 50 *гц*. Изменение смещения оказалось очень удобным и при первоначальной настройке усилителей.

Для ЭДСАК разработана программа автоматического контроля, в которую включена и проверка на критичность. В статье излагается последовательность полной проверки машины: проверяется память, затем частота следования синхронизирующих импульсов, работа считывающего устройства. Последней запускается программа автоматического контроля. З. Д. Доброхотова

3301. Точное электролюминесцентное устройство для получения графических изображений на выходе цифровой вычислительной машины. Килберн, Гофман, Хейс (An accurate electroluminescent graphical-output unit for a digital computer. Kilburn T., Hoffman G. R., Hayes R. E.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1958, **B105**, № 20, 136—144. Discuss., 144—146 (англ.)

Описывается разработанное в Манчестерском университете устройство для демонстрации данных (в основном — графиков). Основным узлом устройства является стеклянная пластина с нанесенным на нее слоем электролюминесцентного фосфора и с двумя комплектами электрических проводников. Два комплекта проводников (по 512 штук) расположены по разные стороны электролюминесцентного слоя. Проводники каждого комплекта параллельны между собой и перпендикулярны проводникам другого комплекта; таким образом создана сетка взаимно ортогональных проводников. Подача электрического импульса на пару выбранных перпендикулярных проводников заставляет экран флуоресцировать в месте их перекрещивания. Импульсы подаются последовательно на определенные пары, так что образуется бегущее изображение. Проводники одного из двух комплектов сделаны из прозрачного материала; поэтому с этой стороны изображение можно беспрепятственно наблюдать и фотографировать. Размеры экрана 180×180 *мм*. Ширина каждого проводника 0,25 *мм*. Проводники каждого комплекта разделены на 32 группы по 16 проводников. Выбор группы производится при помощи сравнительно медленных реле, выбор проводника внутри данной группы осуществляется быстродействующей электронной схемой. Рассматривается вопрос об отношении яркости свечения выбранных и невыбранных точек экрана, зависимость между яркостью свечения, величиной подаваемого напряжения и частотой напряжения, исследуется форма импульсов и т. п. Отмечается, что описываемое устройство выгодно отличается от других, например, от устройства визуальной выдачи на экране электронно-лучевой трубки, высокой точностью, так как положения световых точек точно и постоянно фиксированы расположением проводников сетки. Отмечается также, что разрабатывались другие устройства, отличающиеся от описанного некоторыми параметрами (числом проводников и др.). Устройство должно использоваться в отделе электротехники Манчестерского университета с цифровой электронной машиной «Меркурий — II» (Mark II Mercury Computer). В дискуссии обсуждается скорость работы устройства и его точность. Авторы утверждают, что на описанном электролюминесцентном устройстве можно записать 1000 точек за 30 сек., а точность его может быть практически неограниченной. В. А. Брик

3302. Графическая информация, преобразованная на цифровой вычислительной машине (Pictorial information processed in a digital computer), Computers and Automat., 1958, 7, № 5, 16—19 (англ.)

Сообщается об исследовании программ для распознавания фигур, изображенных на бумаге, на машине СЕАК. Изображенная на бумаге фигура укрепляется на вращающемся барабане, вдоль оси которого ходовым винтом передвигается фотоумножитель. С помощью стробирующих дисков образуются импульсы света, которые, отражаясь от светлых и темных участков фигуры, создают сигналы нулей и единиц, запоминаемых в запоминающем устройстве машины. На машине СЕАК с таким входным устройством исследовались программы, позволяющие считать количество фигур, изображенных на бумаге, вычислять площадь каждой фигуры, распознавать различные буквы, а также исследовать возможность распознавания букв, изображенных с помарками. А. Н. Чуйкин

3303. Система передачи данных, управляемая непосредственно от вычислительной машины. Гордон (A direct computer controlled data editing system.

Gordon Bernard M.), IRE Trans. Telemetry and Remote Control, 1957, **3**, № 1, 5.1, 1 (англ.)

Резюме доклада на симпозиуме по телеметрии, проходившем 14 — 16 апреля 1957 г. Сообщается о разработанной системе, которая позволяет вводить огромные количества данных для проведения автоматического анализа в вычислительные машины типа ИБМ-704 или СПЕРРИ РЭНД 1103. Новые данные передаются в машину со скоростью 1 код за 20 мксек. Это позволяет значительно быстрее, чем было возможно ранее, проводить автоматический анализ данных телеметрии и выявлять корреляционные зависимости. А. Б. Залкинд

3304. Двухсотканальная система САДИК. Йоргенсен (A 200-channel sequential SADIC system. Jorgensen Dell E.), IRE Trans. Instrum., 1956, PGI-5, June, 219—224, 14 (англ.)

Описывается двухсотканальная система преобразования напряжения в число САДИК (SADIC).

Для перевода напряжения в число используются цифровые следящие системы, построенные на шаговых искателях электромеханического типа. Переводимое в число напряжение подается на вход сравнивающего усилителя. На другой вход усилителя подается напряжение, соответствующее текущему положению шаговых искателей. Напряжение рассогласования, снятое с выхода сравнивающего усилителя, используется для привода шаговых искателей выбирающих имеющееся рассогласование. Положение щеток искателей дает значение числа. Съем данных по каналам производится последовательно, с помощью шаговых переключателей. Результаты перевода напряжения в числа записываются на перфоленту с указанием номера канала и числовой величины напряжения с его знаком. Чувствительность схем перевода может устанавливаться индивидуально для каждого из каналов и также фиксируется на перфоленте.

Полный цикл схемы перевода по всем 200 каналам — 8 мин., темп съема 20 — 30 чисел в 1 мин. Предельная чувствительность системы 1 *мкв*. Г. Г. Рабинович

3305. Устройство для преобразования непрерывных данных в цифровую форму. Цвейциг (Data encoder for general instrumentation. Zweizig J. R.), Teletech., 1955, **14**, № 3, 72—73, 142, 144, 147 (англ.)

Описываются принципиальные и конструктивные черты устройства для преобразования непрерывных данных в виде напряжения постоянного тока в цифровую форму. Принцип работы описываемого преобразователя заключается в последовательном вычитании из преобразуемого напряжения суммы ряда фиксированных напряжений, пропорциональных соответствующим степеням двойки. Сравнение начинается с фиксированного напряжения, соответствующего старшему разряду числа. В случае положительной разности, в данном разряде записывается 1, в противоположном случае 0. Затем осуществляется сравнение с суммой фиксированных напряжений старшего и следующего за ним младшего разряда, в случае, если предыдущая разность была положительной, т. е. если в предыдущем разряде была 1, или только с напряжением следующего младшего разряда, если предыдущая разность была отрицательной, и т. д. Значения цифр разрядов определяются по знаку разности сравниваемых напряжений, как было указано выше.

В этом процессе последовательно, начиная со старшего разряда, определяются значения коэффициентов (0 или 1) в ряде, образующем величину двоичного числа, изображающего преобразуемое непрерывное напряжение.

Приводится блок-схема преобразователя, состоящего из генератора синхронизирующих импульсов, релейного селектора, источника фиксированных напряжений, суммирующего усилителя, вентиля сравнения, формирователя импульсов и записывающего устройства на магнитной ленте. Точность описываемого преобразователя составляет ±0,1% при представлении выходных чисел десятизначными числами. Диапазон изменения входных напряжений равен 0—1 *в*. Устройство имеет два входных канала, каждый из которых преобразуется в цифровую форму 40 раз в 1 сек.

Выходные данные в цифровой форме записываются на одноканальную магнитную ленту и далее преобразуются или в печатную таблицу или переносятся на перфокарты с помощью преобразовательного блока системы обработки данных.

Приводится блок-схема устройства сравнения, являющегося одним из самых важных блоков, определяющих собой точность преобразования. Дается краткая характеристика остальных блоков преобразователя. Б. И. Стрелков

3306. Новый метод преобразования непрерывных данных в цифровые. Палевский (A new approach to analog digital conversion. Palevsky Max), ISA Journal, 1958, **5**, № 4, 42—44 (англ.)

Приводится описание преобразователя типа «Мультивертер» (Multiverter), основным элементом которого является дискретный делитель напряжения, имеющий 10 000 позиций в десятичном варианте и 16 000 позиций — в двоичном. В стандартном устройстве время переключения составляет 4 мксек., а точность 0,01%. Кроме того, выпускается специальный 11-разрядный малогабаритный вариант. Устройство допускает два режима преобразования: «преобразование всего числа», когда в регистр устройства вводится преобразуемое число N, на вход делителя подается постоянное напряжение V и на выходе устройства получается величина NV, и «преобразование приращений». В последнем случае на вход делителя подается напряжение V_2 и величина NV_2 сравнивается со входным напряжением V_1. Разность $NV_2 — V_1$ (приращение) направляется в регистр по цепи отрицательной обратной связи и благодаря этому значение числа N в регистре поддерживается равным V_1/V_2. В зависимости от скорости изменения разностного напряжения схема автоматически переключается с младших на старшие разряды регистра, что обеспечивает достаточную скорость слежения за входным напряжением. Описываются способы образования различных функций с помощью нескольких преобразователей. А. В. Шилейко

3307. Прибор для расшифровки записи данных, сделанной на кинопленке (Ballistic film analyzer and recorder), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 257 (Digital Computer Newsletter, 1956, **8**, № 3) (англ.)

Фирма «Бенсон-Ленер» (Benson-Lehner Corp.) разработала прибор «Боскар» (Boscar — ballistic film analyzer and recorder) серии *E*, *J* и *N* для считывания данных с пленок, шириной 8, 16, 35 и 70 *мм*, и преобразования информации в цифровую форму. Измерение данных ведется с точностью до 1/1500. Выходное устройство может быть подсоединено любое. Пленка перемещается скачками. В. Д. Князев

3308. Импульсная система автоматического регулирования устройства развертки. Напп, Шапиро, Торп (An error-sampled sweep-position control system. Knapp C. H., Shapiro E., Thorpe R. A.), IBM J. Res. and Developm., 1958, **2**, № 1, 14—35 (англ.)

Описание разработки импульсной системы автоматического регулирования устройства развертки радиолокационного индикатора приводится с целью иллюстрации распространения метода Z—преобразования на анализ импульсных систем автоматического регулирования, а также для того, чтобы дать пример выполнения подобной системы на полупроводниковых приборах. Необходимость использования именно импульсной системы диктуется здесь тем обстоятельством, что операции регулирования можно производить только в интервалы времени между двумя последовательными циклами развертки, когда экран индикатора затемнен. Сигнал ошибки в системе образуется как разность напряжения развертки, действующего в момент начала очередного цикла, и напряжения уставки. Этот сигнал преобразуется в цифро-

вую форму и затем хранится запоминающим элементом вплоть до момента его использования для коррекции. Точность непрерывно-цифрового преобразования составляет всего 10%, так как предполагается, что за период времени между двумя последовательными моментами образования сигнала ошибки последний не превысит 10 единиц (за единицу сигнала ошибки здесь принимается величина, пропорциональная 0,001 от диаметра экрана индикатора). Время хранения сигнала ошибки может изменяться от 124 мксек. до 4 мсек. Запоминающий элемент представляет собой накапливающий счетчик, выполняющий одновременно функции интегрирующего звена. Для анализа системы используется метод Z-преобразования. Непосредственный расчет параметров проводится либо путем разметки частот на амплитудно-фазовой характеристике, либо способом отыскания корней характеристического уравнения. В заключение приводятся осциллограммы работы устройства развертки с системой автоматического регулирования. Библ. 10 назв.

А. В. Шилейко

3309. Универсальная вычислительная цифровая машина (General-purpose digital computer), Overseas Engr, 1957, **30**, № 354, 392 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 786, 4287.

3310. Цифровые вычислительные машины и моделирующие устройства. Лебизе (Calculateurs analogiques et ordinateurs numériques. Lebizay André), Industrie (Belg), 1958, **12**, № 2, 81—86 (англ.)

Популярная статья.

3311. Интегрирование напряжения источника питания. Шрейдер (Integrating voltage sources. Schrader George F.), Electron. Inds, 1958, **17**, № 2, 55, 110 (англ.)

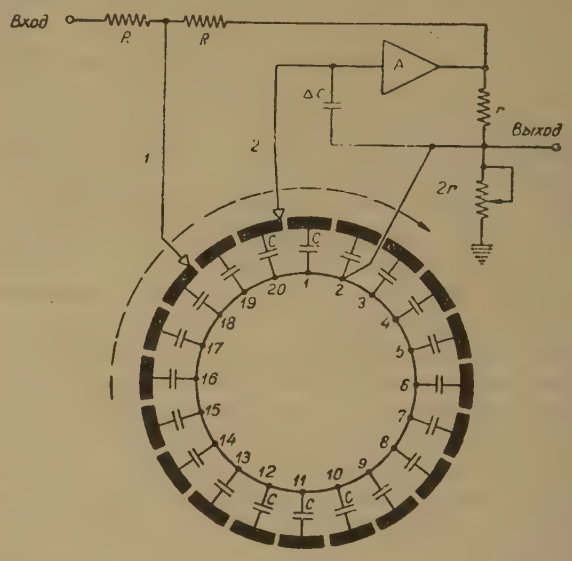
При работе с электронными моделирующими вычислительными установками часто возникает необходимость в интегрировании (при помощи интегрирующего операционного усилителя постоянного тока с RC-обратной связью) напряжения некоторого источника. Интегрирование производится в течение некоторого определенного периода интегрирования. Величина интегрирующего напряжения может быть или постоянной, или переменной. Предполагается, что источник интегрирующего напряжения заземлен. В статье доказывается, что если указанный выше источник является источником тока, т. е. имеет очень высокое внутреннее сопротивление, что интегрирующий усилитель не вносит ошибки, обычно вызываемой сопротивлением источника и дрейфом нуля усилителя. Выясняются также необходимые условия для величины коэффициента усилителя, величины входного напряжения.

В. А. Брик

3312. Блок переменной задержки для моделирующих устройств. Стоун, Дандл (A variable function delay for analog computers. Stone R. S., Dandl R. A.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 3, 187— 189 (англ.)

Описывается схема блока переменной задержки, используемого при анализе атомных реакторов для моделирования процессов передачи тепла потоком жидкости. Схема блока показана на рисунке. В его состав входит переключатель с двумя равномерно вращающимися щетками *1* и *2*. Щетка *1*—записывающая; с ее помощью конденсаторы C последовательно заряжаются до мгновенных значений входного напряжения, представляющих значения функции, подлежащей задержке. Щетка *2*—читающая; с ее помощью задержанные значения считываются и подаются на вход операционного усилителя A. Напряжение на выходе схемы пропорционально $-{}^1/_2 f\ (t-T)$, где $f(t)$—функция на входе схемы, $T=n/NF$; при этом F—скорость вращения переключателя в об/сек, N—общее число конденсаторов и n—число контактов, заключенное между щетками *1* и *2*. Конденсатор ΔC используется для сглаживания скачка при переключениях.

Анализ схемы показывает, что при использовании бумажных конденсаторов в пластмассовом корпусе наибольшая величина ошибки в значениях задерживаемой функции



при задержках до 100 сек. не превысит 0,1%. Для минимальных значений $\Delta T=1/NF=0{,}3$ сек. целесообразными оказываются величины: $C=0{,}22$ *мкф*, $r=10$ *ком* и $R=100$ *ком*. Библ. 6.

А. В. Шилейко

3313. Блок умножения и функциональный блок на электронно-лучевых трубках. Чаудхури, Наг (Analogue multiplier and function generator with cathode ray tube. Choudhury A. K., Nag B. R.), Indian J. Phys., 1958, **32**, № 3, 141—148 (англ.)

Описываются схемы электронного блока умножения и функционального блока, использующие в качестве основного элемента электронно-лучевую трубку. Принцип действия блока умножения основан на том, что составляющая скорости электронного луча в направлении оси Y, а следовательно, и отклонение светового пятна на экране в этом же направлении Y пропорциональны векторному произведению составляющей напряженности электрического поля вдоль оси X и составляющей напряженности магнитного поля вдоль оси Z.

В схеме блока напряжение, пропорциональное одному из сомножителей, подается на отклоняющие пластины X, трубки, а ток, пропорциональный другому сомножителю, пропускается по катушке, ось которой совпадает с осью трубки. Отклонение луча в направлении оси Y компенсируется напряжением, подаваемым на отклоняющие пластины Y. Это напряжение, получаемое с помощью электронной следящей системы, пропорционально произведению. Индикатором положения луча служат два электрода, укрепляемые на внешней поверхности экрана трубки. Между электродами оставляется узкая щель, параллельная оси X и проходящая через центр экрана. Один из электродов заземляется непосредственно, а второй — через большое сопротивление. Луч модулируется по интенсивности и это вызывает индуктирование на втором электроде переменного заряда, величина которого в определенных пределах оказывается пропорциональной отклонению луча. Полная величина усиления в контуре следящей системы равна 1000. Частота модуляции луча 400 *кгц*. Точность блока умножения имеет порядок 2%. Сомножители могут иметь частотные составляющие до 3 *кгц*. Схема функционального блока аналогична схеме блока умножения с той разницей, что форма щели между электродами индикатора отклонения луча не прямоли-

нейна, как в случае блока умножения, а соответствует форме кривой образуемой функции. В статье рассматриваются также примеры использования блока умножения при решении задач. А. В. Шилейко

3314. Запись непрерывных величин на магнитный барабан. Даус, Уэст (Analogue recording on a magnetic drum. Douce J. L., West J. C.), Electr. Rev., 1958, 162, № 16, 730 (англ.)

Сообщается о возможности использования магнитного барабана для записи переходных процессов в системах с большим временем установления; затем при вращении барабана записанная кривая может быть рассмотрена на осциллографе в удобном масштабе. Указывается также на возможность использования магнитного барабана как генератора функций для моделирующих устройств. А. Н. Чуйкин

3315. Повышение точности решения задач на электронной математической машине непрерывного действия. Тетельбаум И. М., Челноков Н. И., Тр. Моск. энерг. ин-та, 1958, вып. 27, 259—266

Предлагается методика компенсации систематических погрешностей линейных решающих элементов электронных моделирующих машин. Если на моделирующей машине набирается схема для решения дифференциального уравнения второго порядка вида

$$A_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1f(y)\frac{dy}{dt}+A_0y=0, \qquad (1)$$

то за счет паразитных параметров решающих элементов добавляются дополнительные члены и фактически на машине решается дифференциальное уравнение высшего порядка вида

$$a_{2n}\frac{d^{2n}y}{dt^{2n}}+\cdots+a_3\frac{d^3y}{dt^3}+A_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1f(y)\frac{dy}{dt}+A_0y=0, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_i для $i=3, 4, \cdots, 2n$ значительно меньше основных коэффициентов A_2 и A_0. В тех случаях, когда величина коэффициента a_1 сравнима с величинами коэффициентов a_i, влияние паразитных параметров может значительно исказить получаемое решение и это влияние необходимо компенсировать. Решение уравнения (2) для случая $a_i\to 0$ $(i=1, 3, \cdots, 2n)$ имеет вид:

$$y=y_0\sin(\omega_0t+\varphi);\ \omega_0=\sqrt{\frac{A_0}{A_2}}. \qquad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает:

$$\left[\sum_{j=2}^{n}(-1)^ja_{2j}\omega_0^{2j}\right]y_0\sin(\omega_0t+\varphi)+$$

$$+\left[\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}a_{2j-1}\omega_0^{2j-1}\right]\omega_0y_0\cos(\omega_0t+\varphi)+$$

$$+A_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1f(y)\frac{dy}{dt}+A_0y=0. \qquad (4)$$

Из (4) видно, что уравнение (2) с достаточной точностью может быть приведено к виду:

$$A_2\frac{d^2y}{dt^2}+[a+a_1f(y)]\frac{dy}{dt}+(\Delta A+A_0)y=0,$$

где: $a=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}a_{2j-1}\left(\frac{A_0}{A_2}\right)^{j-1}$;

$$\Delta A=\sum_{j=2}^{n}(-1)^ja_{2j}\left(\frac{A_0}{A_2}\right)^j.$$

Способ выявления и компенсации систематической погрешности решающих элементов заключается в том, что в схеме машины, набранной для решения уравнения (1), временно устанавливается коэффициент $a_1=0$ и отрабатывается решение. Отличие получаемого решения от (3) показывает наличие систематической погрешности, компенсация которой может быть осуществлена путем экспериментального подбора некоторого отрицательного или положительного коэффициента демпфирования a и некоторой поправки ΔA к величине A_0, при введении которых получается решение вида (3). После компенсации погрешности вводится коэффициент a_1 и получаются требуемые решения заданного уравнения (1). Данным способом может быть компенсирована погрешность лишь линейных решающих элементов, главным образом интегрирующих. Для иллюстрации применения предлагаемой методики в статье рассматривается решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка на машине МН-2, проводившееся на кафедре автоматики, телемеханики и математических машин МЭИ. А. В. Шилейко

3316. Демонстрация условной устойчивости на машине непрерывного действия. Натан, Малер (Demonstration of conditional stability on an analog computer. Nathan Amos, Mahler Yona), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 4, 287 (англ.)

Описывается способ визуального определения устойчивости системы автоматического регулирования по критерию Найквиста — Михайлова (график или годограф передаточной функции не должен охватывать точку -1, $j0$). Для построения графика на экране осциллографа требуется три операционных усилителя, с двух из них подаются сигналы на входы горизонтального и вертикального отклонения луча. Устойчивая система имеет график в виде спирали, загибающейся внутрь, неустойчивая — в виде развертывающейся спирали. А. Ф. Смирнов

3317. Исследование некоторых нелинейностей в простой позиционной следящей системе. Сампатх (A study of some non-linearities in a simple positioning servomechanism. Sampath S.), J. Instn Telecommun. Engrs, 1958, 4, № 2, 71—80 (англ.)

Такие несовершенства следящей системы, как насыщение, зона нечувствительности и люфт, затрудняют строгий математический анализ. Для некоторых типов задач Кохенбергером был предложен метод аппроксимации, основанный на аппарате эквивалентной линеаризации. Этот метод успешно применялся для получения данных об устойчивости и степени устойчивости, данных об общем поведении следящей системы, а также для расчета корректирующих схем. Лучшим средством исследования подобных задач является машина непрерывного действия.

В статье рассматривается особый вид простой позиционной следящей системы и описывается исследование, проведенное на электронном моделирующем устройстве, недавно установленном в Индийском научном институте Бангалоре, в частности по определению действия насыщения, имеющего место, например, в усилителе, и гистерезиса в управляющем потенциометре. Представлены результаты, полученные методом линейной аппроксимации, как для отдельного действия этих нелинейностей, так и для совместного включения их в систему. В обоих случаях результаты представлены графиками и сравниваются с решениями, полученными на моделирующем устройстве. Библ. 4 назв. А. Ф. Смирнов

3318. Математическая машина непрерывного действия для преобразований Фурье. Таккер (An analogue computer for Fourier transforms. Tucker D. G.), J. Brit. Instn Radio Engr, 1958, 18, № 4, 233—235 (англ.)

Описывается принцип построения вычислительной машины непрерывного действия для получения преобразований Фурье функций, определяемых на конечном участке изменения аргумента конечным количеством ординат

Для того чтобы получить преобразование Фурье функции $V(r)$, на n выводов линии задержки одновременно подаются сигналы $V_1, V_2, \ldots, V_n$, промодулированные частотой ω, величины которых пропорциональны значениям функции в точках $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Каждая секция линии задержки при данной частоте ω дает фазовый сдвиг φ, поэтому на выходе линии задержки получается сигнал $V_0 = \dot{A}\sum_{r=1}^{n} V_r e^{j(r-1)\varphi}$, где $\dot{A} = Ae^{j\omega t}$.

Фазовая характеристика линии задержки от частоты ω представляет собой прямую линию, поэтому при изменении частоты во времени показатель степени e под знаком суммы тоже будет меняться: $\varphi = at$.

При большом n приведенное выражение для V_0 будет достаточно близко к интегралу $V_0(t) = \dot{A}_1 \int_0^1 V(r)\, e^{jrat}\, dr$,

или, полагая $t = \frac{e\pi}{a} x$,

$$V_0\left(\frac{2\pi}{a} x\right) = \dot{A}_1 \int_0^1 V(r)\, e^{j2\pi rx} dr.$$

Чтобы получить модуль преобразования Фурье функции $V(r)$ $F_m = A_1 \left| \int_0^1 V(r)\, e^{j2\pi rx} dr \right|$, достаточно на выходе линии задержки поставить выпрямляющую схему и сглаживающий фильтр для частоты ω. Чтобы получить действительную часть преобразования Фурье функции $V(r)$ $V_c(x) = A_1 \int_0^1 V(r) \cos 2\pi rx\, dr$, нужно на выходе линии задержки поставить фазовый детектор, управляемый напряжением $B\cos\left[\omega t + \frac{1}{2}(n-1)\varphi\right]$. Мнимую часть преобразования Фурье функции $V(r)$ можно получить, если на фазовый детектор подать управляющее напряжение $B\sin\left[\omega t + \frac{1}{2}(n-1)\varphi\right]$.

А. Н. Чуйкин

3319. Сеть с индукцией и емкостью для исследования некоторых сверхзвуковых течений. **Миру** (Sur un réseau à selfs et capacités pour l'étude de certains écoulements supersoniques. **Miroux Jean**), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 463—469 (франц.; рез. англ.)

Приводится описание трехмерной сети для решения линейного уравнения сверхзвуковых течений

$$(1 - M^2)\,\partial^2\varphi/dx^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0,\ M > 1.$$

Известно, что такая сеть требует введения положительных и отрицательных импедансов, в качестве которых обычно используются индуктивные и емкостные сопротивления. Эти элементы должны быть построены со всей требуемой точностью. Необходимо также использовать точно известную частоту. При выборе достаточно низкой частоты можно на сети проводить измерения методом мостика и получить такую точность, которая нужна.

Из резюме автора

3320. Анализатор с сетью сопротивлений для исследования некоторых дифференциальных уравнений, встречающихся в теории структур. **Сканлан** (Analyseur à réseaux résistifs pour l'étude de certaines équations différentielles intéressant la théorie des structures. **Scanlan R. H.**), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 410—418 (франц.; рез. англ.)

Статья посвящена использованию сети сопротивлений из двух линий, которая позволяет решить уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[m\,(\partial \bar{V}/\partial x)\right] = A\bar{V} + D,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[q\,(\partial V/\partial x)\right] = -C\bar{V} + BV,$$

где m, q, A, B, C, D — известные функции x, а V и $\bar{V}$ — неизвестные функции x.

Для этой цели используется вариант одномерной двойной сети Малавара (Malavard) и Боше (Boscher) или Палмера (Palmer) и Редшоу (Redshaw).

Приводятся решения следующих задач: изгибающий момент и прогиб балки при изгибании в случае произвольных подпорок и граничных условий; эффект сдвига при прогибе, простейшие колебания стержня при кручении или изгибании, учитывающие действие распределенных („вращающихся“) масс и т. д. Из резюме автора

3321. [Использование] электролитической ванны в качестве вычислительной машины непрерывного действия для исследования полиномов высоких степеней. **Ип** (An electrolytic tank as an analogue computing machine for factorizing high degree polynomials. **Ip S. K.**), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 3, 369—384 (англ.)

Указывается, что многочлен n-й степени с действительными коэффициентами

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

имеет те же корни, что и сумма

$$G(z) = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{k_s}{z - x_s},$$

возникающая при делении $f(z)$ на вспомогательный многочлен

$$\varphi(z) = \prod_{s=1}^{n+1} (z - x_s).$$

Для определения корней $z = x + iy$ суммы $G(z)$ может быть использована однородная проводящая среда, в которую в точках, соответствующих x_s, вводятся точки, пропорциональные коэффициентам k_s. Показано, что положения корней определяются пересечением кривых максимального и минимального потенциалов для исследуемой проводящей среды. При построении электролитической ванны, где в качестве однородной проводящей среды используется раствор 4—5 $г$ медного купороса в 1 $л$ дистиллированной воды, плоскость z заменяется плоскостью ρ, связанной с величиной z соотношением $\rho = -\frac{1}{z+i}$.

Это позволяет выполнить ванну в виде цилиндра с внешним диаметром 40 $см$ и высотой 1 $см$. Ось действительных значений (от $-\infty$ до $+\infty$) при этом обращается в окружность с радиусом, равным 1/2, и центром в точке $1/2i$, образующей границы бака. Размещение электродов для задания токов истоков производится при этом по окружности бака. Наилучшие точки размещения электродов по оси x ($x_1, x_2 \ldots x_s \ldots x_{n+1}$) определяются при графическом построении зависимости $f(z)$ в координатах $f(z)$ и x и выбираются ближе к тем значениям x, где $f(z)$ в функции x минимальна.

Указывается, что нахождение точек пересечения линий максимальных и минимальных потенциалов, которое производится с помощью передвижного щупа и гальванометра, можно ускорить, находя точку пересечения любых двух равнопотенциальных линий при предварительном определении существования такой точки.

Приведены два примера практического применения описанного метода и электролитической ванны для определения корней полиномов 8-й и 16-й степени. Для каждого примера представлены исследуемые полиномы, точки установки электродов для задания токов истоков, расчетные значения коэффициентов k_s и токов, им соответствующих, картины распределения эквипотенциальных линий в ванне, а также таблицы, указывающие соответствие полученных значений корней расчетным значениям. Указано, что при определении корней полинома 16-й степени электроды задания токов размещались по оси мнимых значений. Определение корней полинома 8-й степени было произведено за 3 часа с погрешностью около 1%, а определение корней полинома 16-й степени за 2 часа с погрешностью до 5%.

Указывается, что источниками погрешностей являются погрешности в установке величин токов истоков, а также не бесконечно малые размеры электродов задания истоков и щупа для измерения потенциалов в ванне.

И. М. Витенберг

3322. Методы и установки для электролитического моделирования. Малавар (Machines et méthodes d'analogies rhéoélectriques. Malavard L.). Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 155—176, Discuss. 208—210, 347—354 (франц.)

В первой части рассказывается о решении уравнений Лапласа с граничными условиями трех видов, об устройстве прибора для расчета крыльев, позволяющего определить распределение нагрузок на крыле самолета. Указан способ осуществления отрицательных сопротивлений, необходимых при моделировании некоторых задач. Отмечается возможность решения задач с нелинейными граничными условиями. Описано устройство для определения градиента электрического поля.

Во второй части рассказывается о конформных отображениях, а также решении алгебраических и бигармонических уравнений, выполняемых с помощью электрических схем.

Р. Д. Бачелис

3323. Некоторые проблемы аэродинамики и их решение с помощью электрических моделей. Кюхеман, Редшоу (Some problems in aerodynamics and their solution by electrical analogy. Küchemann D., Redshaw S. C.), J. Roy. Aeronaut, Soc., 1956, **60**, № 543, 191—197 (англ.)

При решении многих задач аэродинамики находят применение непрерывно действующие моделирующие устройства, цифровые машины и электрические модели. Наиболее широко распространенными моделями являются электролитические ванны и специальные электрические цепи. Электролитическая ванна дает возможность изучить характер несжимаемого потока вокруг двумерного профиля крыла с учетом завихрений. В последнее время с помощью электролитической ванны исследуются сжимаемые потоки. Электрические моделирующие цепи позволяют определить подъемную силу, коэффициент лобового сопротивления и координату центра давления в функции числа Рейнольдса.

Моделирование картины обтекания потоком профиля крыла с двумя измерениями дает возможность перейти к изучению потока относительно профиля с тремя измерениями. При этом применяется целый ряд упрощающих предположений. Крыло с тремя измерениями делится по размаху на несколько пространственных секций, которые изучаются отдельно. После этого с учетом взаимного влияния секций определяется характер распределения подъемной силы вдоль размаха и выбирается наивыгоднейшая форма крыла в плане. При исследовании трехмерного крыла также изучается влияние щитков на характер потока, положение аэродинамического центра и закон распределения подъемной силы. Целый ряд проблем работы трехмерных профилей наиболее быстро и точно решается с помощью моделирующих счетно-решающих устройств. Одной из таких проблем является изучение влияния граничных вихревых шнуров на аэродинамические силы, приложенные к стреловидным крыльям. Однако электрические модели имеют известные преимущества перед аналитическими методами и моделирующими устройствами при исследовании интерференции потоков и влиянии на обтекание крыла спиральных вихрей от воздушного винта с конечным числом лопастей. Электрические цепи постоянного и переменного тока нашли наиболее широкое применение при исследовании характера потока в центробежном компрессоре, при изучении закона распределения температуры и сжимаемости потока воздуха или жидкости. Библ. 83 назв.

Ю. И. Кириленко

3324. Комбинированное применение моделирующих устройств и цифровых вычислительных машин для исследования проблем, связанных с динамическими нагрузками на самолет. Мазельский, О'Коннелл (The integrated use of analog and digital computing machines for aircraft dynamic load problems. Mazelsky Bernard, O'Connell Robert F.), J. Aeronaut. Sci., 1956, **23**, № 8, 721—740, 780 (англ.)

Динамические нагрузки, действующие на самолет, могут быть исследованы с помощью как моделирующих устройств, так и цифровых вычислительных машин. На выбор типа вычислительной машины влияет ее быстродействие и точность. На различных стадиях конструирования самолета с помощью машин решаются различные задачи. На предварительной стадии конструирования вычислительные машины используются для определения устойчивости системы и выбора характеристик самолета, исключающих возникновение флаттера. Далее следуют испытания на вибрацию. В ходе этих испытаний важно правильно выбрать степени свободы системы, быстро получить нужное количество вариантов решения, исключить ошибки и неверные решения. На заключительной стадии система исследуется с целью проверки ее характеристик и определения правильности конструктивных изменений, введенных на первых стадиях конструирования.

Моделирующие устройства применяются для исследования систем, описываемых дифференциальными уравнениями, составленными на основании энергетических принципов Лагранжа. Моделирование обычно выполняется с помощью электронных дифференциальных анализаторов. Если система описывается уравнениями в конечных разностях, то используется анализирующий четырехполюсник. Некоторые процессы в самолетных системах воспроизводятся при помощи электрических моделей в виде цепей определенной конфигурации.

Решение задач по исследованию динамических нагрузок на самолет с помощью цифровых машин обычно выполняется в предположении того, что координаты системы являются предопределенными функциями времени. Дифференциальные уравнения системы в этом случае содержат в качестве неизвестной величины частоту. Характеристическое уравнение может решаться численными методами, например методом матричной итерации.

При исследовании механической системы после проверки на изгиб и кручение с помощью вычислительных устройств определяются ее основные параметры — собственная частота и характер переходных процессов. Результаты, полученные на моделирующем устройстве, отличаются от величин, найденных на цифровой машине, не более чем на 4 — 5%.

Одним из существенных отличий при использовании различных вычислительных машин является способ интерпретации аэродинамики самолета. Для цифровых машин аэродинамические данные представляются конкретными числовыми величинами.

Сообщается, что фирмой „Локхид" в процессе разработки транспортного самолета были использованы моделирующая установка и цифровая машина типа ИБМ-701. Иссле-

дования конструкции на устойчивость, гибкость и вибрацию показали, что частоты и скорости, при которых возникает флаттер, определенные с помощью различных машин, довольно хорошо совпадают.

В статье делается вывод, что оптимальный подход к решению проблем, связанных с изучением действия на самолет вибрации, флаттера, нагрузок под действием ветра, а также нагрузок при взлете и на посадке достигается только в случае комбинированного применения моделирующих устройств и цифровых вычислительных устройств. Биол. 7 назв. Ю. И. Кириленко

3325. Авиационные электронные тренажеры. Катлер (Electronic flight simulators. Cutler A. E.), Brit. Communs and Electronics, 1956, 3, № 2, 70—74 (англ.)

Современные авиационные тренажеры являются устройствами, предназначенными для наземного обучения экипажей военных и гражданских самолетов. Характеристики самолета и двигателей обычно моделируются при помощи электронных и электромеханических вычислительных устройств. Основными элементами вычислительных устройств тренажера являются суммирующие цепи, интегрирующие следящие системы, электронные моделирующие цепи, позиционные и решающие следящие системы. Интегрирующие следящие системы обычно основываются на принципе велодина и в них используются тахогенераторы постоянного или переменного тока. Решающие следящие системы определяют направление на радиостанцию, поворот вектора скорости и решают целый ряд аэронавигационных задач.

В счетно-решающих устройствах тренажера необходимо воспроизводить аэродинамические характеристики, которые в большинстве своем оказываются нелинейными. Для этой цели широко применяются функциональные, профилированные потенциометры. В некоторых английских тренажерах установлено до 600 профилированных потенциометров.

Тренажеры могут быть разделены на два вида: комплексные и процедурные. Комплексный тренажер позволяет обучать одновременно весь экипаж и дает возможность моделировать все этапы полета. Такой тренажер строится применительно к конкретному типу самолета. Процедурный тренажер предназначен для отработки отдельных операций по управлению самолетом, например, пилотирования самолета по приборам, навигации с использованием радиотехнических систем.

Английские авиакомпании применяют комплексные тренажеры для подготовки экипажей самолетов «Комета», «Стратокризер», «Бристоль Британия». Как правило, тренажер вводится в действие до или почти одновременно с поступлением в эксплуатацию соответствующего самолета.

Ю. И. Кириленко

3326. Моделирующие устройства в проектировании паротурбинной ядерной энергетической силовой установки. Лейби (The analog computer aids nuclear plant design. Leiby David W.), Combustion, 1957, 29, № 3, 34—43 (англ.)

Описывается опыт использования моделирующего устройства для исследования переходных процессов в ядерной энергетической силовой установке, предназначенной для привода паровой турбины. Излагается скелетная схема установки, кратко описываются процессы регулирования теплообмена, давления пара и скорости вращения турбины.

Приводятся отдельные контуры регулирования установки и отображающие их контуры модели. Сообщаются некоторые результаты исследования переходных процессов регулирования. Г. Г. Рабинович

3327. Роль моделирующих устройств в разработке систем управления винтом изменяемого шага. Фрик (The role of analog computers in propeller control design. Frick Roy K.), Applic. and Ind., 1957, № 33, 257—263. Discuss., 263 (англ.)

Освещаются возможности применения моделирующих устройств при разработке систем автоматического регулирования шага воздушного винта применительно к задачам, возникающим при конструировании регуляторов винта, изменяемого шага для турбовинтовых двигателей. Даны линеаризированная и нелинеаризированная системы уравнений, описывающих работу такого винта и его регулятора, а также блок-схемы моделирующих устройств для их решения. Один из разделов посвящен применению моделирующих устройств при испытаниях реальных регуляторов винта изменяемого шага, когда моделирующее устройство имитирует в реальном масштабе времени статические и динамические характеристики самолета авиадвигателя и воздушного винта. Дается вывод передаточной функции операционного усилителя и освещаются некоторые вопросы, связанные с точным моделированием характеристик двигателя и воздушного винта. И. Л. Алимов

3328. Электронные моделирующие устройства. Кале (Elektronische Analogie—Rechenanlagen. Kahle Hermann A.), Naturwissenschaften, 1957, 44, № 22, 573—578 (нем.)

Излагаются принципы работы электронных моделирующих устройств. Рассматриваются структурные схемы моделей для решения систем алгебраических уравнений с несколькими неизвестными и для решения обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка. Описываются основные элементы моделей: умножающий усилитель, суммирующий усилитель, интегрирующий усилитель. Приводятся примеры применения моделирующих устройств для решения проблем автоматического регулирования.

Автор, по его словам, уже длительное время работает над созданием специализированной моделирующей установки для определения оптимальных параметров синхронных генераторов и регуляторов напряжения, предназначенных для систем электропитания самолетов и ракет. Ко времени написания статьи в модели использовалось 60 усилителей, 6 блоков умножения, 5 блоков нелинейностей («генераторов функций»). По словам автора, стоимость моделирующих устройств, используемых промышленностью и исследовательскими учреждениями США, составляет в настоящее время 80 млн. долл.

Г. Г. Рабинович

3329. Моделирующие устройства. Хансон (Analog computers. Hanson Milton E.), Minnesota Technolog, 1957 38, № 2, 20—21 (англ.)

В статье на конкретных примерах излагаются основы моделирования физических процессов. Описывается уравнение операционного усилителя как основного элемента моделирующего устройства и указывается на возможность получения разнообразных передаточных функций с помощью такого усилителя. Приводится пример составления структурной схемы для моделирования уравнения второго порядка, описывающего систему управления.

Г. Г. Рабинович

3330. Конструкция и принцип действия электронных моделирующих устройств. Эрнст (Aufbau und Wirkungsweise elektronischer Analogiegeräte, Teil I. Ernst D.), Regelungstechnik, 1958, 6, № 4, 125—128 (нем.; рез. англ.)

Описывается конструкция и принцип действия электронных моделирующих устройств. Рассматриваются основные принципы и функциональные схемы без технических деталей. Основное внимание уделено операционным усилителям, выполняющим линейные и нелинейные преобразования в различных комбинациях схем.

А. Ф. Смирнов

3331. Моделирующее устройство для изучения теплопередачи во время теплового восстановительного процесса. Вогел, Крюгер (An analog computer for studying heat transfer during a thermal recovery

process. Vogel L. C., Krueger R. F.), J. Petrol. Technol., 1955, **7**, № 12, 205—211 (англ.)

3332. Современные механические интегрирующие установки. Эрисманн (Moderne mechanische Integrieranlagen. Erismann Th.), Scientia electr., 1957, **3**, № 4, 112—120 (нем.; рез. англ., франц.)

Доклад, прочитанный 3 сентября 1957 г. на заседании Швейцарского общества автоматики. Дается описание современного состояния техники механических интегрирующих устройств. Приводится обзор нескольких механических интегрирующих установок, выпущенных различными европейскими фирмами с 1945 по 1955 г. Обзор иллюстрирован фотоснимками аппаратуры. Г. Г. Рабинович

3333. Перфорационные машины и электронный вычислитель. Майер (Lochkartenverfahren und Elektronenrechner. (Stand der elektromechanischen und elektronischen. Datenverarbeitung). Mayer Wilhelm), Z. Post- und Fernmeldewesen, 1957, **9**, № 12, 446—454 (нем.)

Дается краткий обзор и техническая характеристика некоторых вычислительных устройств для переработки информации фирм «ИБМ» «Ремингтон Рэнд», «Нашнл», «ZUSE KG», «Bull/Exacta», «Аддо». Приводится ряд схем последовательности обработки информации с вводом от перфокарт и перфолент. Н. П. Вашкевич

3334. Программированное умножение на табуляторе ИБМ-407. Бойелл (Programmed multiplication on the IBM 407. Boyell Roger L.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 4, 442—449 (англ.)

При отсутствии в комплектах счетно-аналитических машин вычислительного перфоратора может оказаться целесообразным использование табулятора ИБМ-407 для выполнения перемножения и перфорации двух произвольных величин, пробитых на одной и той же перфокарте. Эффективная скорость работы табулятора ИБМ-407 при этом уменьшается приблизительно в три раза сравнительно с обычным режимом перфорации суммы.

В используемом методе на каждую цифру множимого требуется иметь два счетчика. В одном из них накапливается частичное произведение, а во втором вырабатывается сигнал окончания этого накопления путем добавления единицы при каждом цикле сложения к отрицательному значению цифры множителя и определения момента достижения нулевого значения. После того как значение нуля достигается в соответствующих счетчиках всех цифр множителя, полученные частичные произведения суммируются со сдвигом и печатается окончательное значение произведения. В статье приводится схема коммутации различных узлов табулятора на коммутационной панели и временная диаграмма операций. Дается оценка среднего времени выполнения умножения, исходя из случайного характера распределения цифр множителя.

В. И. Смирнов

3335. Программа для вычисления давлений в газовых распределительных сетях методом Кросса на счетно-аналитических машинах. Сиккафус (A punched card program for calculating gas distribution network pressures by the Hardy Cross method. Sickafoose Robert D.), Proc. 37th Annual Convention. Amer. Gas Assoc. New York, s. a., 345—366 (англ.)

Приводится описание программы решения на комплекте счетно-аналитических машин задачи о распределении давлений в газовых распределительных сетях низкого давления методом Кросса. Метод Кросса был известен уже в течение многих лет, однако из-за сложности подготовки задачи и плохой сходимости итеративного процесса не нашел широкого применения при ручных вычислениях. Длительность решения и объем работ по подготовке задачи могут быть значительно понижены в случае использования комплекта счетно-аналитических машин. В статье подробно описывается методика вычислений, распределения материала на перфокартах и схемы коммутации наборных досок. Рассматриваются также возможности применения метода к решению других аналогичных задач.

А. В. Шилейко

3336. Направления механизации современной статистики. I—III. Бельфьоре (Lineamenti della meccanizzazione dei moderni catasti. I—III. Belfiore Placido), Riv. catasto e serv. tech. e erariali, 1955, **10**, № 4, 225—278 (итал.)

3337. Направления механизации современной статистики. IV. Бельфьоре (Lineamenti della meccanizzazione dei moderni catasti. IV. Belfiore Placido), Riv. catasto e serv. tecn. erariali, 1955, **10**, № 5—6, 309—352 (итал.)

Части I—III см. реф. 3336.

Исторический очерк развития счетной техники. Изложение принципов работы и устройства счетно-аналитических машин, использующих перфокарты. Приведены описания и фотографии машин фирм «ИБМ» «Буль», «Ремингтон Рэнд». И. В. Лебедев

3338. Непрерывный календарь на перфокартах. Пек (A punched card perpetual calendar. Peck Peter A.), J. Chem. Educ., 1957, **34**, № 12, 611—612 (англ.)

Описывается система кодирования для размещения календарных дат на перфокартах. С помощью массива из 35 перфокарт с 98 пробивками можно определить день недели для любого дня любого месяца любого года.

А. В. Шилейко

3339. Обучающаяся машина. Часть I. Фридберг (A learning machine. Part I. Friedberg R. M.), IBM J. Res. and Developm., 1958, **2**, № 1, 2—13 (англ.)

Приводится описание экспериментальной работы, проведенной с целью изучения процесса „обучения" машины, т. е. процесса автоматического отыскания последовательности действий (или ряда таких последовательностей), приводящей к решению поставленной задачи. В экспериментах были заняты три устройства: гипотетическая цифровая вычислительная машина «Герман», «учитель» и «ученик». Все три устройства моделировались с помощью цифровой вычислительной машины ИБМ-704. Программы машины «Герман» могут состоять из 64 двухадресных команд, выполняемых над хранящимися в запоминающем устройстве 64 одноразрядными числами. Четыре возможные операции предусматривают условную передачу информации из одной ячейки запоминающего устройства в другую, а также передачу управления. Первоначально содержимое всех ячеек запоминающего устройства (как команды, так и числа) представляет собой случайные числа. Устройство «учитель» содержит информацию о цели вычислений (обычно это установление определенного соответствия между содержимым входной и выходной ячеек запоминающего устройства) и об адресах входной и выходной ячеек. Ни «ученик», ни «Герман» такой информации не имеют. Вычисления проводятся в форме ряда попыток. После окончания каждой попытки, которая считается законченной после выполнения команды, содержащейся в ячейке памяти номер 63, если она не предусматривает передачи управления, но не позже, чем через 64 операции от начала попытки, «учитель» исследует содержимое входной и выходной ячеек и передает «ученику» информацию об успешности попытки. После завершения каждой попытки изменяется программа, причем это изменение производится путем либо «упорядоченной», либо случайной замены одной из команд. При случайной замене на место одной произвольной команды записывается случайное число. При упорядоченной замене меняется одна из двух очередных команд, обладающая меньшим «числом успешности». Число успешности вычисляется на основании определенных правил и служит критерием частоты участия данной команды в составе неуспешных программ. В статье подробно описываются 9 различных экспериментов, целью каждого из которых было получение программы решения некоторой задачи или хотя бы до-

стижение такого состояния, когда определенная (достаточно большая) часть всех попыток оказывалась бы успешной. В процессе экспериментов менялись как начальные условия, так и характеристики самой машины: вместо «Германа» моделировалась другая машина — «Шерман». Число попыток в экспериментах доходило до нескольких миллионов. Результаты экспериментов сведены в таблицы. А. В. Шилейко

3340. Симпозиум по конструированию машин, моделирующих поведение человеческого мозга (Symposium. The design of machines to simulate the behavior of the human brain), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, **5**, № 4, 240—255 (англ.)

Материалы симпозиума, созванного в 1955 г. Приводится содержание четырех докладов и дискуссионные выступления:

Мак-Каллок (W. S. McCulloch, Массачусетский политехнический институт), Мозг — вычислительное устройство с отрицательной обратной связью. Дается оценка основных «параметров» мозга и описание работы мозга.

Эттингер (A. Oettinger, Гарвардский университет). Противоположности и подобия. Выявляются аналогии и различия в функционировании отдельных частей вычислительных машин и нервной системы животных.

Рочестер (N. Rochester, ИБМ), Моделирование работы мозга на вычислительных машинах. Докладываются результаты экспериментальной проверки на машине ИБМ-701 условных положений теории Хебба (Hebb D. O., The organization of behavior, N. Y., 1949). Более подробное описание этих экспериментов см. РЖМат, 1957, 8319.

Шмитт (O. Schmitt, Университет штата Миннесота), Мозг как специфическое вычислительное устройство. Автор предостерегает от чрезмерного увлечения аналогиями между мозгом и ныне действующими вычислительными машинами, как устройствами с чисто детерминистским принципом действия. Отмечается целесообразность создания машин-моделей с вероятностными закономерностями работы отдельных частей и взаимодействия между ними, машин, более подобных мозгу, и только тогда пытаться искать аналогии.

Значительную часть реферируемой работы составляют выступления в прениях. Г. Г. Стецюра

3341. Самоделящиеся и самовоспроизводящиеся автоматы. Мейер (Self-repairing and reproducing automata. Meier Richard), Computers and Automat., 1956, **5**, № 12, 10—15, 32 (англ.)

Популярное изложение современной биохимической теории, объясняющей механизм деления и роста клеток, а также передачи и сохранения наследственных признаков. По этой теории совокупность наследственных признаков хранится в клетках в виде своеобразного линейного двоичного кода, локализующегося в хромосомах в виде цепочки нуклеиновых кислот. А. П. Ершов

3342. Представление аппаратов Леонардо Торрес-Кеведо. Торрес-Кеведо (Présentation des appareils de Leonardo Torres-Quevedo. Torres-Quevedo Gonzalo), Colloq. internat. Centre nat. rech scient., 1953, **37**, 383—406 (франц.)

Автор рассказывает об изобретениях своего отца:

1) машинах для игры в шахматы, 2) телекине — первом аппарате для управления судов по радио, 3) машине для решения алгебраических уравнений.

1. Шахматные машины. Были созданы две машины, ставящие мат королем и ладьей против короля. Изложена стратегия игры, приводящая к мату.

2. Телекин. Приведены краткие исторические данные и принципиальная схема.

3. В машине использованы логарифмические шкалы, удобные для умножения и деления и позволяющие расширить диапазон вводимых чисел. Кроме того, имеется механическое устройство для получения функции $y = \log(10^x + 1)$. Эта функция в сочетании с логарифмическими шкалами позволяет производить сложение.

В конце работы автор возвращается к шахматам и исследует вопрос о возможности отыскания полной стратегии игры. Р. Д. Бачелис

3343. Работы испанской школы в области автоматики. Торрес-Кеведо (Les travaux de l'école espagnole sur l'automatisme. Torres Quevedo Conzalo). Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 361—381

Автор рассказывает о теоретических и практических достижениях своего отца, Леонардо Торрес-Кеведо. Приведена краткая биография последнего, содержание некоторых его работ в области автоматики и вычислительной техники, а также сообщается о развитии и конструктивном осуществлении идей Леонардо Торрес-Кеведо последующими учеными. Р. Д. Бачелис

3344. Поиск информации с учетом ее структуры. Мурс (Information retrieval on structured content. Mooers Calvin N.), Inform. Theory 3 rd London Symbos., 1955, London, 1956, 121—132. Discuss., 132—134 (англ.)

Развитие суперпозиционного кодирования, приспособленного для поиска информации с учетом ее структуры. Как и раньше, вводится система описательных признаков — дескрипторов, по которым документ выделяется из набора документов. Теперь, однако, дескрипторы усложняются: вводятся пары, тройки, n первоначальных дескрипторов. Наиболее типична тройка ABC, где A — первый дескриптор из первоначального набора, C — второй и B — дескриптор, описывающий отношение между ними.

Тройки вводятся коммутативные ($ABC = CBA$) и некоммутативные ($ABC \neq CBA$), последние нужны для снятия омонимии в таких случаях, как традиционное «Dog bites man». Как одну из областей приложения системы автор отмечает поиск структур формул органических соединений. Библ. 13 назв. Г. Г. Стецюра

3345. Сессия по вопросам о неарифметическом использовании математических машин. Бут (Session on the computer in a nonarithmetic role. Introduction. Booth A. D.), Proc. Instn Electr. Engns, 1956, **B 103**, Suppl. № 3, 450—451. Discuss. 473—475 (англ.)

Обсуждаются вопросы о возможности применения математических машин для перевода с одного языка на другой, для распознавания звуковой информации, а также информации, изображенной на бумаге. Кроме того, рассматривается возможность использования машин для воспроизведения музыки и для игры в некоторые игры. А. Н. Чуйкин

3346. Анализ контекста при пословном машинном переводе. Харпер (Contextual analysis in word-forword MT. Harper Kenneth E.), Mech. Translat., 1956, **3**, № 2, 40—41 (англ.)

Сообщается, что основные трудности, с которыми сталкиваются при машинном переводе с русского языка, суть синтаксическая многозначность (омонимия ряда падежных форм) и лексическая полисемия. Эти трудности можно преодолеть, если рассматривать каждое слово не изолированно, а в его связях с окружающими словами, в контексте. Т. Н. Молошная

Примечание редакции. Как известно, в первых советских работах по автоматическому переводу, доведенных до экспериментальной проверки в конце 1955 г., использован именно метод анализа контекста. Соответствующие результаты опубликованы, например, в брошюре Д. Ю. Панова (РЖМат, 1958, 6350 К).

3347. О машинном переводе с французского на русский. Кулагина О. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 192—193

3348. Машинный перевод. Аплгейт (Mechanical translation. Applegate Joseph R.), Chem. Bull., 1958, **45**, № 6, 23—24, 26 (англ.)

Популярная статья.

3349 К. Применение моделирующих устройств в промышленности. (Analog computers. Their industrial applications. Proc. Sympos. Management, Apr. 10—11, 1956, Kansas City, Missouri. (Midwest Res. Inst. Publs, № 185). Kansas City, Mo., (1956) № 185, 210 pp., ill.) (англ.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

3350. Роль цифровых вычислительных машин в ядерных расчетах. Сангрен (The role of digital computers in nuclear design. Sangren Ward C.), Nucleonics, 1957, **15**, № 5, 56—60 (англ.)

Статья посвящена опыту применения цифровых вычислительных машин при расчетах ядерных реакторов. Для программирования машины необходимо учитывать тип реактора и своеобразие задач, связанных с тем или иным типом. В статье приводятся основные группы задач, из которых складывается расчет реактора и которые подлежат решению на вычислительной машине. Общее число задач составляет примерно 140.

Далее рассматриваются различные типы вычислительных машин с точки зрения применимости их при ядерных расчетах. Затем автор касается вопроса об обслуживающем персонале и подготовке кадров для работы на вычислительных машинах. Большое место в статье занимает экономическая сторона эксплуатации вычислительной машины. Приводятся цифры относительно стоимости самих машин, стоимости одной операции и т. д. Указан способ определения стоимости решения одной задачи. Библ. 5 назв. И. С. Колтыпин

3351. Решение методом Монте-Карло задачи из области подземной связи. Клапем (A Monte Carlo problem in underground communications. Clapham J. C. R.), Operat. Res. Quart., 1958, **9**, № 1, 36—54 (англ.)

Описывается постановка и метод решения задачи об эффективности подземной телефонной связи в угольных шахтах. Заданным предполагается расположение телефонных аппаратов в шахте и расположение всех рабочих относительно этих аппаратов. При вызове с поверхности некоторые пункты отвечают через случайные промежутки времени, а некоторые вовсе не отвечают. Полученное в шахте сообщение может передаваться также устно через посыльных. Опыты показали, что время ожидания ответа имеет определенное стационарное распределение. Целью решения является определение промежутка времени, в течение которого все находящиеся в шахте рабочие смогут покинуть шахту по вызову с поверхности. Для решения использовалась колода перфокарт с пробитыми на них случайными числами. Для каждого пункта установки телефонного аппарата приготовлялось 100 перфокарт, на каждой из которых пробивалось четырехразрядное случайное число, порядковый номер карты, рассматриваемый как номер попытки вызова, и код данного пункта. Первоначально карты сортировались в соответствии с вероятностью ответа. Если, например, вероятность ответа для данного пункта принималась равной 0,85, то в тех случаях, когда два первых разряда случайного числа оказывались больше или равными 85, то считалось, что вызов остался без ответа и времени ожидания ответа приписывалось значение 9999. Если же два первых разряда оказывались меньшими, чем 85, то по двум другим разрядам определялось время ожидания ответа. Полученные таким образом 100 значений времени ожидания ответа для каждого пункта пробивались на нескольких перфокартах и затем вводились в электронную вычислительную машину (опытная модель ACE), где на их основе вычислялось полное время вызова. Результаты вычислений иллюстрируются следующей таблицей:

Номер шахты	Время, требуемое для вызова всех рабочих к подъемнику		
	минимально возможное	среднее	максимальное
1	100	138	151
2	100	124	172
3	100	138	162

А. В. Шилейко

3352. Вычислительные машины и термодинамика. Мак-Интайр (Computers and thermodynamics. McIntire Robert L.), Automat. Control, 1958, **7**, № 2, 51—55 (англ.)

Способы применения цифровых вычислительных машин для решения задач термодинамики и химической промышленности иллюстрируются на примере выполнения расчетов, связанных с сжиганием природного газа. Рассматриваются исходные уравнения химических реакций, соответствующие математические уравнения и блок-схема программы вычислений. Отмечается, что большинство подобных вычислений может быть выполнено на вычислительных машинах средних размеров примерно за 30 мин., а на больших вычислительных машинах — менее чем за 5 мин. Применение машин средних размеров, вероятно, более экономично. При условии, что программа вычислений имеется, стоимость решения типовой задачи составляет около 100 долл. А. В. Шилейко

3353. Некоторые применения вычислительных машин в нефтяной и газовой промышленности (Some uses of computers in the oil and gas industry), Computers and Automat., 1957, **6**, № 11, 14, 23, 34 (англ.)

Перечислен ряд задач из области нефтяной и газовой промышленности, для решения которых целесообразно использовать счетные машины. В. А. Брик

3354. Математические машины—новый инструмент для проектирования трансформатоов. Хилс (Computers.— a new toold in transformer design. Hills N. A.), Electr. News and Engng, 1958, **67**, № 4, 70—72 (англ.)

Сообщается о вычислительной машине дискретного действия «Раскел» (Rascal), применяющейся для расчета трансформаторов. Вычисления, необходимые для расчета трансформатора, повторяются многократно, причем после каждого вычисления производится сравнение полученных характеристик с теми, которые желательно получить. В случае, если эти характеристики отличаются, в параметры трансформатора вносятся поправки, и вычисления повторяются. А. Н. Чуйкин

3355. Вычислительные машины для автоматического контроля качества и вычислительные машины для других целей управления. Амбер, Амбер (Automatic quality control computers and other machine control computers. Amber George H., Amber Paul S.), Computers and Automat., 1958, **7**, № 4, 14, 16, 18, 20 (англ.)

Рассматриваются основные проблемы автоматизации производственных процессов на современных предприятиях. Для обрабатывающих станков характерным является статистическое распределение размеров изготовляемых деталей. Непосредственное подключение к такому станку системы автоматического управления с обратной связью привело бы к тому, что корректировка зависела бы от каждого размера каждой индивидуальной детали. Устойчивость при таких условиях может быть достигнута только в случае медленно действующих систем, что явно не может считаться удовлетворительным решением. Авторы считают, что автоматическое регулирование в применении к современным прецизионным станкам должно производиться на основе некоторых усредненных параметров так называемого «машинного среднего». Ближайшей задачей для вычислительных машин в системах авто-

матического управления будет вычисление машинного среднего как для непрерывных (размер листового материала, проволоки), так и для дискретных (размеры отдельных деталей) входных параметров. Контроль качества также должен производиться на основе какого-либо статистического параметра, например, средне-квадратичного отклонения. В числе других возможных применений вычислительных машин отмечаются: вычисление режимов работы станков, обеспечивающих оптимальный срок службы инструмента, и автоматическое поддерживание такого режима; автоматическое регулирование производительности группы станков, обеспечивающее поступление деталей на сборку в нужных количествах без перебоев; вычисление эмпирических зависимостей ошибок от каких-либо параметров (например, зависимость ошибки следящей системы от нагрузки) для компенсации этих ошибок по цепи отрицательной обратной связи и т. п. Библ. 6 назв.

А. В. Шилейко

3356. **Новые машины фирмы «ИБМ»** (Nuove macchine IBM), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 17, 24—25 (итал.)

Короткое сообщение о двух новых машинах фирмы «ИБМ». «Регистратор присутствия» ИБМ-8200 автоматически пробивает на перфокартах время прихода и ухода служащих и ряд дополнительных сведений, необходимых для автоматического расчета зарплаты. Малая вычислительная машина ИБМ-610 (РЖМат, 1958, 8320) предназначается в основном для инженерных расчетов. Ее отличительной особенностью является возможность автоматической установки десятичной запятой.

А. В. Шилейко

3357. **Система УНИВАК для заказа билетов на самолеты** (UNIVAC Airlines Reservation System), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 252—253 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 3, (англ.)

Электронная система заказов билетов на самолеты (UNIVAC Airlines Reservation System) сконструирована фирмой «Ремингтон Рэнд» и может запоминать состояние заказов билетов на большое число направлений и почти немедленно давать ответы в местные билетные кассы, а также составлять доклады, необходимые для управления авиалиниями.

Первоначально разработанная для воздушных сообщений, эта система приспосабливается для железнодорожного и автобусного транспорта, а также для других случаев предварительных заказов. Система разрабатывалась в течение 10 лет. Она объединяет в себе расположенный в центральной конторе главный блок, соединенный либо прямо, либо через линии связи с конце-выми агентами в каждой билетной кассе. В одном ответе имеются данные о восьми направлениях. Основой системы является вычислительная машина «УНИВАК Файл Компьютер» (UNIVAC File Computer), специально приспособленная для соединения с периферийным оборудованием. Информация о полетах содержится на магнитных барабанах (до 10 штук) емкостью по 180 000 чисел (примерно на 9000 полетов). Емкость системы позволяет хранить данные на продолжительное время. Кроме учета заказов, система может выполнять некоторые вспомогательные функции, например, составление информации о продажах (число сделок с определенным городом, число аннулированных заказов, среднее число пассажиров или среднее число непроданных мест на определенном направлении в течение определенного периода и т. д.).

Имеется устройство, позволяющее изменять имеющийся график полетов или вводить новый. Для контроля данных и для составления докладов имеется устройство вывода в виде электрической пишущей машинки. Эта система создавалась в 1946 г. По 1953 г. изучались вопросы, связанные с применением ее в главных авиакомпаниях США.

В. Д. Князев

3358. **Децентрализованные вычисления с помощью малых вычислительных машин. Фланнелл** (Decentralized computing with the small computer. Flannell C. F.), Instrum. and Automat., 1958, **31**, № 3, 476—477 (англ.)

Отмечается, что решение инженерных задач на больших вычислительных машинах часто встречает трудности, потому что программирование на больших машинах сложно и требует много времени; кроме того, большая загруженность этих машин не позволяет быстро получить решение задачи.

Указывается, что в крупных компаниях целесообразно иметь одну большую вычислительную машину для решения сложных задач, а на отдельных предприятиях иметь малые вычислительные машины.

Сообщается также, что малые машины могут быть успешно использованы как специализированные, и приводится пример использования машины LGP-30 на нефтеперегонном заводе одной из крупных нефтяных компаний США. Применение машины позволяет ежедневно вносить коррективы в процесс производства на основе данных текущего анализа, что дает экономию от 1000 до 2000 долл. в день.

А. Н. Чуйкин

3359. **Из опыта работы машиносчетной станции статистического управления Челябинской области. Ясюков И.**, Вестн. статистики, 1958, № 3, 66—70

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аванесов Э. Т. 2334
Агишев Р. Я. 2715Д
Адельсон-Вельский Г. М. 2908
Адян С. И. 2233, 2234
Азбелев Н. В. 2626
Айзерман М. А. 2642
Аксентьев Л. А. 2568, 2580
Алда В. 3176
Александров А. Д. 3189
Александров П. 2457
Андреев Н. И. 2787
Атанассиадис 2946

Б

Бакаев Ю. Н. 2723
Балабанов В. А. 2897
Баренблатт Г. И. 2733
Башелейшвили М. О. 2672
Белкин И. Г. 3175
Бердзенишвили С. В. 2755
Берман Д. Л. 2537
Бицадзе А. В. 2779
Благовещенский Н. 2195
Богатырев О. М. 2722
Боголюбов Н. П. 2860
Бородачев Н. М. 2773Д
Бродский М. С. 2888
Бурсенцов Н. П. 2796
Бугров Я. С. 2519
Булыгин В. Я. 2734
Бухштаб А. А. 2296

В

Вагнер В. В. 3188
Вайнберг М. М. 2894
Валицкий Ю. Н. 2852
Васьківська Т. Г. 2637
Вейник А. И. 3236
Векслер А. И. 2901, 2902
Вербицкий Л. Л. 3172
Виденский В. С. 2526
Вильнер И. А. 3061, 3266
Виляцер В. Г. 2366
Виноградов И. М. 2283
Вишик М. И. 2706
Владимиров В. С. 2860
Власов И. М. 2652
Войлоков М. И. 2624
Войтенко М. А. 3118
Воробьев Г. В. 3066
Ворович И. И. 2772Д

Г

Гайдук Ю. М. 2153, 2198
Галонен Л. М. 2686, 2688
Гамкрелидзе Р. В. 2725
Гантмахер Ф. Р. 2353К, 2542
Гарбер Е. Л. 2499
Гаспарян С. 3153
Гейдельман Р. М. 3162
Гельфер С. А. 2565, 2567, 2571
Гельфонд А. О. 2309
Генчев Т. 2777
Геронимус Я. Л. 2520
Гирсанов И. В. 2152
Глазман И. М. 2886
Глейзер Г. 2197
Гнеденко Б. В. 3017
Говорухина А. А. 2784Д
Гогсадзе Р. Ш. 2577
Голубев В. А. 2293
Горбунов К. Г. 3124
Гохберг И. Ц. 2774
Григорьянц А. Н. 3076
Грищенко Л. З. 2636
Гуревич М. И. 3075, 3076
Гуссов В. В. 2166

Д

Дебердеев А. А. 2718
Девингталь Ю. 2699, 2700
Джавадов М. Г. 2681
Дзядык В. К. 2530
Диткин В. А. 2847
Довгановский Б. П. 2340
Домрачева Г. И. 2903, 2904
Дорфман А. Г. 3229
Дружинин Н. К. 2180
Дынкин Е. Б. 2152
Дун Гуан-чан 2285

Е

Егоров В. Г. 2641
Елкин Ю. Г. 2364
Ермаков Ю. И. 3181
Ермолаев Л. 2648
Еругин Н. П. 2603
Ескин Г. І. (Эскин Г. И.) 2899, 2900
Ефимов А. В. 2516, 2517, 2518
Ефимов В. П. 2183
Ефлеев А. П. 2575
Ешуков Л. Н. 2622

З

Зайцев М. Н. 2586
Зельдович Я. Б. 2733
Зельцман В. Б. 2196
Зидаров Д. 2670
Змогрович В. А. 2817
Золин А. Ф. 2579
Зонов А. И. 3075
Зуннунов Н. З. 2716
Зуховицький С. І. (Зуховицкий С. И.) 2533, 2899, 2900

И

Ибрагимов И. И. 2525
Измайлов В. Д. 3170
Ильин В. А. 2680
Ишлинский А. Ю., 2720

К

Калафати П. Д. 2775
Канторович Л. В. 2898
Карапетян С. Е. 3161
Карасев А. И. 2970К
Карпов А. Б. 3255
Карубэ 2694
Касьянюк С. А. 2598Д
Катетов М. 2471
Келдыш Л. В. 2475
Ким Сон Рён 2684
Климов Н. И. 2304
Коваленко І. М. 2931
Комладзе Г. М. 3262
Кондратьев А. С. 2726
Коновалов И. М. 2607
Коноплев В. П. 2633
Коробов Н. М. 2282, 2284
Королюк В. С. 2966, 2967
Костомаров Д. П. 2634
Кострикин А. И. 2414
Котов В. Ф. 3087
Кошелев А. И. 2662
Красюков В. П. 3235
Крейн М. Г. 2774
Крейн С. Г. 2647
Крейцер Г. П. 3168
Кроживицкая Е. 2600
Крупичка С. 2312
Кудрявцев Л. Д. 2676
Кужель А. В. 2887
Кузнецов А. В. 2235
Кузнецов П. И. 2723
Кулагина О. С. 3347
Курцвейль Я. 2601
Кушка З. П. 3096, 3097
Кушков Н. Н. 2623, 2627

Л

Ладыженская О. А. 2732
Лапко А. Ф. 2169
Ларичев П. А. 2228
Лебедев П. Н. 3112
Лебедь Г. К. 2527, 2528
Левин В. И. 2795
Левицкий 2407
Лепина Э. И. 2815Д
Лившиц М. С. 2888
Лившиц П. С. 3041
Лидский В. Б. 2885
Линь Вэй 2559, 2582
Лоскутов В. И. 2154
Лу Вэнь-дуань 2313
Львин Я. Б. 3078
Люстерник Л. А. 2169, 2706
Люй Хун-фань 2631
Лю Шао-сюэ 2411
Лю Шу-цинь 2557
Лю Юн-цин 2625
Ляховицкий В. Н. 2371
Ляшко А. Д. 2786

М

Малашенко С. В. 2720
Мальцев А. И. 2232
Малявко К. Ф. 2539Д
Маргаритис Е. 3036
Маркус А. С. 2871
Маркушевич А. И. 2192, 2203
Мацкин М. С. 3082
Минковский В. Л. 2226
Мищенко Е. Ф. 2644
Моллаков М. 2791
Мулин И. Г. 3158
Мучник А. А. 2240

Н

Наймарк Б. М. 2678
Накаока М. 2442
Намикава 3079

Нарига 2400
Натансон Г. И. 2534, 2535
Несторович Н. М. 3125
Никольский С. М. 2538 К

О

Обрешков Н. 2311
Овсеевич И. А. 3026
Огиевецький І. І. 2521, 2522
Оками 2832
Олевский А. М. 2819
Олейник О. А. 2710
Оно 2349, 2350, 2427
Опарин Д. И. 3046
Осіпов П. М. 2808
Оу Ци-хуань 2793

П

Пань Чэн-дун 2292
Пападимитриу И. 2793
Пензов Ю. Е. 3187
Песин И. Н. 2274
Петканчи Б. 3163, 3164
Петренко А. И. 3123
Плиев С. Б. 2753
Погодина Г. В. 3059
Положій Г. М. 2581
Пономарев В. 2457, 2474
Понтрягин Л. С. 2644
Похсрарян М. С. 2730
Прокофьев В. М. 3224
Проскуряков А. П. 2632
Протасов В. И. 2597 Д, 2650
Пудовкин М. А. 2735, 2736
Пулькин С. П. 2701
Пятецкий-Шапиро И. И. 2307

Р

Разыграев А. М. 2431
Райков Д. А. 2853
Ральевиh Ш. 2546
Резніченко З. О. 3058
Ремизова Н. И. 2783Д
Решетняк Ю. Г. 3222
Розенфельд Б. А. 3174, 3175
Ройтенберг Я. Н. 2615
Рохлин В. А. 2488, 2489

С

Сакалис 2944
Саульев В. К. 3237
Седельников Т. Х. 2768
Сенькин Е. П. 3223
Сідляр М. М. 2754
Симода С. 2661
Скляренко Е. 2459
Скопец З. А. 3086, 3114, 3115, 3116
Скопин А. И. 2394
Скоробагатько А. А. 2756
Славянович В. Я. 2746
Смирнов Ю. 2458, 2472
Смолицкий Х. Л. 2669
Соболевский П. Е. 2647
Солодов А. В. 2617
Стечкин С. Б. 2515, 2523, 2524
Стовас В. М. 3102
Стрежнев В. А. 2737, 2738, 2739
Студнєз Ю. П. 2924
Су Бу-цин 3165
Судзуки 2828
Сунчелеев Р. Я. 2752
Сухаревский И. В. 2668

Т

Тагамлицки Я. 2812 К
Такасэ 2942, 3044
Такэути Т. 2547, 2549, 2550, 2551
Тамме Э. Э. 2896
Тафт В. А. 2724
Темирбаева М. К. 2649
Темченко М. Е. 2720
Терещенко Н. И. 2619
Тер-Крикоров А. М. 2578
Тетельбаум И. М. 3315
Тирский Г. А. 2727
Тиман А. Ф. 2529
Тиман М. Ф. 2532
Тода Х. 2442
Тодоров И. Т. 2670
Трикоми Ф. 2714К
Туаев А. А. 2576
Тумаркин Г. Ц. 2572, 2573, 2574
Тумашев Г. Г. 2738
Тышкевич Р. И. 2363

У

У Дэ-тао 2827
Ульянов П. Л. 2510, 2511
Ура Т. 2639
Урабэ 2810
Успенский В. А. 2239
У Чан-цзю 2313

Ф

Фаге М. К. 2882
Фаддеев Л. Д. 2621
Федоров Г. Ф. 2606
Фиников Б. И. 2432
Фридман М. А. 2372, 2373, 2374, 2375, 2376
Фишман К. М. 2852

Х

Хавинсон С. Я. 2569, 2572, 2573, 2574
Халитова Н. А. 3251
Хан Хён Гон 2451
Хинчин А. Я. 2937

Ц

Цалюк З. Б. 2626
Цетлин М. Л. 2430
Цзян Бо-цзюй 2476
Ципкін Я. З. 2717
Цодыкс В. М. 2497

Ч

Чжан Кай-мин 2583
Чжан Чжи-фэн 2629
Чжан Ши-сюнь 2322, 2588, 2880
Челноков Н. И. 3315
Чэндиров Ђ. И. 2693
Чертков Р. І. 2635
Чибрикова Л. И. 2702
Чистовская Н. И. 2726
Чичкин Е. С. 2626

Ш

Шанин Н. А. 2280К
Шао Пин-Тсунг 2300
Шапиро З. Я. 2857
Шафаревич И. Р. 3147
Шевцов Г. С. 2367
Шолохович Ф. А. 2646
Шрейдер Ю. А. 2908

Э

Эйдельман С. Д. 2708, 2711
Эйдус Г. С. 2430

Ю

Юсифзадэ Ч. Г. 2780
Ющенко А. А. 3232

Я

Яглом И. М. 2444
Ямамото 2387
Ясиновый Э. А. 3063
Ясюков И. 3359

A

Aaron M. R. 3275
Abellanas P. 3140
Aczel M. A. 2986
Adachi R. 3231, 3240
Aeppli A. 3091
Ahrendt M. H. 2209
Aiken D. J. 2220
Aissen M. I. 2836
Akaza T. 2558
Alaci V. 2843
Alblas J. B. 2745
Aljančić S. 2513
Allen H. D. 3111
Amante S. 2593
Amber G. H. 3355
Amber P. S. 3355
Ammeter H. 3054
Amy L. 2934
Anderson A. R. 2254
Anderson D. B. 2214
Anderson P. W. 2929
Anderson R. D. 2466
Andreoli G. 2422
Anglès d'Auriac P. 2335
Antohi-Teodorescu V. 2704
Apostle H. G. 2165
Applegate J. R. 3348
Aragnol A. 3205, 3209
Archbold J. W. 2959
Arcidiacono G. 2343
Arscott F. M. 2837
Arsove M. G. 2854
Ashford J. R. 3049
Athanassiadis C. 2946
Atiyah M. 2425
Atta S. A. 3244
Aumann G. 2421
Axelrod L. R. 3253

B

Bachmann H. 2506
Backes F. 3156, 3157
Baer R. 2361
Ballieu R. 2338
Banach S. 2813 К
Barsotti I. 2408
Barta J. 3085
Bartholomeusz E. F. 2747
Barton S. A. 3300
Barut A. O. 2910
Bass R. W. 2608
Bassetti P. 2989
Basson A. H. 2279 К
Bauer H. 2460
Baumann V. 2782
Beale E. M. L. 3001
Bedon R. 3259
Beesack P. R. 2610
Behnke H. 2200
Behrend F. A. 2417
Bel L. 3194
Belfiore P. 3336, 3337
Bellman R. 2788
Benado M. 2370
Benes V. E. 3032
Béres E. 3249, 3250
Berg L. 2807
Berger M. 3173
Bergström H. 2921
Bernasconi C 2769
Bernardi S. D. 2562
Berstein I. 2479
Besicovitch A. S. 2495
Beth E. W. 2238
Beyer G. 2392
Beyer J.-D. 3291
Bhonsle B. R. 2835
Bielecki A. 2682
Biernacki M. 2560, 3068
Billeter E. P. 3008
Bilo J. 3110
Bishop A. B. 3022
Blanchard A. 2491 Д
Blanché R. 2259
Bohm D. 2968
Booth A. D. 3345
Borsuk K. 2440
Borwein D. 2823
Boss J. P. 2971 Д
Bott R. 2483
Box G. E. P. 3274
Boyell R. L. 3334
Brauer A. 2341
Braun H. 2306
Brendan B. T. 2219
Bridgman P. W. 2162
Brink E. L. 2998
Browder F. E. 2707
Brown A. B. 2314
Brunk H. D. 2802
Bryan J. C. 2212
Buchner P. 2917
Buono U. dal 2490 К
Burkill J. C. 2531
Burniat P. 3138, 3139, 3143

C

Campbell J. G. 2318
Campolonghi L. 2979
Cani J. S. 2998

Cantrelle R. 3024
Caprioli L. 2761
Carell E. 2992
Cartier P. 2416, 2893
Casteels L. 3133
Čeněk G. 3129 K
Cesari L. 2502, 2503
Chacon E. 3005
Chandler W. W. 2435
Chang Kai-ming 2583
Chang Shih-Hsun 2322, 2588, 2880
Charnes A. 2977
Chevalley C. 2429 K
Chiang Pe-chu 2476
Chillingworth H. R. 2865
Chin Yuan-shun 2640
Chisini O. 3132
Chomsky N. 2261
Choudhury A. C. 2389
Choudhury A. K. 3313
Cinquini Cibrario M. 2698
Cives G. 2205
Civin P. 2867
Ciucu G. 2923
Clapham J. C. R. 3004, 3351
Clawson J. W. 3088
Clunie J. 2585
Collatz L. 3238
Comier J.-J. 2740
Commeau J. 2333, 3071 K
Conner P. E. 2486, 2487
Conte S. 3070
Corduneanu C. 2692
Corput J. G. 2330
Cosnita C. 3062
Costa de Beauregard O. 3198
Cottrell P. J. W. 3039
Coulmy G. 3260
Court N. A. 2272, 3090
Coutie G. A 3274
Couty R. 3201
Cox D. R. 2961
Cristescu R. 2932
Creanga J. 2182
Crumley R. D. 2222
Crupi G. 2763
Császár Á. 2446
Cuberbiller O. 3109 K
Cutler A. E. 3325

D

Dandl R. A. 3312
Danicic I. 2287
Davies M. 3012 K
Davis R. L. 2213
Daymond S. D. 2749
Delachet A. 2329 K
Delange H. 2298
Delsarte J. 2674
De Lucia L. 2958
Dembowski J. 2155
Dembowski P. 2418
Deplus C. 3024
Des Raj 2943
Dettmar H.-K. 3233
Devidé V. 2505
Dietert H. 2229
Dingle R. B. 2599, 2829
Dionisio J. J. 2344
Dixmier J. 2893
Doig A. 3033
Dolbeault-Lemoine S. 3177
Dold A. 2481
Dolnick G. 2168
Dörge K. 2426
Douce J. L. 3314
Douglas J., Jr 3239
Dowker C. H. 2455
Drazin M. P. 2406
Dugué D. 2163, 2930
Duijvestijn A. J. W. 2771
Dumitrescu D. 2191
Dwyer P. S. 2988

E

Eberl W. 2981
Eda Y. 2396
Eeden C. van 2953
Eggleston H. G. 2504
Eijk C. J. van 3013
Elteren P. van 2965
Epstein M. 2215
Erdős P. 2301, 2302, 2587
Erismann T. 3332
Ernst D. 3330
Escande L. 3263
Etienne J. 2677

F

Faedo S. 2651
Fall J. V. 2842
Faris J. A. 2266
Faure R. 2628
Fenves S. J. 3293
Fenyo I. 2620
Fiedler M. 2445
Fine N. J. 2264
Finkelstein A. B. 2744
Fisher R. 2950
Flannell C. F. 3358
Flett T. M. 2543, 3152
Fog D. 2816
Foguel S. A. 2869
Foias C. 2712
Fort T. 2616
Fox L. 3230
Fraeys (Fraeijs) de Veubeke B. 2789, 2790
Frajese A. 2170
Franckx Ed. 2925, 3242
Frauenfelder W. 3053
Fredricks R. W. 2778
French C. E. 2987
Frenkel J. 2492 Д, 2798
Frey T. 2536
Frick R. K. 3327
Friedberg R. M. 3339
Fröhlich A. 2393
Fuchs A. 2798
Funayama N. 2420

G

Gaeta F. 3135
Gallarati D. 3141
Galler B. A. 2988
Gallie T. M. Jr 2541
Gandhi J. M. 2326
Ganea T. 2509
Gantmacher F. R. 2353 K, 2642
Ganzhorn K. 2436
Gardner J. W. 2225
Gattegno C. 2208
Gayen A. K. 2947
Geier A. 2838
Gergely E. 3226
Geursen S. J. 2206
Gheorghiu O. E. 3185, 3186
Ghermanescu M. 2160, 2809
Ghircoiasiu N. 2826
Ghosh K. M. 2728
Gilde W. 3016
Ginzburg A. 2342
Glaeser G. 2874
Godeaux L. 3136, 3137
Godefroid M. 2804
Goetz A. 2463, 2485
Goffman C. 2419, 2822
Golab S. 3057
Golubev V. A. 2290
González Asenjo F. 2156
Gonzalez del Valle A. 2438
Goormaghtigh R. 3083, 3084
Gordon B. M. 3303
Gottschalk W. H. 2262
Gouarné R. 3246—3248
Grace E. E. 2470
Graeub W. 3169
Green A. E. 2731
Green H. F. 2864
Greenspan D. 3093
Gregg J. R. 2276 K
Grenander U. 2972
Griffith J. L. 2845
Gröbner V. W. 2655, 2721
Groot J. de 3227
Grosh R. J. 2767
Grossman H. D. 2327
Grötzsch H. 2570
Gruat J. 2740
Grunsky H. 2797
Grzegorczyk A. 2236
Guha U. C. 2512
Gussi G. 2712
Gyires B. 2806, 2863

H

Hadamard J. 2663
Hahn F. H. 2995
Hajós G. 2230 K
Haldane J. B. S. 2270
Halmos P. R. 2881, 2905
Hämeen-Anttila K. A. 2759
Hammersley J. M. 2940
Hanson M. E. 3329
Harper K. E. 3346
Harris E. K. 3052
Harrop R. 2258
Harter H. L. 2954
Härtig K. 2268
Hartley H. O. 2969 K
Hartman P. 3077
Haupt O. 3199
Havel V. 3089, 3101
Hawkins D. 2303
Hawkins G. A. 2767
Hayashi E. 2461
Hayes R. E. 3301
Haynsworth E. V. 2337
Hed S. 2978
Heider L. J. 2454
Heinz E. 2878
Henriksen M. 2462
Herfurth G. 3258
Hermes H. 2231
Herstein I. N. 2362, 2415
Hille E. 2872
Hills N. A. 3354
Hirokawa H. 2821
Hirschfeld R. 2876
Hodges J. H. 2316
Hoehing W. F. 2996
Hoffman G. R. 3301
Hoh Chen-chih 2561
Holladay J. C. 2877
Hollinger A. 2201
Horváth J. 3191
Hughes I. M. 3051
Huitson A. 2956
Hukuhara M. 2614, 2851
Hulanicki A. 2377
Hummel J. A. 2564, 2565
Hu Shih-hua 2243

I

Ineichen R. 2916
Inhelder B. 2915
Inoue M. 2664
Ionescu H. P. 2507
Ionescu Tulcea C. T. 2494
Ip S. K. 3321
Isbell J. R. 2462
Iséki K. 2452
Ishihara T. 2942
Ishimoto A. 2250
Itard J. 2177
Iyengar K. T. S. B. 2751

J

Jabotinsky E. 2301, 2302
Jackson R. R. P. 2999
Jacob H. G. 2339
Jacoby E. G. 3048
Jadraque V. M. 2186
Jaffard P. 2386
James I. M. 2480
Jecklin H. 3055
Jiřina M. 3021
Jogdeo S. S. 2947
Johansson I. 2260
Johnson N. L. 2959
Jones F. B. 2456
Jónsson B. 2358
Jordan P. 2423
Jorgensen D. E. 3304
Julia G. 2912 K
Jurkat W. B. 2545
Jůza M. 2501

K

Kahane J.-P. 2508
Kahle H. A. 3328
Kahn L. B. 3023
Kakehashi T. 2554—2556
Kakutani S. 2881
Kalisch G. K. 2866
Kalmár L. 2241
Kamat A. R 2963
Kanold H.-J 2295
Karube T. 2694
Kasahara S. 2450
Kasch F. 2291
Kastenbaum M. A. 3050
Kasuga T. 2656. 2657
Kaufmann A. 2983, 2985
Keller O.-H. 3107 K
Kelly J. L., Jr 2938
Kenner M. R. 2157
Kijne D. 3225
Kilburn T. 3301
Kimura T. 2611, 2612
Kinosita N. 2764
Kisyński J. 2682
Kiyohara M. 2514
Klamkin M. S. 3104
Klass P. J. 3038
Klee V. L., Jr 2447
Klein L. R. 2990
Klingenberg W. 3117, 3219
Knapp C. H. 3308
Kneser M. 2907
Knittl Z. 2849
Koch R. J. 2381
Kochendörffer R. 2352 K
Koenigsberg E. 3030
Kolaczek B. 2190
Kondo K. 2443
Koszul J.-L. 2380
Köthe G. 2273
Kovári T. 2587
Koyanagi K. 3006
Krahn D. 2690
Kreisel G. 2237, 2255
Kreter R. 3182

Krueger R. F. 3331
Krygowska Z. (A. S.) 2223, 2224
Küchemann D. 3323
Kumar R. 2846
Kupperman D. 2168
Kurepa S. 2801
Kurzweil J. 2638
Kustaanheimo P. 3217
Kusunoki Y. 2589

L

Labrador J. F. 2188
Lacaz Netto F. A. 2351 K
Lafon-Augé M. 2960
Lagrange R. 3121
Laha R. G. 2922
Lamperti J. 2540
Lane N. D. 3171
Langefors B. 3241
Langer R. E. 2613
Lanta O. 3126
Latter R. 2776
Law C. 2325
Lebizay A. 3310
Leblanc H. 2278 K
Ledermann W. 2355
Ledoux P. 3245
Lee Ke-chun 2478
Leenders J. H. 2409
Lehrer Y. 2594
Leiby D. W. 3326
Lemke C. E. 2977
Lemmon E. J. 2249
Lentin A. 2328 K
Lenz H. 3113
Leopoldt H. W. 2428
Leray J. 2654
Lesieur L. 3202, 3203
Levé G. de 2957
Levey M. 2172
Levi B. 2161
Levine J. 2317
Levitzki J. 2407
Lichnerowicz A. 3060, 3208
Lighthill M. J. 2914 K
Lilliefors H. W. 2918
Ling Chih-Bing 3268
Lingenberg R. 3218, 3220
Lions J.-L. 2697
Lipiński J. S. 2498
Lippmann H. 3179, 3180
Lipton S. 3277
Littman W. 2653
Litwiniszyn J. 3040
Liu Yung-ching (Ying-ching) 2640
Lluis R. E. 2397—2399
Loh Chung wan 2243
Loonstra F. 2359
Lord R. D. 3037
Lorenzen P. 2159, 2246
Lovass-Nagy V. 3250
Ludford G. S. S. 2665
Ludwig G. 2911
Lunelli L. 3278

M

McAuley L. F. 2469
Macdonald N. D. 3298
McDowell R. H. 2449
McIntire R. L. 3352
Macke W. 3065
McLeod J. B. 2412
McMillan B. 3031
Macon N. 3254
Maeda S. 2891
Mahalanobis P. C. 2271
Mahler K. 2308
Mahler Y. 3316
Maillard R. 3128 K
Malavard L. 3322
Maldague R. 3290
Malesani P. 3145
Manaira M. 3018, 3019
Manara C. F. 3134
Mandel S. P. H. 3051
Mandelbaum H. 3070 K
Mannoury G. 2164
Manteuffel K. 3025
Maravall Casesnoves D. 3047
Marchionna E. 3144, 3146
Marcus F. 3154, 3160
Marcus M. P. 2433
Mařík J. 2675
Markovitch D. 3252
Marschak J. 2975
Martineau A. 2913 K
Martinek J. 2665
Martinelli E. 3211
Massera J. L. 2643
Masson H. 3127 K
Masur E. F. 2750
Matsumoto K. 2247
Matthes K. 2493
Mauersberger P. 2667
Maurer-Tison F. 3192
Maury G. 2410
Maxwell C. N. 2477
May K. 2216
Mayer W. 3333
Mazelsky B. 3324
Medek V. 3129 K
Medgyessy P. 3256
Meier R. 3341
Meschkowski H. 2242
Methée P.-D. 2687, 2689
Meyer zur Capellen W. 3074
Michler L. 2391
Mikolas M. 2305
Mikusinski J. 2811 K
Millet A. 3128 K
Mills W. H. 2354
Milnor J. 2482, 2483, 3204
Miloševic K. 2818
Mioduszewski J. 2465
Miroux J. 3319
Mitchell A. R. 3230
Mitrinovitch D. S. 2834
Mitsudo F. 2348
Mohat J. T. 3150
Mondini A. 2178, 3282
Montagnana M. 2174
Mooers C. N. 3344
Moor A. 3191
Moran S. 2369
Morgenstern O. 2993, 3003
Mori S. 2403
Morinaga K. 2346—2348
Morse M. 2875
Morton K. W. 2940
Moser L. 2831
Mostert P. S. 2485
Mourier E. 2928
Mrówka S. 2448, 2453
Muilwijk J. 2945
Mulcrone T. F. 2199
Müller F. 3272 K
Mura T. 2764
Muracchini L. 3142
Myers S. 2215

N

Nachbin L. 2873
Nag B. R. 3313
Nagai M. 3264
Nakai Y. 3148
Nakamura K. 2365
Namikawa Y. 3079
Nasu Y. 3178, 3221
Nathan A. 3316
Nedoma J. 3021
Neeb F. 3009
Nelson R. 2980
Neukomm G. 2230 K
Neumann B. H. 2355
Nevanlinna R. 2596, 3169
Nevanlinna V. 2332
Niče V. 3131
Nickerson H. K. 2595
Nicolescu M. 2202
Nieto de Alba U. 3035
Nishi M. 3148
Nishigori N. 2360
Nisigaki H. 2592
Nono T. 2346, 2347
Nordbotten S. 3007
North J. D. 3043
Nougaro J. 2740
Noz F. J. 3072

O

O'Connell R. F. 3024
O'Connor D. J. 2279 K
Ödman S. T. A. 2748
Ogasawara T. 2890
Ogiewetzki I. I. 2521, 2522
Ohtsuka M. 2590
Olesiak Z. 2757
Olmsted J. M. H. 2879
Omnès R. 3193
Onicescu O. 2494
Ono T. 2379
Ortiz Santos G. 3034
Osserman R. 2671
Ostrowski A. 2321, 2792

P

Pál S. 3267
Palamà G. 2286, 2323
Palevsky M. 3306
Palm E. 2833
Palomba G. 2991
Pan Cheng-tung 2292
Papy G. 3206
Parodi M. 2330, 2331
Parsons D. H. 2765
Paskalew G. 2605
Payne L. E. 2679
Pearson E. S. 2969 K
Peck P. A. 3338
Peltier J. 3243
Pelczyński A. 2870
Peracchio S. 2979
Peschka W. 2545
Petersen G. M. 2822
Petkantschin B. 3154
Pettis B. J. 2850
Pfluger A. 2591
Pham Mau Quan 3196
Phister M., Jr 3300
Pichler O. 3002
Picone M. 2659
Pick M. 3257
Pickett G 2751
Pini B. 2703, 2705
Plackett R. L. 2941
Pliś A. 2602, 2660
Poenaru V. 2712
Pogorzelski W. 2696
Porcelli P. 2496
Powers K. H. 2936
Prachar K. 2294
Pratt V. E. 2982
Preda M. 2439
Prell H. 2171
Prior A. N. 2248
Putnam C. R. 2884

Q

Queysanne M. 2329 K
Quine W. V. 2251
Quinkert W. 3057 Д

R

Ragab F. M. 2840
Raimi R. A. 2909
Ram S. 2919
Rancu N. 2984
Rao K. N. M. 2584
Read C. B. 2217
Recillas J. F. 2397, 2399
Redheffer R. M. 2500, 2695
Redshaw S. C. 3323
Ree R. 2356
Rees M. 2211
Reichardt W. 3027
Reichenbach H. 2277 K
Reiner I. 2319
Reißig R. 2630
Rényi A. 2920
Reuvecamp W. J., Jr 3095
Richter D. 2227
Riedel J. 2194
Rieger G. J. 2315
Riordan J. 3031
Rivaud J. 2328 K
Rivlin R. S. 2731
Robinson D. W. 2388
Rodrigues Pereira G. S. M. 2158
Roelcke W. 2883
Rose A. 2257
Roseau M. 2741—2743
Rosser J. B. 2275 K
Roth J. P. 2437
Roux D. 2542
Rozenfeld B. A. 3174, 3175
Ruchte M. F. 2362
Rudin W. 2844, 2889
Rufener E. 3010
Ruse H. S. 2383
Russell A. H. 2986
Russo F. A. 2994
Rutishauser H. 3261

S

Sack R. A. 2927
Sade A. 2390
Sakai S. 2892
Sakuma M. 2401
Salát T. 2464
Salinas B. R. 2552
Sampath S. 3317
Samuel P. 2384
Sandelius M. 3045
Sanderson W. 2168
Sangren W. C. 3350
Santaló L. A 3228
Santavý I. 2685
Satake I. 3213
Sato M. 2859
Savastano G. 3292
Saw J. G. 2948
Scanlan R. H. 3320
See M. 2405
Schenkman E. 2357
Schilling O. F. G. 2395
Schinzel A. 2297
Schlüter A. 3233
Schmauch H. 2760
Schönhage A. 2320
Schönhuber A. 2814 K
Schrader G. F. 3311
Schubert G. U. 2760
Schubert H. 2666
Schuff H. K. 2426

Schütte K. 3270 K
Schützer W. 2968
Schwartz L. 2855
Scorza Dragoni G. 2441
Scott W. T. 2563
Sebestyen G. 2434
Sedláček J. 2445
Segre B. 3149
Shapiro E. 3308
Shapiro N. 2281 Д
Shepherdson J. C. 2256, 2265
Shields A. 2906
Shimshoni M. 3276
Shinedling S. 3291
Sibuya Y. 2851
Sichel H. S. 3042
Sickafoose R. D. 3335
Siebel A. 3094
Šik F. 2385
Sikorski R. 2468
Silverman E. 2785
Silverman L. 2820
Silverman R. A. 3028
Simonart F. 2185
Sispanov S. 3103
Skof F. 3099
Ślebodziński W. 3064
Sneddon I. N. 2713 K
Snodgrass M. M. 2987
Sobczyk A. 2800
Soom E. 3014
Soubiès-Camy H. 3295
Spain B. 3108 K
Späth W. 2167
Speranza F. 3120
Spitzbart A. 3254
Spitzer F. 2935
Steinhaus H. 3081
Stone A. P. 2848
Stone R. S. 3312
Storck H. 3056
Straszewicz S. 3100
Straus E. G. 2866
Struik R. R. 2368
Stván A. 3080 K
Suhadolc A. 2825
Supnick F. 2997
Surányi J. 2230 K
Suschowk D. 2691, 2729
Suzuki Y. 2683
Švec A. 3119, 3167
Szabo J. 3250
Szarski J. 3105
Szász G. 2424
Szendrei J. 2424
Szmydt Z. 2709

T

Takács L. 2933
Takase N. 2942, 3044
Takeno H. 3195
Takekuma R. 2245
Takeuchi J. 2547, 2549—2551
Tallini G. 3216
Tamagawa T. 2378
Tamura T. 2868
Tashiro V. 3207
Taussky O. 2336, 2345
Taylor M. E. 2184
Temple G. 2673
Thébault V. 2324, 3092
Thionet P. 2939
Thom R. 2481
Thomas I. 2267
Thorpe R. A. 3308
Tietz T. 2770
Tillmann H. G. 2895
Tintner G. 2974
Todeschini B. 3073
Toulmin G. H. 2794
Tominaga H. 2404
Tong Kwang-chang 2285
Torres-Quevedo G. 3342, 3343
Tóth K. 3267
Tövissi L. 2984
Trabant E. A. 2767
Transue W. 2875
Tremko J. 3299
Trèves F. 2861, 2862, 2913 K
Truesdell C. 2176
Trustrum G. B. 3214
Tschobanow I. 2604, 2605
Tsou S. T. 2382
Tucker D. G. 3318
Turri T. 3122
Tweedie M. C. K. 2951

U

Ulianov P. L. 2410, 2511
Uhlmann W. 3234

V

Vaccaro G. 3166
Vakselj A. 3106
Vala J. 3159
Valko L. 2766
Valpola V. 2269
Van der Waerden B. L. 2310
Vasilache S. 2781, 2858
Vázquez Queipo V. 3273 K
Vejvoda O. 2609
Verhulst M. 3012 K
Vermes P. 2544, 2553
Vilkas E. 2299
Villa M. 2204
Vincensini P. 3155
Vincze S. 3151
Vogel L. C. 3331
Vrănceanu G. 3200
Vries H. de 3227

W

Wade L. I. 2357
Wagner H. M. 3000
Wagner R. 3183, 3184
Walker A. G. 2382
Wallace E. W. 2413
Wang C. L. 2803
Wang L. 2640
Wang Y. 2289, 2297
Ward L. E., Jr 2473
Watanabe Y. 2839
Watson G. S. 2952, 2955
Weart S. A. 2976
Weinberger H. F. 2679
Weiß H. 2193
Weiss L. 2949
Wells D. W. 2221
West J. C. 3314
Wheeler R. F. 3265
White G. M. 3029
Whitin T. M. 3000
Whitney C. 3245
Whyburn G. T. 2467
Wilkes M. V. 3300
Williams E. J. 2962
Wintner A. 2618
Wolfe R. W. 2218
Wong Y. K. 2993
Woodger J.-H. 2263
Wright E. M. 2288
Wyman M. 2831

Y

Yamazaki K. 3212
Yano K. 3190 K, 3210
Yeh G. C. K. 2665
Yonemitsu N. 2244, 2252, 2253
Yood B. 2867
Yoshida M. 2402
Yosida K. 2856

Z

Zăganescu M. 3197
Zaidman S. 2841
Zappa G. 3215
Zawadzki A. 3130 K
Zeitlin D. 2805
Zeller K. 2824
Zerner M. 2658
Zítek F. 2926
Zoroa Terol P. 3015
Zuffi L. 2762
Zweizig J. R. 3305

Технический редактор *Н. Н. Сивкова*